



دانشگاه گیلان

مدل سازی و شبیه سازی بازارهای مالی

تألیف:

دکتر فرشید مهر دوست

استاد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

دکتر آیدین نورانی سراب پور

مدل سازی و شبیه سازی بازارهای مالی

Modeling and Simulation of Financial Markets

By:

Farshid Mehrdoust, Ph. D.

Idin Noorani Sarabpour, Ph. D.

مرکز نشر دانشگاه گیلان

University of Guilan Press

تألیف: دکتر فرشید مهر دوست - دکتر آیدین نورانی سراب پور

شبیه سازی مدل های مالی یک روش مناسب برای مشاهده و تشخیص رفتار بازارهای مالی مانند سهام، اوراق مشتقه و ارزش لحظه ای سبدهای مالی است. در این کتاب به شبیه سازی مدل های تعادلی مالی و قیمت گذاری اوراق مشتقه پرداخته شده است.



978-600-153-343-3

ISBN: 978-600-153-343-3

چاپ اول



مدل سازی و شبیه سازی بازارهای مالی

تألیف:

دکتر فرشید مهر دوست

استاد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان

دکتر آیدین نورانی سراب پور

مرکز نشر دانشگاه گیلان

۱۴۰۴



دانشگاه گیلان
۱۳۵۳-۱۹۷۴

شابک: ۳-۳۴۳-۱۵۳-۶۰۰-۹۷۸

سرشناسه	نمردوست، فرشید، ۱۳۵۶ -
عنوان و نام پدیدآور	مدل سازی و شبیه سازی بازارهای مالی / تالیف فرشید مهردوست، آیدین نورانی سراب پور؛ ویراستار علمی علیرضا نجفی.
مشخصات نشر	رشت: دانشگاه گیلان، انتشارات، ۱۴۰۴.
مشخصات ظاهری	۱۶۶ ص.
شابک	978-600-153-343-3
وضعیت فهرست نویسی	فیا
موضوع	بازار سرمایه -- الگوهای ریاضی Capital market -- Mathematical models امور مالی -- الگوهای ریاضی Finance-- Mathematical models روش مونت کارلو Monte Carlo method اوراق بهادار مشتقه -- الگوهای ریاضی Derivative securities -- Mathematical models
شناسه افزوده	نورانی سراب پور، آیدین، -۱۳۷۳
شناسه افزوده	نجفی، علیرضا، -۱۳۶۷، ویراستار
شناسه افزوده	دانشگاه گیلان. انتشارات
رده بندی کنگره	HG۴۵۲۳:
رده بندی دیویی	۳۳۲/۶:
شماره کتابشناسی ملی	۱۰۲۱۵۷۵۸:
اطلاعات رکورد کتابشناسی	فیا

مرکز نشر دانشگاه گیلان

عنوان کتاب	:	مدل سازی و شبیه سازی بازارهای مالی
مؤلفان	:	دکتر فرشید مهردوست، دکتر آیدین نورانی سراب پور
ویراستار علمی و ادبی	:	دکتر علیرضا نجفی
نوبت چاپ	:	اول، ۱۴۰۴
ناشر	:	مرکز نشر دانشگاه گیلان
شمارگان	:	۱۰۰۰ جلد
* هر گونه چاپ و تکثیر صرفاً در اختیار مرکز نشر دانشگاه گیلان است.		

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

ج

۱	مقدمه‌ای بر شبیه‌سازی	۱
۲	۱-۱ روش شبیه‌سازی مونت-کارلو	۱-۱
۶	۱-۱-۱ همگرایی و تحلیل خطای روش شبیه‌سازی مونت-کارلو	۱-۱-۱
۹	۲-۱-۱ کاربرد روش شبیه‌سازی مونت-کارلو	۲-۱-۱
۱۵	۲-۱ روش‌های کاهش واریانس	۲-۱
۱۶	۱-۲-۱ روش متغیرهای متضاد	۱-۲-۱
۱۹	۲-۲-۱ روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته	۲-۲-۱
۲۴	۳-۲-۱ روش متغیر کنترلی	۳-۲-۱
۲۸	۴-۲-۱ روش نمونه‌گیری نقاط مهم	۴-۲-۱
۳۴	۳-۱ تمرینات فصل اول	۳-۱
۳۷	۲ مقدمه‌ای بر مدل‌های مالی	۲
۳۷	۱-۲ مفاهیم اولیه ریاضیات مالی	۱-۲
۴۲	۲-۲ حسابان تصادفی	۲-۲
۴۷	۱-۲-۲ معادلات دیفرانسیل تصادفی	۱-۲-۲
۵۵	۳-۲ مدل‌های تصادفی برای قیمت سهام	۳-۲
۵۵	۱-۳-۲ مدل حرکت براونی هندسی	۱-۳-۲
۵۹	۲-۳-۲ مدل هستون	۲-۳-۲
۶۰	۳-۳-۲ مدل پرش-انتشار	۳-۳-۲

۶۴	مدل رژیم-سوئیچینگ	۴-۳-۲
۷۴	مدل سازی ارزش پرتفوی	۴-۲
۷۶	پرتفوی پوشش ریسک	۱-۴-۲
۸۱	اندازه احتمال معادل	۵-۲
۸۵	اندازه احتمال ریسک خنثی	۱-۵-۲
۹۱	تمرینات فصل دوم	۶-۲

۳ شبیه سازی بازارهای مالی ۹۵

۹۹	گسسته سازی مدل های تصادفی	۱-۳
۱۰۱	شبیه سازی قیمت سهام	۲-۳
۱۰۲	شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل حرکت براونی هندسی	۱-۲-۳
۱۰۶	شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل تلاطم تصادفی هستون	۲-۲-۳
۱۰۸	شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل پرش-انتشار	۳-۲-۳
۱۱۲	شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل رژیم-سوئیچینگ	۴-۲-۳
۱۱۷	تمرینات فصل سوم	۳-۳

۴ شبیه سازی قیمت اختیار ۱۲۳

۱۲۴	روش شبیه سازی مونت-کارلو در قیمت گذاری اختیار	۱-۴
۱۲۵	قیمت گذاری اختیار اروپایی	۱-۱-۴
۱۲۷	قیمت گذاری اختیار آسیایی	۲-۱-۴
۱۲۹	روش های کاهش واریانس در قیمت گذاری اختیار	۲-۴
۱۳۰	قیمت گذاری اختیار با روش متغیرهای متضاد	۱-۲-۴
۱۳۵	قیمت گذاری اختیار با روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته	۲-۲-۴
۱۴۲	قیمت گذاری اختیار با روش متغیر کنترلی	۳-۲-۴
۱۴۹	تمرینات فصل چهارم	۳-۴

۱۵۵ کتاب نامه

۱۵۹ واژه نامه

۱۶۵ نمایه

پیش گفتار

امروزه شبیه‌سازی به یک ابزار مؤثر در مدل‌سازی بازارهای مالی، قیمت‌گذاری اوراق مشتقه و مدیریت ریسک تبدیل شده است. شبیه‌سازی مدل‌های مالی یک روش مناسب برای درک و تشخیص رفتار بازارهای مالی مانند سهام و ارزش لحظه‌ای سبدهای مالی است. از آنجایی که قیمت‌گذاری مشتقات مالی به روش تحلیلی یا حتی نیمه تحلیلی در بسیاری از موارد امکان‌پذیر نیست، استفاده از روش‌های شبیه‌سازی برای حل این‌گونه مسائل بسیار راهگشا خواهد بود. در این کتاب با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو به ارزیابی بازارهای مالی و قیمت‌گذاری اوراق مشتقه روی دارایی‌های پایه می‌پردازیم.

این کتاب می‌تواند یک منبع مناسب برای دانشجویان رشته ریاضی مالی، محققان علاقه‌مند به کاربرد روش‌های شبیه‌سازی در امور مالی و متخصصانی که مدل‌های تصادفی را در صنعت پیاده‌سازی می‌کنند باشد. همچنین دانشجویان رشته‌های مختلف دانشگاهی با سطوح مختلف آموزشی در ریاضیات، آمار، امور مالی و محاسبات حوزه مهندسی مالی می‌توانند از این کتاب بهره‌مند شوند. مهم‌ترین پیش‌نیاز مطالعه این کتاب، آشنایی با ابزارهای ریاضی است که به طور معمول برای تعیین و تحلیل مدل‌های زمان-پیوسته در امور مالی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این کتاب، برخی مفاهیم حسابان تصادفی و معادلات دیفرانسیل تصادفی به منظور شبیه‌سازی بازارهای مالی آورده شده است. این کتاب در چهار فصل تنظیم شده است. فصل اول، مقدمه‌ای بر شبیه‌سازی کامپیوتری و کاربرد آن در حل عددی انتگرال‌ها را بیان می‌کند. این فصل اساس قیمت‌گذاری اختیارات به روش شبیه‌سازی مونت-کارلو را پایه‌گذاری می‌کند. در واقع با توجه به اینکه مسائل مربوط به قیمت‌گذاری اختیار معامله معمولاً به صورت یک مسئله انتگرالی فرموله می‌شوند، روش شبیه‌سازی مونت-کارلو را می‌توان برای محاسبه آن‌ها استفاده کرد. در فصل دوم، مقدمه‌ای از مدل‌های مالی و نحوه‌ی پیاده‌سازی آن‌ها را ارائه می‌دهیم. در ابتدای این فصل مفاهیم اساسی در ریاضیات مالی شامل حسابان ایتو، معادلات دیفرانسیل تصادفی و تغییر اندازه احتمال را که در شبیه‌سازی بازارهای مالی به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، بیان می‌کنیم. در ادامه به چگونگی تشکیل فرایند ارزش پرتفوی و برخی از مهم‌ترین مدل‌های مالی شامل مدل حرکت براونی هندسی، مدل وسیچک، مدل کاکس-اینگرسل-راس، مدل هستون، مدل پرش-انتشار مرتون و مدل رژیم-سوئیچینگ پرداخته می‌شود. فصل سوم، چگونگی شبیه‌سازی مدل‌های مالی ارائه شده در فصل دوم را مورد بحث قرار می‌دهد. در فصل چهارم قیمت‌گذاری اختیار معامله به روش شبیه‌سازی مونت-کارلو بررسی می‌شود. در این فصل همچنین برخی از مهم‌ترین و جدیدترین روش‌های کاهش واریانس برای بهبود روش شبیه‌سازی مونت-کارلو در قیمت‌گذاری اختیارات معامله مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

در پایان از تمامی خوانندگان محترم تقاضا می‌شود پس از مطالعه کتاب نظرات ارزشمند خود را به نویسندگان^{۲۱} ارسال فرمایند.

فرشید مهر دوست-آیدین نورانی
دانشگاه گیلان
اردیبهشت ماه ۱۴۰۴

¹fmehrdoust@guilan.ac.ir

²idin-noorani@phd.guilan.ac.ir

فصل ۱

مقدمه‌ای بر شبیه‌سازی

در بسیاری از موارد نیاز به مطالعه غیر مستقیم رفتار یک سیستم داریم و آن زمانی است که بنا به دلایلی نمی‌توان از طریق مشاهده مستقیم، رفتار یک سیستم را مطالعه نمود. در مطالعه مستقیم، بررسی و مطالعه سیستم مرجع از نزدیک صورت می‌گیرد. بنابراین مهم‌ترین فرض مطالعه مستقیم وجود سیستم مرجع است. همچنین در این روش وجود نمونه محصول برای کنترل کیفیت یک محصول تولیدی بسیار مهم است. با وجود اینکه دقت در روش مطالعه مستقیم بسیار بالا است، اما این روش همیشه جواب‌گو نیست و معایب سیستم را نمی‌توان رفع نمود. در روش غیر مستقیم برخلاف رویکرد مستقیم، می‌توان قبل از ایجاد سیستم رفتار آن را ضمن رفع معایب، مورد بررسی قرار داد و سپس محصول را تولید کرد. به عنوان مثال، برای طراحی یک پردازنده مرکزی رایانه توسط مدل‌سازی، پس از اخذ نتایج حاصل، ساخت آن ضمن رفع عیوب منطقی و فیزیکی صورت می‌پذیرد. شبیه‌سازی، روشی برای مطالعه غیرمستقیم سیستم است و به دور از مشکلات به بررسی موضوع می‌پردازد. از مهم‌ترین مزیت‌های شبیه‌سازی می‌توان به این موارد اشاره نمود: امکان مطالعه سیستم مرجع قبل از ایجاد یا پس از اینکه از بین رود فراهم است، پارامترهای زمانی سیستم مورد مطالعه قابل تغییر هستند، از نظر اقتصادی و زمانی بسیار مقرون به صرفه است، محدودیت‌ها و خطرات ناشی از مطالعه مستقیم قابل رفع و مطالعه جزء به جزء سیستم و کنار هم قرار دادن اجزا با حداکثر کارایی امکان‌پذیر است.

شبیه‌سازی آزمایشی است که معمولاً بر روی رایانه انجام می‌شود و از طریق اعداد تصادفی پیاده‌سازی می‌شود. این اعداد دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هستند که به طور مستقل و یکنواخت در بازه $(0, 1)$ توزیع شده‌اند. موارد زیر مثال‌هایی هستند که از طریق شبیه‌سازی می‌توان آن‌ها را

مطالعه نمود:

الف) تعداد افراد بیمار شده در یک شهر،

ب) تکامل یک بیماری همه گیر در یک مکان و زمان،

ج) آزمون یک فرضیه آماری،

د) قیمت گذاری اختیار معامله (مشتقه مالی) صادر شده روی یک دارایی مالی.

ویژگی مشترک تمام موارد فوق آن است که استفاده از روش های تحلیلی برای مدل سازی پدیده های واقعی [مثال های (الف) و (ب)] یا حل مسائل ریاضی [مثال های (ج) و (د)] دشوار است. در مثال های (الف) و (ب) با سیستم های تصادفی مواجه هستیم که تعامل پیچیده ای می تواند بین منابع و بخش های خاصی از سیستم وجود داشته باشد و این دشواری ممکن است با نیاز یافتن به یک استراتژی بهینه ترکیب شود. در مثال (ج)، پس از به دست آمدن داده ها توسط یک بررسی آماری، مقدار عددی برخی از آماره های آزمون محاسبه می شود. هر چند ممکن است تحت یک فرضیه صفر، نتوان تابع توزیع آن ها را به دست آورد. در مثال (د)، مسئله مورد نظر اغلب به ارزیابی یک انتگرال چندگانه منجر می شود که حل آن با روش های تحلیلی غیرممکن است. با این وجود این انتگرال ها را می توان با روش شبیه سازی برآورد نمود. استفاده از روش شبیه سازی در ارزیابی این نوع مسائل اولین بار در دهه ۱۹۴۰ برای حل انتگرال های چندگانه در ریاضیات و فیزیک به کار گرفته شد. به طور کلی، شبیه سازی برای مسائلی کاربرد دارد که حل تحلیلی آن ها بسیار دشوار و یا حتی ناممکن است. در یک شبیه سازی، آزمایش نمونه گیری (به عنوان مثال، میانگین نمونه یا نسبت نمونه) با استفاده از اعداد تصادفی بر روی رایانه به صورت کنترل شده انجام می شود و این آزمایش ها برای برآورد برخی از پارامترهای موجود در مسئله مورد استفاده می گیرند. از آنجایی که شبیه سازی برآوردی از پارامتر مورد نظر را ارائه می دهد، همواره یک مقدار خطا وجود دارد. بنابراین تعیین دقت، بخش مهمی از طراحی و تجزیه و تحلیل آزمایش را شکل می دهد و پرداختن به آن امری ضروری است.

۱-۱ روش شبیه سازی مونت-کارلو

واژه های مونت-کارلو^۱ و شبیه سازی معمولاً در تحقیقات به جای یکدیگر مورد استفاده قرار می گیرند. در واقع شبیه سازی به عنوان یک آزمایش کنترل شده تعریف شده است که در آن اعداد تصادفی تولید

¹Monte-Carlo

شده به صورت مستقل از هم روی یک رایانه پیاده‌سازی می‌شوند. شبیه‌سازی مونت-کارلو روشی برای برآورد مقدار یک انتگرال معین یا سری با استفاده از مقادیر به‌دست آمده توسط شبیه‌سازی است. در واقع ارتباطی که بین انتگرال و مقدار مورد انتظار وجود دارد تابعی از متغیر(های) تصادفی است. برای استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو، تحلیلگر یک مدل ریاضی می‌سازد که پدیده واقعی را شبیه‌سازی کند. در این روش ابتدا تعداد زیادی از نمونه‌های تصادفی تولید می‌شوند و سپس به همان تعداد، نتایج تصادفی به عنوان خروجی توسط مدل به‌دست می‌آید. پیدایش این موضوع در دهه ۱۹۴۰ توسط سه دانشمند به نام‌های جان فون نویمان^۱، استانیسلاو اولام^۲ و نیکلاس متروپولیس^۳ آغاز شد که در یک مأموریت مخفی در آزمایشگاه ملی لوس آلاموس روی یک پروژه سلاح هسته‌ای به نام پروژه منهتن کار می‌کردند. این افراد روش جدیدی را در نظر گرفتند که به روش مونت-کارلو معروف شد. استانیسلاو اولام این نام را از کازینوهای مونت-کارلو واقع در موناکو ابداع کرد. سیستمی که تیم منهتن در حال مطالعه آن بودند شامل مجموعه‌ای از الگوریتم‌ها و متغیرهای ورودی بود، به‌طوری که حل تحلیلی آن بسیار پیچیده و مشکلات بسیاری را در پی داشت. بنابراین آن‌ها برای ارزیابی سیستم مورد نظرشان روش جدیدی از شبیه‌سازی را ابداع نمودند که به روش شبیه‌سازی مونت-کارلو مشهور گردید. امروزه برنامه‌های کاربردی بسیاری در حوزه‌های مختلف مالی، مهندسی و علوم پایه بر اساس روش شبیه‌سازی مونت-کارلو هستند.

روش شبیه‌سازی مونت-کارلو نوعی روش بر اساس نمونه‌گیری‌های تصادفی مکرر است. این روش از شبیه‌سازی بسیار نزدیک به آزمایش‌های تصادفی است، آزمایش‌هایی که نتیجه آن‌ها از قبل مشخص نیستند. مزیت به کار گرفتن الگوریتم‌های مبتنی بر روش شبیه‌سازی مونت-کارلو این است که با افزایش تعداد شبیه‌سازی، تقریب‌های بهتری حاصل می‌شوند. همچنین زمانی که مجموعه روش‌های موجود برای پاسخ دادن به یک مسئله بسیار زیاد باشد و امکان آزمایش تمامی آن‌ها به طور عملی امکان‌پذیر نباشد، استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو بسیار راهگشا خواهد بود.

تعریف ۱-۱. روش شبیه‌سازی مونت-کارلو شامل حل مسائل مختلف ریاضیات محاسباتی با ساخت یک فرایند تصادفی برای هر یک از این مسائل است، به‌طوری که پارامترهای فرایند با مقادیر مورد نیاز مسئله برابر هستند. روش‌های مبتنی بر شبیه‌سازی مونت-کارلو برای محاسبه تقریبی امید ریاضی به کار گرفته می‌شوند. با فرض اینکه J ، جواب مورد نظر مسئله است، در روش شبیه‌سازی مونت-کارلو، متغیر تصادفی ξ باید به گونه‌ای ساخته شود که $\mathbb{E}[\xi] = J$. بر اساس این روش از شبیه‌سازی، جواب تقریبی از J با استفاده از n متغیر تصادفی مستقل و هم‌توزیع $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ به صورت زیر

¹John von Neumann

²Stanisław Ulam

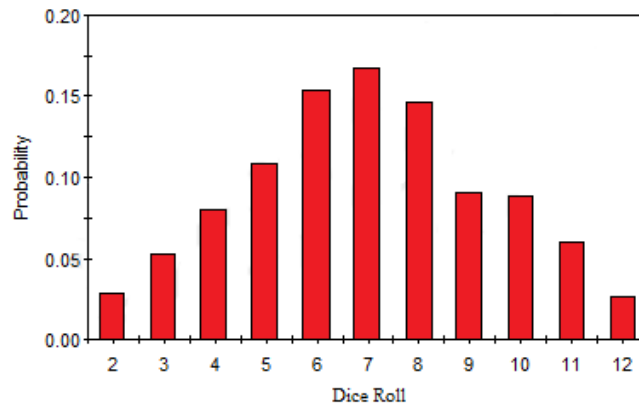
³Nicholas Metropolis

خواهد بود

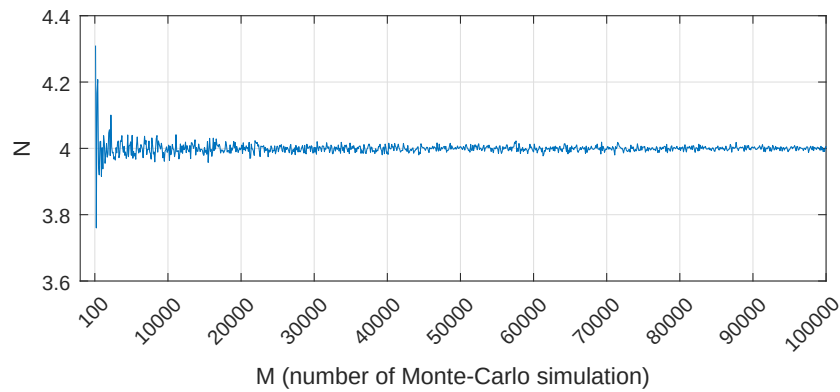
$$J \approx \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n).$$

مثال ۱-۱. برای تشخیص ناریب بودن سکه می توان از روش شبیه سازی مونت-کارلو بهره برد. برای این منظور، ۱۰۰۰۰ عدد تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه (۰, ۱) تولید می کنیم. تعداد اعدادی که بیشتر از ۵/۰ هستند را به عنوان تعداد شیرها و آنهایی که از ۵/۰ کمتر هستند به عنوان تعداد خطها در نظر بگیرید. بنابراین با تکرار این عمل شبیه سازی که بیانگر روش شبیه سازی مونت-کارلو است می توانیم در مورد ناریب بودن سکه نظر بدهیم. بر این اساس اگر نسبت تعداد شیرها به خطها (یا برعکس) نزدیک ۱ باشد، رأی به ناریب بودن سکه می دهیم. در واقع کاربرد رویکرد ارائه شده در این مثال جایگزین کردن آن به جای نتایج حاصل از پرتاب سکه ناریب است.

مثال ۱-۲. می خواهیم با استفاده از دو تاس با مقادیر یک تا شش، احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۷ باشد را تعیین کنیم. می دانیم از ۳۶ حالت ممکن برای دو تاس، ۶ حالت وجود دارد که مجموع اعداد ظاهر شده برابر ۷ است. این بدان معنی است که احتمال ریاضی برای اینکه مجموع اعداد ظاهر شده ۷ باشد برابر $\frac{6}{36}$ یا ۱۶/۶۷ درصد است. اما آیا احتمال ریاضی با احتمال واقعی یکسان است؟ آیا عوامل دیگری، مانند طراحی تاسها، سطحی که روی آن تاسها پرتاب می شوند و ترفندی که برای انداختن آنها مورد استفاده می گیرد، وجود دارد که بر احتمال ریاضی تأثیر بگذارد؟ برای تعیین احتمال واقعی، می توانیم تاس را ۱۰۰ بار پرتاب و هر بار نتیجه را ثبت کنیم. فرض کنید که این کار را انجام داده ایم و از ۱۰۰ بار، ۱۷ مرتبه یا ۱۷ درصد از مواقع، مجموع عدد ۷ را مشاهده کرده ایم. اگرچه این آزمایش یک نتیجه واقعی و فیزیکی را نشان می دهد، اما همچنان بیانگر یک نتیجه تقریبی است. با این حال اگر بارها و بارها به انداختن تاس ادامه دهیم، نتیجه تقریبی به مقدار واقعی نزدیکتر می شود. در واقع روش مذکور این امکان را می دهد که پرتاب تاسها را شبیه سازی کرده و مشخص کنیم برای رسیدن به هدف مطلوب چند بار باید به پرتاب تاسها ادامه دهیم. در این روش هر پرتاب نشان دهنده یک تکرار از شبیه سازی مونت-کارلو است و با افزایش تعداد تکرارها، نتایج شبیه سازی دقیق تر می شود. راه بهتر از پرتاب تاسها این است که از یک رایانه برای شبیه سازی تاسها استفاده کنیم و آنها را ۱۰۰۰۰ بار یا بیشتر پرتاب کنیم. از آنجایی که در هر پرتاب، احتمال اینکه مجموع اعداد ظاهر شده ۷ باشد، برابر $\frac{6}{36}$ است، کار ساده ای در پیش داریم. در شکل (۱-۱)، تابع توزیع احتمال به دست آمده توسط مجموع اعداد ظاهر شده در ۱۰۰۰۰ بار پرتاب دو تاس به طور هم زمان را مشاهده می کنیم.



شکل ۱-۱: تابع توزیع احتمال مجموع اعداد ظاهر شده در ۱۰۰۰۰ بار پرتاب دو تاس.



شکل ۲-۱: نتایج به‌دست آمده برای $N = \max\{n \mid \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-3}\}$ در مثال (۳-۱) توسط روش شبیه‌سازی مونت-کارلو با تعداد تکرارهای مختلف.

مثال ۳-۱. فرض کنید $U_1, \dots, U_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشد. تعریف می‌کنیم

$$N = \max \left\{ n \mid \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-3} \right\}.$$

قصد داریم با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو مقدار مورد انتظار N یعنی $\mathbb{E}[N]$ را بیابیم. بدین منظور ابتدا عدد بزرگ M را به عنوان تعداد شبیه‌سازی مونت-کارلو اختیار می‌کنیم. سپس در

هر گام از شبیه سازی مونت-کارلو، مقدار $\max\{n | \prod_{i=1}^n U_i^j \geq e^{-3}\}$ را در N_j ذخیره می کنیم، که در آن $U_1^j, \dots, U_n^j$ نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ برای گام j ام $(1 \leq j \leq M)$ از شبیه سازی مونت-کارلو است. توجه کنید که در هر گام از شبیه سازی، با توجه به اینکه نمونه های تصادفی جدیدی تولید می شوند، n ها برابر نیستند. در نهایت برای به دست آوردن مقدار مورد انتظار N ، کافیست میانگین N_j ها را بنا به قانون قوی اعداد بزرگ به دست آوریم. همان طور که از شکل (۱-۲) مشخص است، زمانی که تعداد شبیه سازی مونت-کارلو افزایش می یابد به جواب دقیق تری دست پیدا می کنیم.

الگوریتم ۱.۱: برآورد ماکسیمم تکرار متغیرهای تصادفی یکنواخت پیوسته در مثال (۱-۳)

- ۱- برای $j = 1, \dots, M$ گام های ۲ تا ۶ را انجام بده.
- ۲- قرار بده $p = 1$ و $count = 0$.
- ۳- تا زمانی که $p \geq \exp(-3)$ دستورات ۴ تا ۵ را انجام بده.
- ۴- متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته U در بازه $(0, 1)$ را با دستور $U = rand$ تولید کن.
- ۵- قرار بده $p = p * U$ و $count = count + 1$.
- ۶- قرار بده $N(j) = count$.
- ۷- میانگین $N(j)$ ها را به عنوان برآورد N توسط دستور $mean(N)$ چاپ کن.

۱-۱-۱ همگرایی و تحلیل خطای روش شبیه سازی مونت-کارلو

فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی با مقدار امید ریاضی معلوم $\mathbb{E}[\xi] := J$ باشد. با توجه به تعریف امید ریاضی داریم

$$\mathbb{E}[\xi] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi, & \text{زمانی که } \xi \text{ متغیر تصادفی پیوسته و } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \text{ است} \\ \sum_{\xi} \xi f(\xi), & \text{زمانی که } \xi \text{ متغیر تصادفی گسسته و } \sum_x f(x) = 1 \text{ است} \end{cases}$$

که در آن تابع غیر منفی $f(x)$ در حالت پیوسته (در حالت گسسته) تابع چگالی احتمال (تابع جرم احتمال) نامیده می شود. بعلاوه با استفاده از تعریف، مقدار امید ریاضی $\mathbb{E}[\xi]$ وجود دارد، اگر و تنها اگر $\mathbb{E}[|\xi|]$ وجود داشته باشد.

با توجه به روش شبیه سازی مونت-کارلو، برای تقریب J باید به محاسبه میانگین حسابی زیر

بپردازیم

$$\bar{\xi}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i.$$

برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ با امید ریاضی معلوم، می‌توان قانون قوی اعداد بزرگ را به کار گرفت. این بدان معناست که میانگین حسابی این متغیرها به امید ریاضی ξ همگرا می‌شود، اگر

$$\bar{\xi}_n \xrightarrow{p} J, \quad n \rightarrow \infty.$$

دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ به عدد ثابت c همگرا است، اگر برای هر $h > 0$ داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|\eta_n - c| \geq h) = 0.$$

بنابراین برای n به اندازه کافی بزرگ، خواهیم داشت

$$\bar{\xi}_n \approx J.$$

حال به مسئله برآورد خطا روش شبیه‌سازی مونت-کارلو می‌پردازیم. فرض کنید متغیر تصادفی ξ دارای واریانس متناهی باشد، یعنی

$$V[\xi] = \mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}[\xi]]^2 = \mathbb{E}[\xi^2] - \mathbb{E}[\xi]^2 < \infty.$$

از طرفی برای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل از هم که دارای توزیع یکسان و واریانس متناهی هستند، می‌توان قضیه حد مرکزی را به کار گرفت. بر اساس این قضیه، اگر دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ دارای میانگین J و واریانس $V[\xi]$ باشند، آنگاه متغیر تصادفی $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$ برای n به اندازه کافی بزرگ دارای توزیع نرمال با میانگین J و واریانس $V[\xi]/n$ است. به عبارت دیگر برای مقدار دلخواه z داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{n}{V[\xi]}}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - J\right) < z\right) = \Phi(z),$$

که در آن $\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ تابع توزیع نرمال استاندارد است. در نتیجه برای دو مقدار دلخواه z_1 و z_2 می توان نوشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(z_1 < \sqrt{\frac{n}{V[\xi]}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - J\right) < z_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

حال اگر $z_2 = -z_1 = z$ داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - J\right| < z \sqrt{\frac{V[\xi]}{n}}\right) = 2\Phi(z).$$

بنابراین زمانی که n به اندازه کافی بزرگ است، داریم

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{\xi}_n - J\right| < z \sqrt{\frac{V[\xi]}{n}}\right) \approx 2\Phi(z).$$

فرمول بالا که وابسته به پارامتر z است، یک مجموعه کامل از برآوردها را ارائه می دهد. اگر احتمال β داده شود، ریشه $z = z_\beta$ ، با استفاده از جداول آماری توسط معادله زیر به دست می آید

$$\Phi(z) = \frac{\beta}{2}.$$

بنابراین احتمال پیشامد نامساوی زیر

$$\left|\bar{\xi}_n - J\right| < z_\beta \sqrt{\frac{V[\xi]}{n}},$$

تقریباً برابر β است. سمت راست نامساوی فوق خطای احتمالی نامیده می شود. نماد r_n نیز اغلب به عنوان خطای احتمال مورد استفاده قرار می گیرد. بنابراین می توان نوشت

$$\mathbb{P}\left(\left|\bar{\xi}_n - J\right| < r_n\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\left(\left|\bar{\xi}_n - J\right| > r_n\right).$$

در نتیجه خطای احتمالی در روش شبیه سازی مونت-کارلو برابر است با

$$r_n = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{V[\xi]}{n}},$$

که در آن $z_{\alpha/2} = \Phi^{-1}(\alpha/2) \approx 0.6745$.

۲-۱-۱ کاربرد روش شبیه‌سازی مونت-کارلو

از آنجایی که انتگرال‌گیری به روش نمونه‌گیری تصادفی یکی از مباحث پرکاربرد در ریاضیات مالی است، در این فصل عمدتاً این مبحث را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو در محاسبه انتگرال‌ها، ابتدا انتگرال مورد نظر را به یک امید ریاضی تبدیل می‌کنیم و سپس روش شبیه‌سازی را به کار می‌گیریم. به عنوان مثال، به ارزیابی انتگرال زیر می‌پردازیم

$$\theta := \int_D f(x) dx, \quad (۱-۱)$$

که در آن $f(x)$ یک تابع پیوسته و D دامنه انتگرال است. با استفاده از تعریف امید ریاضی، انتگرال (۱-۱) را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Theta = \int_D f(x) dx = \int_D \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \mathbb{E}_g \left[\frac{f(X)}{g(X)} \right], \quad (۲-۱)$$

که در آن $g(x)$ تابع چگالی تعریف‌شده روی دامنه D و $\mathbb{E}_g$ نشان‌دهنده امید ریاضی نسبت به تابع چگالی $g(x)$ است.

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از تابع چگالی $g_X(x)$ باشد. در این صورت به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{\mu} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ یک برآوردگر ناریب برای $\mu := \mathbb{E}[X]$ است. بنابراین برای محاسبه انتگرال (۲-۱)، می‌توانیم از برآوردگر زیر استفاده کنیم

$$\hat{\Theta} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(X_i)}{g(X_i)}, \quad (۳-۱)$$

توجه کنید که تابع چگالی در نظر گرفته شده باید مطابق با دامنه انتگرال باشد. به طور مشابه می‌توان روش به کار گرفته شده را برای انتگرال‌های چندگانه نیز تعمیم داد. در ادامه از این روش شبیه‌سازی برای محاسبه چند انتگرال با دامنه‌های مختلف استفاده می‌شود.

• فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی با توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشد. در این صورت می‌توان نوشت

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) \times 1 dx = \mathbb{E}[f(X)] \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i).$$

با تغییر متغیر برای $-\infty < a < b < \infty$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_a^b f(y)dy &= (b-a) \int_0^1 f((b-a)x+a)dx \\ &= (b-a) \int_0^1 f((b-a)x+a) \times 1 dx \\ &= (b-a) \mathbb{E}[f((b-a)X+a)] \\ &\approx \frac{(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n f((b-a)X_i+a).\end{aligned}$$

• اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد، در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \times \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}x^2} \right) dx \\ &= \sqrt{2\pi} \mathbb{E}[f(X) \times e^{\frac{1}{2}X^2}] \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \times e^{\frac{1}{2}X_i^2}.\end{aligned}$$

• فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از توزیع نیم-نرمال استاندارد باشد، در این صورت می توان نوشت

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)dx &= \int_0^{\infty} \left(f(x) \times \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \times \frac{\sqrt{2\pi}}{2} e^{\frac{1}{2}x^2} \right) dx \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \mathbb{E}[f(X) \times e^{\frac{1}{2}X^2}] \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{2n} \sum_{i=1}^n f(X_i) \times e^{\frac{1}{2}X_i^2}.\end{aligned}$$

مثال ۱-۴. با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو، پاسخ انتگرال های زیر را برآورد کنید.

$$\int_0^1 \int_0^1 x e^{-x-y} dx dy \quad \text{الف}$$

$$\int_{-2}^2 x^2 e^{-x} dx \quad \text{ب}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{ج}$$

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy \quad \text{د}$$

پاسخ الف) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشند. در این صورت با توجه به تعریف امید ریاضی داریم

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_0^1 \int_0^1 g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy. \quad (4-1)$$

که در آن $g(x, y)$ یک تابع پیوسته دو متغیره و $f_{X,Y}(x, y)$ تابع چگالی توأم X و Y است. با توجه به مستقل بودن متغیرهای تصادفی X و Y داریم، $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. از آنجایی که X و Y متغیرهای تصادفی یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ هستند پس تابع چگالی هر کدام از آن‌ها برابر یک است، یعنی $f_X(x) = f_Y(y) = 1$. حال با توجه به خواسته مسئله، تابع $g(x, y)$ در معادله (4-1) را به صورت $g(x, y) = 2xe^{-x-y}$ تعریف کنید. آنگاه به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[2Xe^{-X-Y}] &= \int_0^1 \int_0^1 2xe^{-x-y} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2xe^{-x-y} f_X(x) f_Y(y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 2xe^{-x-y} dx dy. \end{aligned}$$

بنابراین اگر $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_n$ دو نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشند، با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو خواهیم داشت

$$\int_0^1 \int_0^1 2xe^{-x-y} dx dy \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2X_i e^{-X_i - Y_i}.$$

پاسخ ب) ابتدا بازه $[-2, 4]$ را با به کار گرفتن تبدیل زیر به بازه $[0, 1]$ انتقال می‌دهیم

$$x = \alpha y + \beta,$$

که در آن $-2 \leq x \leq 4$ و $0 \leq y \leq 1$. در این صورت $\alpha = 6, \beta = -2$ و انتگرال (ب) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\int_{-2}^4 x^3 e^{-2x} dx = 6 \int_0^1 (6y - 2)^3 e^{-2(6y-2)} dy.$$

فرض کنید Y متغیر تصادفی با توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشد. در این صورت با توجه به تعریف امید ریاضی داریم

$$6 \int_0^1 (6y - 2)^3 e^{-2(6y-2)} dy = 6 \mathbb{E}[(6Y - 2)^3 e^{-2(6Y-2)}].$$

در نتیجه اگر $Y_1, \dots, Y_n$ نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشد، با به کار گرفتن روش شبیه سازی مونت-کارلو خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n (6Y_i - 2)^2 e^{-2(6Y_i - 2)^2}.$$

پاسخ ج) با توجه به اینکه حدود کران های انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ است، ابتدا تابع انتگرالده را در تابع چگالی نرمال استاندارد یعنی $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ضرب و تقسیم کنید. فرض کنید X متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^{-1} dx \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

حال اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشد، با به کار گرفتن روش شبیه سازی مونت-کارلو خواهیم داشت

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{n} \sum_{i=1}^n [e^{-X_i^2} e^{\frac{1}{2}X_i^2}].$$

پاسخ د) فرض کنید X و Y به ترتیب دو متغیر تصادفی مستقل از توزیع نرمال استاندارد و نیم-نرمال استاندارد باشند. در این صورت با توجه به تعریف امید ریاضی داریم

$$\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} f_{X,Y}(x, y) dx dy. \quad (5-1)$$

که در آن $g(x, y)$ یک تابع پیوسته دو متغیره و $f_{X,Y}(x, y)$ تابع چگالی توأم X و Y است. با توجه به مستقل بودن متغیرهای تصادفی X و Y داریم، $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$. از آنجایی که X و Y به ترتیب متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد و نیم-نرمال استاندارد هستند، پس تابع چگالی هر کدام از آن ها به ترتیب به صورت زیر است

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad y \in [0, \infty).$$

با توجه به ماهیت مسئله، تابع $g(x, y)$ در رابطه (۵-۱) را به صورت زیر تعریف کنید

$$g(x, y) = e^{-x^2-y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right)^{-1}.$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right)^{-1} \\ & \quad \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right)^{-1} dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right)^{-1} f_X(x) f_Y(y) dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \right)^{-1} f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \mathbb{E} \left[e^{-X^2-Y^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}X^2} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Y^2} \right)^{-1} \right]. \end{aligned}$$

حال اگر $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_n$ به ترتیب دو نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد و نیم-نرمال استاندارد باشند، با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو داریم

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy &\approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[e^{-X_i^2-Y_i^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}X_i^2} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Y_i^2} \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[e^{-X_i^2-|Z_i|^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}X_i^2} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}|Z_i|^2} \right)^{-1} \right], \end{aligned}$$

که در آن $Z_1, \dots, Z_n$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد است.

در جدول (۱-۱) حل دقیق انتگرال‌ها در مثال (۴-۱)، مقدار برآورد شده آن‌ها توسط روش شبیه‌سازی مونت-کارلو به همراه انحراف معیار برآوردگرها با $n = 10^7$ تعداد شبیه‌سازی گزارش

شده است.

الگوریتم ۲.۱: برآورد انتگرال های مثال (۴-۱) با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو

۱- دو نمونه تصادفی $U_1, \dots, U_n$ و $V_1, \dots, V_n$ از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ را به ترتیب توسط دستورات $U = rand(n, 1)$ و $V = rand(n, 1)$ تولید کن.
 ۲- نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$ از توزیع نرمال استاندارد را با دستور $X = randn(n, 1)$ تولید کن.

۳- نمونه تصادفی $Y_1, \dots, Y_n$ از توزیع نیم-نرمال استاندارد را بر اساس قدرمطلق نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد توسط دستور $Y = abs(randn(n, 1))$ تولید کن.
 - برآورد انتگرال (الف) و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\begin{aligned} &mean(2 * U * \exp(-U - V)), \\ &std(2 * V * \exp(-U - V)). \end{aligned}$$

- برآورد انتگرال (ب) و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\begin{aligned} &6 * mean((6 * U - 2) * \exp(-2 * (6 * U - 2))), \\ &std(6 * (6 * U - 2) * \exp(-2 * (6 * U - 2))). \end{aligned}$$

- برآورد انتگرال (ج) و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\begin{aligned} &sqrt(2 * pi) * mean(\exp(-X * 2) * \exp(0.5 * X * 2)), \\ &std(sqrt(2 * pi) * \exp(-X * 2) * \exp(0.5 * X * 2)). \end{aligned}$$

- برآورد انتگرال (د) و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\begin{aligned} &2 / (2 * pi) * mean(\exp(-X * 2 - Y * 2 + 0.5 * X * 2 + 0.5 * Y * 2)), \\ &std(2 / (2 * pi) * \exp(-X * 2 - Y * 2 + 0.5 * X * 2 + 0.5 * Y * 2)). \end{aligned}$$

جدول ۱-۱: مقایسه جواب دقیق و برآورد انتگرال‌ها در مثال (۴-۱) به همراه انحراف معیار برآوردها.

Example	Exact solution	Estimation of integrals	Standard deviation
1	0.33406448	0.33418541	0.16790697
2	-116.03696	-115.96498	380.312991
3	1.77245385	1.77264356	0.69712003
4	1.58276497	1.44341408	1.27204833

۲-۱ روش‌های کاهش واریانس

فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه تصادفی از یک توزیع خاص باشد. یک تحلیلگر شبیه‌سازی می‌خواهد Θ را به عنوان مقدار مورد انتظار یک متغیر تصادفی مانند X که مقدار واقعی آن مشخص است محاسبه کند، به طوری که $\Theta = \mathbb{E}[g(X)]$. الگوریتم مبتنی بر نمونه‌گیری برای محاسبه Θ شامل n شبیه‌سازی از متغیرهای هم‌توزیع و مستقل $X_1, \dots, X_n$ است. در این صورت برآوردگر متناظر برای Θ به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{\Theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i). \quad (۶-۱)$$

از آنجایی که $\hat{\Theta}_n$ میانگین نمونه از نمونه تصادفی $g(X_1), \dots, g(X_n)$ با امید ریاضی Θ است، بنا به قانون قوی اعداد بزرگ، هنگامی که n به سمت بی‌نهایت میل کند، آنگاه $\hat{\Theta}_n$ به Θ با احتمال یک همگرا خواهد شد، یعنی

$$\hat{\Theta}_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \Theta, \quad n \rightarrow \infty.$$

توجه کنید که اگر σ انحراف معیار هر نمونه تصادفی باشد، آنگاه خطای آماری روش شبیه‌سازی مونت-کارلو در مسئله (۶-۱) برابر $\sigma/\sqrt{n}$ و مستقل از بعد مسئله است. برای کاهش خطای شبیه‌سازی، دو راه پیش رو داریم: تعداد شبیه‌سازی‌های n را افزایش دهیم و یا انحراف معیار σ را کاهش دهیم. از آنجایی که افزایش تعداد نمونه‌ها، یعنی افزایش n ، هزینه زمانی و محاسباتی بالایی را به همراه دارد، استفاده از روش دوم و به کار گرفتن روش‌های کاهش واریانس، هم‌زمان با افزایش حجم نمونه، دقت روش شبیه‌سازی مونت-کارلو را افزایش خواهد داد.

در بخش بعدی به روش های کاهش واریانس از جمله روش های متغیرهای متضاد، متغیرهای متضاد تعمیم یافته، متغیر کنترلی و نمونه گیری نقاط مهم خواهیم پرداخت.

۱-۲-۱ روش متغیرهای متضاد

فرض کنید X متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ روی دامنه D باشد. قرار دهید $\Theta = \mathbb{E}[X]$. در این صورت با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو، هر یک از برآوردهای زیر، یک برآوردهای نارایب برای Θ هستند

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{X}_i, \quad (7-1)$$

که در آن $X_1, \dots, X_n$ و $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$ دو نمونه تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ هستند، با این شرط که برای هر $i, j = 1, \dots, n$ داریم

$$\begin{cases} Cov[X_i, \hat{X}_i] < 0, & \forall i, \\ Cov[X_i, \hat{X}_j] = 0, & \forall i \neq j, \\ Cov[X_i, X_j] = 0, & \forall i \neq j, \\ Cov[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0, & \forall i \neq j. \end{cases} \quad (8-1)$$

قضیه ۱-۱. برآوردهای $\hat{\Theta}^{AV}$ را به صورت زیر تعریف کنیم

$$\hat{\Theta}^{AV} = \frac{\hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2}{2}, \quad (9-1)$$

آنگاه $\hat{\Theta}^{AV}$ یک برآوردهای نارایب برای Θ است و $Cov[\hat{\Theta}^{AV}] < Cov[\hat{\Theta}]$ ، که در آن $\hat{\Theta}_1$ و $\hat{\Theta}_2$ برآوردهای تعریف شده در رابطه (۷-۱) هستند.

اثبات. برای اینکه ثابت کنیم $\hat{\Theta}^{AV}$ یک برآوردهای نارایب برای Θ است، کافیت نشان دهیم $\mathbb{E}[\hat{\Theta}^{AV}] = \Theta$

از آنجایی که $\hat{\Theta}_1$ و $\hat{\Theta}_2$ برآوردهای نارایب برای Θ هستند، به سادگی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\Theta}^{AV}] &= \mathbb{E}\left[\frac{\hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[\hat{\Theta}_1] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\hat{\Theta}_2] = \frac{1}{2}\Theta + \frac{1}{2}\Theta = \Theta. \end{aligned}$$

برای اینکه نشان دهیم برآوردگر $\hat{\Theta}^{AV}$ نسبت به برآوردگر مونت-کارلو، یعنی $\hat{\Theta}$ واریانس کمتری دارد، به صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\begin{aligned} V[\hat{\Theta}^{AV}] &= V\left[\frac{\hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2}{2}\right] = \frac{1}{4}V[\hat{\Theta}_1 + \hat{\Theta}_2] \\ &= \frac{1}{4}V[\hat{\Theta}_1] + \frac{1}{4}V[\hat{\Theta}_2] + \frac{1}{2}\text{Cov}[\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2] \\ &= \frac{1}{4}V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] + \frac{1}{4}V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{X}_i\right] + \frac{1}{2}\text{Cov}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{X}_i\right] \end{aligned}$$

از آنجایی که دو متغیر تصادفی X_i و $\hat{X}_j$ برای $i, j = 1, \dots, n$ هم‌توزیع هستند، واریانس آن‌ها برابر است و داریم

$$\begin{aligned} V[\hat{\Theta}^{AV}] &= \frac{1}{4}V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] + \frac{1}{4n^2}\sum_{i=1}^n \text{Cov}[X_i, \hat{X}_i] \\ &< \frac{1}{4}V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] < V\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = V[\hat{\Theta}], \end{aligned}$$

□

که در آن نامساوی ماقبل آخر از شرایط (۸-۱) به‌دست آمده است.

نکته ۱-۱. فرض کنید X یک متغیر تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشد. اگر $\hat{X} := 1 - X$ ، آنگاه $\hat{X}$ متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ خواهد بود و برای هر تابع یکنوا مانند h داریم

$$\text{Cov}[h(X), h(\hat{X})] < 0.$$

نکته ۱-۲. فرض کنید X و $\hat{X}$ دو متغیر تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشند. اگر

$$Y := \rho X + \sqrt{1 - \rho^2} \hat{X}, \quad \rho \in (-1, 0),$$

آنگاه Y یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است و برای هر تابع یکنوا مانند h داریم

$$\text{Cov}[h(X), h(Y)] < 0.$$

مثال ۵-۱. با استفاده از روش متغیرهای متضاد، جواب تقریبی انتگرال های زیر را به دست آورید.

$$\begin{aligned} \text{الف)} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos(x) e^{-x} dx \\ \text{ب)} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

پاسخ الف) فرض کنید $X := (X_1, \dots, X_n)$ برداری از متغیرهای تصادفی یکنواخت پیوسته باشد، به طوری که X_i و X_j برای هر $i, j = 1, \dots, n$ مستقل از هم در بازه $(0, 1)$ توزیع شده اند. آنگاه با توجه به نکته (۱-۱)، $\hat{X} := (1 - X_1, \dots, 1 - X_n)$ برداری از متغیرهای تصادفی یکنواخت پیوسته است، به طوری که برای هر $i, j = 1, \dots, n (i \neq j)$ $\hat{X}_i$ و $\hat{X}_j$ مستقل از هم در بازه $(0, 1)$ توزیع شده اند و $Cov[X_i, \hat{X}_i] < 0$ اگر

$$Y = 3X - 1, \quad \hat{Y} = 3\hat{X} - 1.$$

آنگاه با استفاده از روش کاهش واریانس متغیرهای متضاد، برآورد انتگرال به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} \cos(x) dx &= 3 \int_0^1 e^{-(3x-1)} \cos(3x-1) dx \\ &\approx \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n e^{-Y_i} \cos(Y_i) + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\hat{Y}_i} \cos(\hat{Y}_i). \end{aligned}$$

پاسخ ب) اگر $X := (X_1, \dots, X_n)$ و $\hat{X} := (\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n)$ دو بردار از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد باشند، با این شرط که برای هر $i, j = 1, \dots, n$ X_i و $\hat{X}_j$ مستقل از هم هستند، آنگاه با توجه به نکته (۲-۱)، $Y := \rho X + \sqrt{1-\rho^2} \hat{X}$ نیز برداری از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد است، به طوری که با شرط $\rho < 0$ داریم $Cov[X_i, Y_i] < 0$. بنابراین برآورد انتگرال با استفاده از روش متغیرهای متضاد به صورت زیر خواهد بود

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{n} \sum_{i=1}^n e^{-X_i^2 + \frac{1}{2} X_i^2} + \frac{\sqrt{2\pi}}{n} \sum_{i=1}^n e^{-Y_i^2 + \frac{1}{2} Y_i^2}.$$

الگوریتم ۳.۱: برآورد انتگرال های مثال (۵-۱) با استفاده از روش متغیرهای متضاد

- ۱- نمونه تصادفی $U_1, \dots, U_n$ از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ را توسط دستور $U = rand(n, 1)$ تولید کن و سپس قرار بده $V = 1 - U$.
- ۲- قرار بده $Z = 3 * U - 1$ و $W = 3 * V - 1$.

۳- دو نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_n$ از توزیع نرمال استاندارد را به طور مستقل از هم توسط دستورات $X = randn(n, 1)$ و $Y = randn(n, 1)$ تولید کن و سپس قرار بده

$$T = -0.9 * X + \sqrt{1 - 0.9^2} * Y.$$

- برآورد انتگرال (الف) و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\begin{aligned} & 1/5 * (\text{mean}(\cos(Z) * \exp(-Z) + \cos(W) * \exp(-W))), \\ & \text{std}(1/5 * (\cos(Z) * \exp(-Z) + \cos(W) * \exp(-W))). \end{aligned}$$

- برآورد انتگرال (ب) و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\begin{aligned} & 0.5 * \sqrt{2 * \pi} * \text{mean}(\exp(-0.5 * X^2) + \exp(-0.5 * T^2)), \\ & \text{std}(0.5 * \sqrt{2 * \pi} * (\exp(-0.5 * X^2) + \exp(-0.5 * T^2))). \end{aligned}$$

در جدول (۲-۱) جواب دقیق این انتگرال‌ها به همراه مقادیر تقریبی به دست آمده از روش‌های مونت-کارلو و متغیرهای متضاد به همراه انحراف معیار برآوردگرها با $n = 10^7$ شبیه‌سازی، درج شده است.

جدول ۲-۱: مقایسه جواب دقیق و برآورد انتگرال‌ها در مثال (۵-۱) توسط روش‌های مونت-کارلو و متغیرهای متضاد به همراه انحراف معیار برآوردگرها.

Example	Value		Standard deviation	
	1	2	1	2
Exact	1.8773	1.7724	--	--
Naive	1.9680	1.7722	1.7385	0.6970
Antithetic variate	1.9678	1.7723	0.8692	0.5307

۲-۲-۱ روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته

در روش متغیرهای متضاد، دو متغیر همبسته در هر نمونه‌گیری در نظر گرفته می‌شود. در روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته، تعداد متغیرهای متضاد را به $K < \infty$ متغیر متضاد تعمیم می‌دهیم. فرض کنید X متغیر تصادفی با تابع چگالی $f(x)$ روی دامنه D باشد. اگر $\Theta = \mathbb{E}[X]$ ، آنگاه

با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو هریک از برآوردهای زیر یک برآوردهای ناریب برای Θ هستند

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(1)}, \hat{\Theta}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(2)}, \dots, \hat{\Theta}_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{(K)},$$

که در آن $(X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}), \dots, (X_1^{(K)}, \dots, X_n^{(K)})$ بردارهای تصادفی از توزیع یکسان هستند. بعلاوه برای هر $k, k' \in \{1, 2, \dots, K\}$ و $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ داریم

$$Cov[X_i^{(k)}, X_j^{(k')}] \begin{cases} < 0 & \forall i = j, k \neq k', \\ = 0 & \forall i \neq j, k \neq k', \\ = 0 & \forall i \neq j, k = k', \end{cases} \quad (10-1)$$

حال برآوردهای Θ^{KAV} را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\hat{\Theta}^{KAV} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\Theta}_k. \quad (11-1)$$

برای $K = 1$ ، برآوردهای $\hat{\Theta}^{KAV}$ به برآوردهای مونت-کارلو استاندارد و برای $K = 2$ به برآوردهای متغیرهای متضاد تبدیل خواهد شد.

قضیه ۱-۲. برآوردهای $\hat{\Theta}^{KAV}$ تعریف شده در عبارت (۱۱-۱)، یک برآوردهای ناریب برای Θ است و همچنین $V[\hat{\Theta}^{(K+1)AV}] < V[\hat{\Theta}^{KAV}]$.

اثبات. با توجه به اینکه برای هر $i = 1, \dots, n$ و $k = 1, \dots, K$ متغیر تصادفی $X_i^{(k)}$ هم توزیع با متغیر تصادفی X است، بنا به تعریف امید ریاضی داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\Theta}^{KAV}] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \hat{\Theta}_k\right] = \frac{1}{Kn} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n X_i^{(k)}\right] \\ &= \frac{1}{Kn} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^{(k)}] = \mathbb{E}[X] = \Theta. \end{aligned}$$

برای اثبات کاهش واریانس برآوردگر جدید، توجه کنید که متغیرهای تصادفی $X_i^{(k)}$ به ازای هر $i = 1, \dots, n$ و $k = 1, \dots, K$ هم‌توزیع هستند. بنابراین $V[X_i^{(k)}] = V[X_1^{(1)}]$ و خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V[\hat{\Theta}^{KAV}] &= V\left[\frac{1}{nK} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^n X_i^{(k)}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^2 K^2} \left[\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n V[X_i^{(k)}]\right) + \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell \right] \\ &= \frac{1}{n^2 K^2} \left[\left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n V[X_1^{(1)}]\right) + \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell \right] \\ &= \frac{1}{n^2 K^2} \left[nK V[X_1^{(1)}] + \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell \right], \end{aligned} \quad (12-1)$$

که در آن $\alpha_\ell = 2 \sum_{k=1}^\ell \sum_{i=1}^n Cov[X_i^{(k)}, X_i^{(k+1)}]$ همچنین از رابطه (۱۲-۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} &(Kn(K+1))^2 \left(V[\hat{\Theta}^{(K+1)AV}] - V[\hat{\Theta}^{KAV}] \right) \\ &= K^2 n^2 (K+1)^2 \left(\frac{1}{n(K+1)} V[X_1^{(1)}] + \frac{1}{n^2 (K+1)^2} \sum_{\ell=1}^K \alpha_\ell \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{nK} V[X_1^{(1)}] - \frac{1}{n^2 K^2} \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell \right) \\ &= K^2 n^2 (K+1)^2 \left(\frac{-V[X_1^{(1)}]}{nK(K+1)} + \frac{K^2 \sum_{\ell=1}^K \alpha_\ell - (K+1)^2 \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell}{n^2 K^2 (K+1)^2} \right) \\ &= -Kn(K+1)V[X_1^{(1)}] + K^2 \sum_{\ell=1}^K \alpha_\ell - K^2 \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell - (2K+1) \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell \\ &= -Kn(K+1)V[X_1^{(1)}] + K^2 \alpha_K - (2K+1) \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell. \end{aligned} \quad (13-1)$$

(۱۴-۱)

از طرفی داریم

$$\alpha_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^n Cov[X_i^{(k)}, X_i^{(k+1)}] = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{i=1}^n Corr[X_i^{(k)}, X_i^{(k+1)}] V[X_1^{(1)}].$$

از آنجایی که $-1 < Corr[X_i^{(k)}, X_i^{(k+1)}] < 1$ ، نتیجه می شود

$$-\ell \ln(V[X_1^{(1)}]) < \alpha_\ell < \ell \ln(V[X_1^{(1)}]).$$

با توجه به رابطه (۱۳-۱) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & (Kn(K+1))^2 \left(V[\hat{\Theta}^{(K+1)AV}] - V[\hat{\Theta}^{KAV}] \right) \\ &= -Kn(K+1)V[X_1^{(1)}] + K^2 \alpha_K - (2K+1) \sum_{\ell=1}^{K-1} \alpha_\ell \\ &< -Kn(K+1)V[X_1^{(1)}] + K^2 (2Kn(V[X_1^{(1)}]) \\ &\quad - 2n(2K+1)V[X_1^{(1)}] \sum_{\ell=1}^{K-1} \ell) \\ &= -Kn(K+1)V[X_1^{(1)}] + 2K^2 (Kn(V[X_1^{(1)}]) \\ &\quad - n(2K+1)K(K-1)V[X_1^{(1)}]) = 0. \end{aligned}$$

□

در نتیجه $V[\hat{\Theta}^{(K+1)AV}] < V[\hat{\Theta}^{KAV}]$.

مثال ۱-۶. انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} x^\ell e^{-2x^2} dx$ را با استفاده از روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته محاسبه کنید.

پاسخ. فرض کنید $(X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}), \dots, (X_1^{(K)}, \dots, X_n^{(K)})$ بردارهای تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشند، به طوری که در شرط (۱۰-۱) صدق می کنند. آنگاه با فرض اینکه X متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، داریم

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^\ell e^{-2x^2} dx &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^\ell e^{-2x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \right) e^{\frac{1}{2}x^2} dx \\ &= \sqrt{2\pi} \mathbb{E}[X^\ell e^{-2X^2} e^{\frac{1}{2}X^2}] \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi}}{nK} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^n (X_i^{(k)})^\ell \exp \left\{ -\frac{3}{2} (X_i^{(k)})^2 \right\}, \end{aligned}$$

که در آن K نشان‌دهنده تعداد متغیرهای متضاد و n بیانگر تعداد شبیه‌سازی است.

الگوریتم ۴.۱: برآورد انتگرال‌های مثال (۶-۱) با استفاده از روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته

۱- بر اساس شرط $(10-1)$ ، ماتریس $X_{n \times K}$ که هر ستون آن یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع نرمال استاندارد است را تولید کن.

۲- برای $k = 1, \dots, K$ دستورات زیر را انجام بده

- ستون k ام ماتریس X را در Y قرار بده.

- قرار بده $Z(k) = \text{mean}(Y \cdot \exp(-1.5 * Y \cdot Y))$.

۳- برآورد انتگرال و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\begin{aligned} & \text{sqrt}(2 * \pi) * \text{mean}(Z), \\ & \text{std}(\text{sqrt}(2 * \pi) * Z). \end{aligned}$$

⊙ برای تولید K متغیر تصادفی نرمال استاندارد که ضریب همبستگی بین آن‌ها منفی است، ابتدا

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1K} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{K1} & \rho_{K2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ماتریس متقارن و نیمه معین مثبت}$$

و $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ که

$\rho_{ij} \in (-1, 0)$ $(i \neq j \in \{1, 2, \dots, K\})$ را در نظر می‌گیریم. توسط تجزیه چولسکی^۱ ماتریس A را چنان به‌دست می‌آوریم که $A^T A = \Sigma$. قرار می‌دهیم $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_K)$ که در آن Z_i ها متغیرهای تصادفی مستقل از هم نرمال استاندارد هستند. در این صورت $Y = A^T Z \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ به عبارت دیگر، Y متشکل از K متغیر تصادفی نرمال استاندارد است، که برای هر $j \neq i$ ضریب همبستگی بین Y_j و Y_i برابر ρ_{ij} و $\text{Cov}[Y_i, Y_j] = \Sigma_{ij} < 0$ است.

¹Choleskey

جدول ۳-۱: مقایسه جواب دقیق و برآورد انتگرال در مثال (۶-۱) توسط روش های مونت-کارلو، متغیرهای متضاد و متغیرهای متضاد تعمیم یافته به همراه انحراف معیار برآوردگرها.

Method	Value	Standard deviation
Exact	0.2937	—
Naive ($K = 1$)	0.2963	0.3514
Antithetic variate ($K = 2$)	0.2909	0.2528
Generalized antithetic variate ($K = 4$)	0.2951	0.17778
Generalized antithetic variate ($K = 8$)	0.2939	0.1250
Generalized antithetic variate ($K = 16$)	0.2923	0.0868
Generalized antithetic variate ($K = 32$)	0.2941	0.0621
Generalized antithetic variate ($K = 64$)	0.2937	0.0443

در جدول (۳-۱)، جواب دقیق انتگرال مثال (۶-۱)، مقدار برآورد شده آن توسط روش های مونت-کارلو ($K = 1$)، متغیرهای متضاد ($K = 2$) و متغیرهای متضاد تعمیم یافته ($K \geq 3$) به همراه انحراف معیار برآوردگرها با $n = 10^4$ شبیه سازی درج شده است. همان طور که مشاهده می شود به ازای $K = 64$ ، برآورد به دست آمده برابر جواب دقیق است.

۳-۲-۱ روش متغیر کنترلی

فرض کنید X و $\hat{X}$ دو متغیر تصادفی باشند، به طوری که امید ریاضی $\hat{X}$ معلوم است. می خواهیم مقدار $\Theta := \mathbb{E}[X]$ را برآورد کنیم، بدین منظور ابتدا متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Y = X - c(\hat{X} - \mu), \quad (15-1)$$

که در آن c یک مقدار ثابت و $\mu := \mathbb{E}[\hat{X}]$ یک مقدار معلوم است. همچنین $\hat{X}$ به عنوان متغیر کنترلی شناخته می شود. مقدار c در عبارت (۱۵-۱) را چنان به دست می آوریم که $V[Y]$ مینیمم شود. از طرفی داریم

$$V[Y] = V[X] + c^2 V[\hat{X}] - 2c \text{Cov}[X, \hat{X}].$$

برای به‌دست آوردن اکستریم $V[Y]$ ، کافیت از سمت راست عبارت فوق نسبت به c مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار دهیم، یعنی

$$2c V[\hat{X}] - 2Cov[X, \hat{X}] = 0.$$

در نتیجه مقدار اکستریم عبارت است از

$$c^* = \frac{Cov[X, \hat{X}]}{V[\hat{X}]} \quad (۱۶-۱)$$

از آنجایی که مشتق دوم در نقطه c^* مثبت است پس c^* نقطه مینیمم $V[Y]$ است. حال برآوردگر متغیر کنترلی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{\Theta}^{CV} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - c^*(\hat{X}_i - \mu)], \quad (۱۷-۱)$$

که در آن $X_1, \dots, X_n$ و $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$ دو نمونه تصادفی هستند که توزیع آن‌ها لزوماً یکسان نیست.

قضیه ۱-۳. برآوردگر متغیر کنترلی تعریف شده در عبارت (۱۷-۱) یک برآوردگر نااریب است و همچنین $V[\hat{\Theta}^{CV}] < V[\hat{\Theta}]$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\hat{\Theta}^{CV}$ یک برآوردگر نااریب برای Θ است. داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\Theta}^{CV}] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\mathbb{E}[X_i] - c^*(\mathbb{E}[\hat{X}_i] - \mu)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\mathbb{E}[X] - c^*(\mathbb{E}[\hat{X}] - \mu)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X] = \Theta. \end{aligned}$$

برای اثبات کاهش واریانس داریم

$$\begin{aligned}
 V[\hat{\theta}^{CV}] &= V\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - c^*(\hat{X}_i - \mu)]\right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n [V[X_i] + c^{*2} V[\hat{X}_i] - 2c^* Cov[X_i, \hat{X}_i]] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[V[X_i] + \left(\frac{Cov[X_i, \hat{X}_i]}{V[\hat{X}_i]} \right)^2 V[\hat{X}_i] \right. \\
 &\quad \left. - 2 \left(\frac{Cov[X_i, \hat{X}_i]}{V[\hat{X}_i]} \right) Cov[X_i, \hat{X}_i] \right] \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \left[V[X_i] - \left(\frac{Cov^2[X_i, \hat{X}_i]}{V[\hat{X}_i]} \right) \right] \\
 &< \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V[X_i] = V\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = V[\hat{\theta}].
 \end{aligned}$$

□

مثال ۷-۱. با استفاده از روش متغیر کنترلی، انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz$ را محاسبه کنید.

پاسخ. با توجه به اینکه کران انتگرال از $-\infty$ تا $+\infty$ است، انتگرال را بر اساس امید ریاضی یک تابع از متغیر تصادفی نرمال استاندارد می نویسیم. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{\frac{1}{2}z^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \right) dz \\
 &= \mathbb{E}[\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z^2}],
 \end{aligned}$$

که در آن Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. قرار دهید $X := \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z^2}$ و متغیر کنترلی را به صورت $\hat{X} = e^{-Z^2}$ در نظر بگیرید. آنگاه خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 \mu := \mathbb{E}[\hat{X}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{3}{2}z^2} dz \approx 0.5773.
 \end{aligned}$$

بنابراین برآوردگر متغیر کنترلی $\hat{\Theta}^{CV}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}^{CV} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [X_i - c^*(\hat{X}_i - \mu)] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z_i^2} - c^*(e^{-Z_i^2} - 0.5773)],\end{aligned}$$

که در آن $Z_1, \dots, Z_n$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد است. همچنین c^* ثابتی است که به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned}c^* &= \frac{Cov[X, \hat{X}]}{V[\hat{X}]} = \frac{\mathbb{E}[\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \times e^{-Z^2}] - \mathbb{E}[\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z^2}] \times \mathbb{E}[e^{-Z^2}]}{\mathbb{E}[e^{-2Z^2}] - (\mathbb{E}[e^{-Z^2}])^2} \\ &\approx \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z_i^2} \times e^{-Z_i^2}] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}Z_i^2}] \times \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e^{-Z_i^2}]}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e^{-2Z_i^2}] - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [e^{-Z_i^2}]\right)^2}.\end{aligned}$$

در جدول (۴-۱) جواب دقیق انتگرال ارائه شده در مثال (۷-۱)، مقدار برآورد شده آن توسط روش‌های مونت-کارلو ($K = 1$)، متغیرهای متضاد ($K = 2$)، متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته ($K \geq 3$) و متغیر کنترلی به همراه انحراف معیار برآوردها با $n = 10^3$ تعداد شبیه‌سازی گزارش شده است.

جدول ۴-۱: مقایسه جواب دقیق و برآورد انتگرال در مثال (۷-۱) توسط روش‌های مونت-کارلو، متغیرهای متضاد، متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته و متغیر کنترلی به همراه انحراف معیار برآوردها.

Method	Value	Standard deviation
Exact	1.2534	—
Naive ($K = 1$)	1.2460	0.9078
Antithetic variate ($K = 2$)	1.2725	0.6344
Generalized antithetic variate ($K = 8192$)	1.2534	0.0095
Control variate	1.2540	0.1242

الگوریتم ۵.۱: برآورد انتگرال مثال (۷-۱) با استفاده از روش متغیر کنترلی

۱- نمونه تصادفی $X_1, \dots, X_n$ از توزیع نرمال استاندارد را توسط $X = randn(n, 1)$ تولید کن.

$$Y = \sqrt{2 * \pi} * \exp(-1/5 * X.^2), \quad \text{۲- قرار بده}$$

$$Z = \exp(-X.^2),$$

$$c1 = (\text{mean}(Y * Z) - \text{mean}(Y) * \text{mean}(Z)),$$

$$c2 = (\text{mean}(Z.^2) - \text{mean}(Z)^2),$$

۳- برآورد انتگرال و انحراف معیار آن را به ترتیب به صورت زیر تولید کن

$$\text{mean}(Y - (c1/c2) * (Z - 0.5773)),$$

$$\text{std}(Y - (c1/c2) * (Z - 0.5773)).$$

۴-۲-۱ روش نمونه گیری نقاط مهم

از آنجایی که در روش شبیه سازی مونت-کارلو استاندارد، عمل نمونه گیری بر روی کل دامنه متغیر تصادفی انجام می شود، این روش به تعداد نقاط نمونه ای زیادی نیاز دارد. روش های مختلفی برای کاهش تعداد نقاط نمونه ارائه شده اند. در واقع با استفاده از این روش ها، واریانس برآوردگر به دست آمده تا حدود زیادی کاهش می یابد. روش نمونه گیری نقاط مهم به عنوان یکی دیگر از روش های کاهش واریانس در حل مسائل مختلف مورد استفاده قرار می گیرد. تابع چگالی در این روش با جمع آوری اطلاعات در طول روند نمونه گیری به گونه ای به دست می آید، که نمونه گیری به سمت نواحی نقاط مهم سوق داده شود. به عبارتی دیگر فرایند نمونه گیری نقاط مهم با تمرکز روی نواحی مهم، منجر به همگرایی سریع تر در احتمال می گردد.

برای تشریح این روش، محاسبه انتگرال چندگانه زیر را در نظر می گیریم

$$\Theta = \int_{\mathbb{R}^n} h(x) f(x) dx,$$

که در آن $f(x)$ تابع چگالی احتمال چند متغیره و $h(x)$ تابع پیوسته دلخواه است که انتگرال آن نیز وجود دارد. در این صورت می توان نوشت

$$\Theta = \mathbb{E}_f[h(X)]. \quad (18-1)$$

که در آن $\mathbb{E}_f[\cdot]$ امید ریاضی نسبت به تابع چگالی f است. فرض کنید $g(x)$ تابع چگالی دیگر باشد، به‌طوری که $\text{support}(hf) \subset \text{support}(g)$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_{X \in \text{support}(g)} \frac{h(x)f(x)}{g(x)} g(x) dx \\ &= \mathbb{E}_g \left[\frac{h(X)f(X)}{g(X)} \right].\end{aligned}\quad (۱۹-۱)$$

با استفاده از رابطه (۱۸-۱)، یک برآوردگر نارایب برای Θ به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(X_i),$$

که در آن $X_1, \dots, X_n$ به طور یکسان و مستقل از هم با چگالی f توزیع شده‌اند. با توجه به رابطه (۱۹-۱)، برآوردگر نارایب جایگزین را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{h(X_i)f(X_i)}{g(X_i)},$$

به‌طوری که متغیرها با تابع چگالی g توزیع می‌شوند. آنگاه واریانس این برآوردگر به صورت زیر خواهد بود

$$V[\hat{\Theta}] = \frac{1}{n} V \left[\frac{h(X)f(X)}{g(X)} \right].$$

واضح است که اگر برای هر $x \in \text{support}(hf)$ ، $h(x) > 0$ باشد و $g(x)$ را متناسب با $h(x)f(x)$ اختیار کنیم، آنگاه $h(x)f(x)/g(x)$ یک ثابت خواهد بود و $V[\hat{\Theta}] = 0$. در نتیجه خواهیم داشت

$$g(x) = \frac{h(x)f(x)}{\int_{u \in \text{support}(hf)} h(u)f(u)du}.\quad (۲۰-۱)$$

مخرج کسر بالا در واقع همان Θ است و این همان چیزی است که باید پیدا کنیم. با این وجود مشاهدات نشان می‌دهد که انتخاب خوب توزیع نمونه‌گیری نقاط مهم از $g(x)$ ، همان موردی است که از نظر ظاهر به $h(x)f(x)$ شبیه است. یک انتخاب خوب، انتخابی خواهد بود که از مقادیری که

$h(x)f(x)$ بزرگ است، به طور زیاد نمونه گیری کنیم و در مواردی که $h(x)f(x)$ کوچک است، این عمل را به طور متناوب انجام دهیم.

فرض کنید انتخاب $g(x)$ فقط به اعضای خانواده ای از توزیع های $\{g(x, \alpha)\}$ محدود شود که روی α پارامتر بندی شده اند. بنابراین تابع زیر را نسبت به α به حداقل می رسانیم

$$\begin{aligned} V \left[\frac{h(X)f(X)}{g(X, \alpha)} \right] &= \mathbb{E} \left[\left(\frac{h(X)f(X)}{g(X, \alpha)} \right)^2 \right] - \Theta^2 \\ &= \int_{x \in \text{support}(g)} \frac{h^2(x)f^2(x)}{g(x, \alpha)} dx - \Theta^2. \end{aligned} \quad (21-1)$$

توجه کنید که برای هر $x \in \text{support}(hf)$ اگر $h(x) > 0$ باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} &\int_{x \in \text{support}(g)} \frac{h^2(x)f^2(x)}{g(x, \alpha)} dx \\ &< \max_{x \in \text{support}(g)} \left\{ \frac{h(x)f(x)}{g(x, \alpha)} \right\} \int_{x \in \text{support}(g)} h(x)f(x) dx. \end{aligned}$$

در نتیجه کران بالا واریانس به صورت زیر خواهد بود

$$V \left[\frac{h(x)f(x)}{g(x, \alpha)} \right] < \Theta \{M(\alpha) - \Theta\}, \quad (22-1)$$

که در آن

$$M(\alpha) = \max_{x \in \text{support}(g)} \left\{ \frac{h(x)f(x)}{g(x, \alpha)} \right\}. \quad (23-1)$$

هنگامی که $M(\alpha)$ نسبت به α مینیمم شود، این کران بالا به حداقل می رسد. از طرفی چگالی g برای تولید متغیرهایی است که از تابع چگالی احتمال متناسب با hf تولید می شود. اگرچه بعید به نظر می رسد که g بهترین چگالی نمونه گیری نقاط مهم باشد، اما مشاهدات نشان می دهد که g با هدفی غیر از کاهش واریانس، تناسب خوبی با hf دارد.

مثال ۸-۱. با استفاده از روش نمونه گیری نقاط مهم، انتگرال زیر را برآورد کنید

$$\Theta = \int_a^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad (24-1)$$

که در آن $\alpha > 1$ و $a > 0$.

پاسخ. با توجه به اینکه e^{-x} تابع چگالی نمایی با پارامتر ۱ است، داریم

$$\Theta = \int_a^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \mathbb{E}[X^{\alpha-1} \mathbf{I}_{X>a}], \quad (۲۵-۱)$$

که در آن $\mathbf{I}_{X>a} = \begin{cases} 1 & \text{if } X > a, \\ 0 & \text{if } X \leq a \end{cases}$ بنابراین با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو، Θ را به صورت زیر می‌توان برآورد نمود

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^{\alpha-1} \mathbf{I}_{X_i>a},$$

که در آن $X_1, \dots, X_n$ دارای توزیع نمایی با پارامتر ۱ هستند که به طور مستقل از هم توزیع شده‌اند. حال تابع چگالی نمونه‌گیری نقاط مهم $g(x)$ را روی دامنه $[a, \infty)$ به صورت زیر اختیار می‌کنیم

$$g(x) = \lambda e^{-\lambda(x-a)}.$$

توجه کنید که $g(x)$ همان تابع چگالی نمایی انتقال یافته با پارامتر λ است. در این صورت با توجه به رابطه (۲۵-۱) می‌توان نوشت

$$\Theta = \int_a^\infty \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\lambda e^{-\lambda(x-a)}} \lambda e^{-\lambda(x-a)} dx.$$

در نتیجه برآورد Θ با استفاده از روش نمونه‌گیری نقاط مهم به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{\Theta}^{IS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{X}_i^{\alpha-1} e^{-\hat{X}_i}}{\lambda e^{-\lambda(\hat{X}_i-a)}}$$

که در آن $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$ همگی دارای توزیع نمایی انتقال یافته با پارامتر λ هستند و به طور مستقل از هم توزیع شده‌اند. برای تولید $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_n$ از روش تبدیل وارون استفاده می‌کنیم. طبق روش تبدیل وارون، اگر X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی $F_X(x)$ و U متغیر تصادفی یکنواخت

پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشد، آنگاه متغیر تصادفی X را به صورت $X = F_X^{-1}(U)$ می توان تولید نمود. بر این اساس ابتدا تابع توزیع نمایی انتقال یافته را به صورت زیر محاسبه کرده و سپس آن را برابر $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ قرار می دهیم. داریم

$$G(\hat{x}) = \int_a^\infty \lambda e^{-\lambda(\hat{x}-a)} d\hat{x} = 1 - e^{-\lambda(\hat{X}-a)}.$$

بنابراین

$$1 - e^{-\lambda(\hat{X}-a)} = U \longrightarrow \hat{X} = a - \frac{1}{\lambda} \ln U.$$

حال λ را طوری می یابیم که $V[\hat{\Theta}^{IS}]$ مینیمم شود. برای این منظور با توجه به عبارات (۲۲-۱) و (۲۳-۱) کفایت که مسئله زیر را حل کنیم

$$\min_{0 < \lambda < 1} \max_{x > a} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\lambda e^{-\lambda(x-a)}}. \quad (26-1)$$

از طرفی λ باید کوچکتر از ۱ باشد، زیرا در غیر این صورت ماکسیمم داخلی نامتناهی خواهد شد. فرض کنید (x^*, λ^*) نقطه بهینه مسئله (۲۶-۱) باشد، در این صورت با مشتق گیری از عبارت $\frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\lambda e^{-\lambda(x-a)}}$ نسبت به x و λ و برابر صفر قرار دادن آن ها به ترتیب داریم

$$\frac{\alpha - 1}{x^*} - 1 + \lambda^* = 0, \quad (27-1)$$

$$-\frac{1}{\lambda^*} + x^* - a = 0 \longrightarrow x^* = a + \frac{1}{\lambda^*}. \quad (28-1)$$

با جایگذاری معادله (۲۸-۱) در عبارت (۲۷-۱)، مقدار بهینه λ که واریانس Θ^{IS} را مینیمم می کند به صورت زیر بیان می شود

$$\lambda^* = \frac{a - \alpha + \sqrt{(a - \alpha)^2 + 4a}}{2a}.$$

در نتیجه برآورد انتگرال (۲۴-۱) با استفاده از روش نمونه گیری نقاط مهم به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{\Theta}^{IS} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\hat{X}_i^{\alpha-1} e^{-\hat{X}_i}}{\lambda^* e^{-\lambda^*(\hat{X}_i-a)}},$$

که در آن برای هر $i = 1, \dots, n$ داریم

$$\hat{X}_i = a - \frac{1}{\lambda^*} \ln U_i, \quad U_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{U}(0, 1).$$

الگوریتم ۶.۱: برآورد انتگرال مثال (۸-۱) با استفاده از روش نمونه‌گیری نقاط مهم

- ۱- برای $i = 1, \dots, n$ مراحل ۲ تا ۴ را انجام بده.
- ۲- متغیر تصادفی Z از توزیع نمایی با پارامتر ۱ را توسط دستور $exprnd(1)$ تولید کن.
- ۳- اگر $Z > a$ ، آنگاه قرار بده $X(i) = Z$. در غیر این صورت به گام ۴ برو.
- ۴- قرار بده $X(i) = 0$.
- ۵- قرار بده $Y = X \cdot (alpha - 1)$.
- (روش شبیه‌سازی مونت-کارلو) برآورد انتگرال و انحراف معیار آن را به ترتیب توسط دستورات $mean(Y)$ و $std(Y)$ محاسبه کن.
- ۶- قرار بده $L = (a - alpha + \sqrt{(a - alpha) \wedge 2 + 4 * a})) / (2 * a)$.
- ۷- قرار بده $T = a - 1/L * \log(rand(n, 1))$.
- ۸- قرار بده $Z = (T \cdot (\alpha - 1) * \exp(-T)) / (L * \exp(-L * (T - a)))$.
- (روش نمونه‌گیری نقاط مهم) برآورد انتگرال و انحراف معیار آن را به ترتیب توسط دستورات $mean(Z)$ و $std(Z)$ محاسبه کن.

در جدول (۵-۱) یک مقایسه بین جواب دقیق انتگرال (۲۴-۱)، روش‌های مونت-کارلو و نمونه‌گیری نقاط مهم به همراه $a = 5$ ، $\alpha = 3$ و $n = 10^4$ انجام شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش نمونه‌گیری نقاط مهم با تابع چگالی انتقال یافته نمایی روی دامنه $[a, \infty)$ ، که به عنوان تابع چگالی نمونه‌گیری نقاط مهم در نظر گرفته می‌شود، از کاهش واریانس بالایی برخوردار است. توجه کنید که علت این موضوع نمونه‌گیری از ناحیه نقاط مهم $[a, \infty)$ است.

جدول ۵-۱: مقایسه جواب دقیق و برآورد انتگرال در مثال (۸-۱) توسط روش‌های مونت-کارلو و نمونه‌گیری نقاط مهم به همراه انحراف معیار برآوردگرها.

Method	Value	Standard deviation
Exact	0.2493	--
Monte-Carlo	0.2539	3.2658
Importance Sampling	0.2494	0.0163

۳-۱ تمرینات فصل اول

۱- فرض کنید $U_1, \dots, U_n$ نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ باشد. اگر تعریف کنیم

$$N = \min \left\{ n \mid \sum_{i=1}^n U_i > 1 \right\},$$

آنگاه مقدار مورد انتظار N را با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو با 10^2 ، 10^4 و 10^6 تعداد شبیه‌سازی به‌دست آورید.

۲- مقدار انتگرال‌های زیر را با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو برآورد کنید

$$\text{الف) } \int_{-2}^6 \int_0^{\infty} (yx)^2 e^{-x+y} dx dy$$

$$\text{ب) } \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{x} \cos(2xy) dx dy$$

$$\text{ج) } \int_{-\infty}^{-6} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \left[x^2 + (y-1)^2 - \frac{z(y-1)}{10} \right] \right\} dx dy dz$$

۳- هر یک از انتگرال‌های تمرین ۲ را با استفاده از کاهش واریانس متغیرهای متضاد، متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته با ۴ متغیر متضاد و متغیر کنترلی به‌دست آورده و کارایی هر یک از برآوردگرها را با هم مقایسه کنید.

۴- با استفاده از روش متغیرهای متضاد و نمونه‌گیری نقاط مهم، مقدار انتگرال $\int_8^{\infty} x^3 e^{-2x} dx$ را برآورد کنید و کارایی هر یک را با روش مونت-کارلو استاندارد مقایسه کنید.

۵- دو نقطه به طور تصادفی در مربعی که طول آن ۲ و مرکز آن مبدأ مختصات است انتخاب شده‌اند. اگر D فاصله بین دو نقطه باشد، مقدار مورد انتظار D و واریانس آن را با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو محاسبه کنید.

۶- با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو انتگرال $\int \cdots \int_D \left[\sum_{j=1}^m (m-j+1)^2 x_j \right] dx$ را برآورد کنید، که در آن $D = \{x_j : j = 1, \dots, m; 0 < x_1 < \dots < x_m < 1\}$ و m عدد صحیح مثبت است.

سپس برای $m = 1000$ نقطه در D شبیه‌سازی کنید و بر اساس آن یک بازه اطمینان 95% درصد برای انتگرال بیابید (بازه اطمینان 95% درصد را می‌توان از رابطه $[\bar{x} - 1/96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1/96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ به‌دست آورد، که در آن $\bar{x}$ میانگین نمونه، σ انحراف معیار نمونه و n تعداد اعضای نمونه است).

۷- انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\Theta = \int_b^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad \alpha \leq 1, \quad 0 < b,$$

و تابع چگالی نمونه‌گیری نقاط مهم را به صورت $g(x) = e^{-(x-b)} \mathbf{I}_{x>b}$ تعریف کنید. فرض کنید R متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ و $X = b - \ln R$ باشد. نشان دهید برآوردگر $\hat{\Theta} = X^{\alpha-1} e^{-b}$ یک برآوردگر ناریب است و $V[\hat{\Theta}] < \Theta(b^{\alpha-1} e^{-b} - \Theta)$.

۸- فرض کنید مدت زمان انجام پروژه ساختمانی یک متغیر تصادفی $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ باشد، به‌طوری‌که μ و σ اعداد تصادفی مستقل هستند و به ترتیب از توزیع‌های $\mathcal{N}(100, 16)$ و $\mathcal{N}(100, 16)$ و نمایی با پارامتر 4 پیروی می‌کنند. شرکتی که پروژه را انجام می‌دهد باید 1000 دلار برای هر روز که مدت پروژه از K روز بیشتر می‌شود بپردازد. هزینه مورد انتظار را توسط روش شبیه‌سازی مونت-کارلو برآورد کنید.

فصل ۲

مقدمه‌ای بر مدل‌های مالی

مدل‌سازی مالی وظیفه ایجاد یک نمایش انتزاعی (یک مدل) از وضعیت مالی دنیای واقعی است. زبان مدل‌سازی بازارهای مالی شامل نظریه احتمال است که به نوبه خود نظریه اندازه را نیز شامل می‌شود. به عنوان یک مثال ساده، فرض کنید $S(t_0)$ قیمت سهام در لحظه t_0 و $X(\Delta t) = \frac{S(\Delta t)}{S(t_0)}$ بازده سهام در بازه زمانی $\Delta t := [t_0, t_1]$ باشد، به طوری که مقدار آن با احتمال p برابر e^u و با احتمال $1 - p$ برابر e^d است ($u, d \in \mathbb{R}$). در این صورت لگاریتم بازده سهام در بازه زمانی Δt می‌تواند توسط متغیر تصادفی برنولی^۲ مدل‌سازی شود، زیرا

$$\mathbb{P}(\ln X(\Delta t) = u) = p, \quad \mathbb{P}(\ln X(\Delta t) = d) = 1 - p.$$

همچنین با استفاده از تعاریف امید ریاضی و واریانس داریم

$$\mathbb{E}[\ln \frac{S(\Delta t)}{S(t_0)}] = pu + (1 - p)d,$$

$$V[\ln X(\Delta t)] = pu^2 + (1 - p)d^2 - (\mathbb{E}[\ln X(\Delta t)])^2.$$

۱-۲ مفاهیم اولیه ریاضیات مالی

ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات است که کاربرد روش‌های ریاضی را برای مسائل مالی بیان می‌کند. به طور سنتی، بانک‌های سرمایه‌گذاری، بانک‌های تجاری، صندوق‌های تأمین، شرکت‌های بیمه،

^۲Bernoulli

خزانه داری شرکت ها و آژانس های نظارتی از روش های ریاضیات مالی برای مسائلی مانند ارزیابی سهام، اوراق بهادار مشتقه، ساختار پرتفوی و مدیریت ریسک استفاده می کنند. بر اساس نتایج تجربی به دست آمده، تجزیه و تحلیل مدل های تصادفی برای بازارهای مالی، کارایی و دقت را در فرایند سرمایه گذاری به همراه داشته است. بنابراین یکی از اهداف محققان این حوزه، پیاده سازی مدل های تصادفی برای ارزیابی بازارهای مالی است. در این بخش به برخی از مفاهیم مهم نظریه احتمال و فرایندهای تصادفی که در ادامه این کتاب مورد نیاز هستند، می پردازیم.

تعریف ۱-۲. (σ -میدان) فرض کنید Ω مجموعه ای ناتهی و $\mathcal{F}$ خانواده ای از زیرمجموعه های Ω باشد، گوئیم $\mathcal{F}$ یک σ -میدان است، هرگاه:

الف) $\Omega \in \mathcal{F}$

ب) اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$ (A^c متمم A نسبت به Ω است)،

ج) اگر $\{A_1, A_2, \dots, A_n, \dots\}$ دنباله ای از پیشامدها در $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{F}$ (این اجتماع باید شمارا باشد).

تعریف ۲-۲. (اندازه احتمال و فضای احتمال) فرض کنید Ω مجموعه ای ناتهی و $\mathcal{F}$ یک σ -میدان از زیرمجموعه های Ω باشد. تابع $\mathbb{P}$ اندازه احتمال نامیده می شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) برای هر $A \in \mathcal{F}$ ، $\mathbb{P}(A) \geq 0$.

ب) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ج) اگر $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ دنباله ای از پیشامدهای دوه دو ناسازگار در $\mathcal{F}$ باشد، آنگاه

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

در این صورت $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ را فضای احتمال می گویند.

تعریف ۳-۲. (فرایند تصادفی) یک فرایند تصادفی مانند X ، گردایه ای از متغیرهای تصادفی به صورت $\{X(t)\}_{t \in \mathcal{T}} = \{X_\omega(t), t \in \mathcal{T}, \omega \in \Omega\}$ است که روی فضای نمونه ای Ω و مجموعه اندیس گزار $\mathcal{T}$ تعریف شده اند.

تعریف ۲-۴. (مسیر یک فرایند) برای هر $\omega \in \Omega$ تابع f_ω با ضابطه $f_\omega : t \rightarrow X_\omega(t)$ را یک مسیر از فرایند تصادفی می‌گویند.

تعریف ۲-۵. فرایند تصادفی $W := \{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ را حرکت براونی^۱ استاندارد (یک-بعدی) روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ می‌گویند، اگر داشته باشیم:

$$W(0) = 0 \quad (\text{الف})$$

ب) W دارای نمونه‌های مستقل از هم است، یعنی برای هر $u \geq 0$ ، $W(t+u) - W(t)$ مستقل از $\sigma(W(s); s \leq t)$ است. منظور از $\sigma(\cdot)$ میدان تولید شده توسط $W(s)$ برای $s \leq t$ است،

ج) W دارای نمونه‌های مانا است، یعنی برای $u \geq 0$ ، $W(t+u) - W(t)$ هم‌توزیع با $W(u)$ باشد،

د) W دارای نمونه‌های گاوسی^۲ است، یعنی $W(t+u) - W(t)$ به صورت نرمال با میانگین صفر و واریانس u توزیع شده است. به عبارتی دیگر $W(t+u) - W(t) \sim \mathcal{N}(0, u)$ ،

ه) W دارای مسیرهای پیوسته است، یعنی $W(t)$ تابع پیوسته از t باشد. به عبارتی دیگر تابع $t \rightarrow W(t, \omega)$ در t برای هر $\omega \in \Omega$ پیوسته است.

تعریف ۲-۶. مجموعه $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ از σ -میدان‌های روی Ω را پالایه گویند، هرگاه برای هر $0 \leq s \leq t$ داشته باشیم

$$\mathcal{F}(s) \subset \mathcal{F}(t).$$

بنابراین پالایه یک دنباله افزایشی از اطلاعات است.

تعریف ۲-۷. فرایند تصادفی $X := \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ را سازوار با پالایه $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ گویند، هرگاه برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم

$$\sigma(Y_t) \subset \mathcal{F}(t).$$

¹Brownian

²Gaussian

مثال ۲-۱. فرض کنید $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند حرکت براونی و $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ پالایه متناظر با آن باشد. فرایند تصادفی زیر را در نظر بگیرید

$$X(t) = f(t, W(t)), \quad t \geq 0, \quad (1-2)$$

که در آن f یک تابع دو متغیره است. در این صورت فرایند $X(t)$ همواره سازوار با پالایه $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ است. فرایندهای زیر نمونه‌هایی سازوار با پالایه $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ هستند

$$X(t) = W(t), \quad X(t) = W^\vee(t), \quad X(t) = W^\vee(t) - t, \quad X(t) = W^\heartsuit(t).$$

همچنین فرایندهایی که به کل گذشته حرکت براونی بستگی دارند، سازوار با پالایه $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ هستند، مانند

$$X(t) = \max_{0 \leq s \leq t} W(s), \quad X(t) = \min_{0 \leq s \leq t} W^\vee(s).$$

تعریف ۲-۸. فرایند $X := \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ را مارتینگل گوییم، هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

$$\mathbb{E}|X(t)| < \infty \quad (\text{الف})$$

(ب) X یک فرایند تصادفی $\mathcal{F}(t)$ -سازوار باشد،

$$\mathbb{E}[X(t) | \mathcal{F}(s)] = X(s) \quad \text{ج} \quad \text{برای هر } s \leq t.$$

مثال ۲-۲. حرکت براونی یک فرایند مارتینگل است، زیرا

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(t) | \mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[(W(t) - W(s)) + W(s) | \mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s) | \mathcal{F}(s)] + \mathbb{E}[W(s) | \mathcal{F}(s)] \\ &= \mathbb{E}[W(t) - W(s)] + W(s) = W(s). \end{aligned}$$

بعلاوه شرایط (الف) و (ب) از تعریف (۲-۸) به عنوان خاصیت فرایندهای مارتینگل برای حرکت براونی همواره صادق هستند.

مثال ۲-۳. (مارتینگل نمایی) فرض کنید $W(t)$ حرکت براونی و $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ پلایه متناظر با آن باشد. با فرض اینکه σ پارامتر ثابت است، $Z(t) = \exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\}$ یک فرایند مارتینگل خواهد بود.

اثبات. شرایط (الف) و (ب) از خاصیت مارتینگل به وضوح برای فرایند تصادفی $Z(t)$ برقرار است. برای خاصیت (ج)، فرض کنید $s \leq t$ در این صورت داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(t) \mid \mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \mid \mathcal{F}(s)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma(W(t) - W(s))\right\} \cdot \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \mid \mathcal{F}(s)\right] \\ &= \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right\} \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma(W(t) - W(s))\right\} \mid \mathcal{F}(s)\right]. \quad (2-2) \end{aligned}$$

از طرفی اگر یک متغیر تصادفی دلخواه مانند $X(t)$ مستقل از پلایه $\mathcal{F}(s)$ باشد، آنگاه برای هر تابع پیوسته مانند f ، متغیر تصادفی $f(X(t))$ نیز مستقل از $\mathcal{F}(s)$ است. به عبارتی دیگر خواهیم داشت

$$\mathbb{E}[f(X(t)) \mid \mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[f(X(t))].$$

از آنجایی که $W(t) - W(s)$ مستقل از $\mathcal{F}(s)$ است، پس $\exp\{\sigma(W(t) - W(s))\}$ نیز مستقل از پلایه $\mathcal{F}(s)$ خواهد بود و داریم

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma(W(t) - W(s))\right\} \mid \mathcal{F}(s)\right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma(W(t) - W(s))\right\}\right].$$

با توجه به اینکه $W(t) - W(s)$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ است، به دست می‌آید

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\sigma(W(t) - W(s))\right\}\right] = \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma^2(t - s)\right\}.$$

در نهایت با جایگذاری رابطه فوق در عبارت (۲-۲) خواهیم داشت

$$\mathbb{E}[Z(t) \mid \mathcal{F}(s)] = \exp\left\{\sigma W(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 s\right\} = Z(s).$$

۲-۲ حسابان تصادفی

قبل از پرداختن به حسابان تصادفی، مرور حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی مفید خواهد بود. ایده اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال این است که می توان مقادیر یک تابع را با دانستن نرخ تغییر تابع به دست آورد. برای مثال فرض کنید $f(t)$ موقعیت یک ذره (یک-بعدی) را در زمان t نشان می دهد. با فرض اینکه $C(t, f(t))$ تابع نرخ است، نرخ تغییر موقعیت ذره، یعنی $df(t)$ به صورت زیر بیان می شود

$$df(t) = C(t, f(t))dt,$$

که به طور معادل می توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\frac{df(t)}{dt} = f'(t) = C(t, f(t)).$$

به عبارتی دیگر در زمان t ، نمودار f برای مدت زمان کوتاه در امتداد یک خط مستقیم با شیب $C(t, f(t))$ حرکت می کند. این مثالی از یک معادله دیفرانسیل است که در آن موقعیت ذره به مقطع زمانی بستگی دارد و اگر شرط اولیه $f(\circ)$ معلوم باشد، تابع تعریف شده به صورت زیر خواهد بود

$$f(t) = f(\circ) + \int_{\circ}^t C(x, f(x))dx.$$

رویکرد استاندارد در حساب دیفرانسیل و انتگرال این است که ابتدا از طرفین معادله دیفرانسیل برای از بین رفتن دیفرانسیل انتگرال گرفته و سپس به حل انتگرال می پردازیم. اما در حسابان تصادفی، مشتق به این راحتی قابل تعریف نیست. برای پرداختن به این موضوع ابتدا به توصیف انتگرال تصادفی می پردازیم.

فرض کنید T عدد مثبت و $W(t)$ یک حرکت براونی باشد. انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_{\circ}^t \Gamma(s) dW(s), \quad (۳-۲)$$

که در آن تابع انتگرالده $\Gamma(t)$ یک فرایند تصادفی سازوار با پالایه تولید شده توسط $W(t)$ است. دلیل ما برای انجام این کار آن است که در بخش های بعدی، $\Gamma(t)$ نقش قیمت سهام را در زمان t ایفا می کند و از آنجایی که قیمت در این لحظه معمولاً به مسیر قیمت سهام تا زمان t بستگی

دارد، $\Gamma(t)$ را یک فرایند سازوار با پالایه $\mathcal{F}(t)$ در نظر می‌گیریم. توجه کنید هر پدیده‌ای که به مسیر یک فرایند تصادفی بستگی داشته باشد، خود تصادفی است. در واقع سازوار بودن $\Gamma(t)$ به این معنی است که $\Gamma(t)$ برای هر $t \geq 0$ ، یک فرایند $\mathcal{F}(t)$ -اندازه‌پذیر باشد. به عبارتی دیگر اطلاعات موجود در زمان t برای ارزیابی $\Gamma(t)$ در آن زمان کافی است. وقتی در زمان 0 ایستاده‌ایم و $\Gamma(t)$ کاملاً مثبت است، $\Gamma(t)$ برای ما ناشناخته و از یک متغیر تصادفی پیروی می‌کند. زمانی که به لحظه t می‌رسیم، اطلاعات کافی برای ارزیابی $\Gamma(t)$ داریم و تصادفی بودن آن برطرف شده است. به یاد داریم که نمونه‌های حرکت براونی پس از زمان t مستقل از $\mathcal{F}(t)$ هستند و از آنجایی که $\Gamma(t)$ یک فرایند $\mathcal{F}(t)$ -اندازه‌پذیر است، باید مستقل از نمونه‌های آینده حرکت براونی نیز باشد. مدل‌هایی که در بخش‌های آتی برای ارزیابی قیمت دارایی (مانند سهام) در نظر می‌گیریم ممکن است به تارخچه قیمت آن دارایی بستگی داشته باشد، اما آن‌ها باید مستقل از نمونه‌های آتی حرکت براونی باشند که این قیمت‌ها را هدایت می‌کنند.

مشکلی که در مفهوم انتگرال تصادفی (۳-۲) با آن مواجه هستیم این است که مسیرهای حرکت براونی نسبت به زمان مشتق‌پذیر نیستند. اگر $g(t)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، می‌توانیم تعریف کنیم

$$\int_0^T \Gamma(s) dg(s) = \int_0^T \Gamma(s) g'(s) ds.$$

قسمت راست معادله بالا یک انتگرال معمولی نسبت به زمان است، در حالی که رابطه فوق برای $g(t) = W(t)$ برقرار نخواهد بود، زیرا حرکت براونی مشتق‌پذیر نیست.

برای تعریف انتگرال (۳-۲)، ایتو^۱ روشی را در مورد عدم مشتق‌پذیری مسیرهای حرکت براونی ابداع نمود. او برای این کار، ابتدا انتگرال ایتو را برای فرایند ساده تعریف کرد و سپس آن را به انتگرال فرایندهای غیرساده به عنوان حدی از انتگرال فرایندهای ساده تعمیم داد.

تعریف ۲-۹. فرض کنید $W(t)$ حرکت براونی و $\mathcal{F}(t)$ پالایه تولید شده توسط آن تا لحظه t باشد. فرایند تصادفی $\Gamma = \{\Gamma(t)\}_{t \in [0, T]}$ را ساده گویند، هرگاه افزاز

$$\Pi_n : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T, \quad (4-2)$$

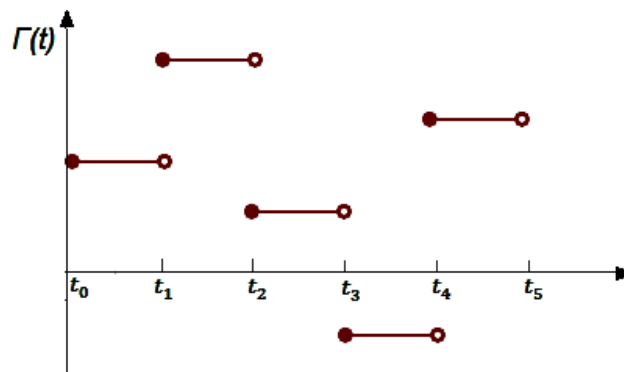
و متغیرهای تصادفی U_i برای $i = 1, \dots, n$ وجود داشته باشد، به‌طوری که

$$\Gamma(t) = \begin{cases} U_n, & \text{اگر } t = T, \\ U_i, & \text{اگر } t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

¹Ito

دنباله $U_1, \dots, U_n$ سازوار با پلایه $\mathcal{F}(t_i)$ برای $i = 1, \dots, n$ است. به عبارتی دیگر U_i یک تابع از حرکت براونی تا لحظه t_{i-1} را بیان می کند.

شکل (۱-۲) یک مسیر از فرایند ساده را نشان می دهد. با فرض اینکه Ω فضای نمونه است، مسیر نشان داده شده به $\omega \in \Omega$ بستگی خواهد داشت، همان طور که مسیر حرکت براونی $W(t)$ به آن بستگی دارد. حال اگر ω متفاوتی را انتخاب کنیم، مسیر دیگری از حرکت براونی و احتمالاً با مسیر متفاوتی از $\Gamma(t)$ رو به رو می شویم. با این حال مقدار $\Gamma(t)$ فقط می تواند به اطلاعات موجود در زمان t بستگی داشته باشد. از آنجایی که هیچ اطلاعاتی در زمان $\circ$ وجود ندارد، مقدار $\Gamma(\circ)$ باید برای همه مسیرها یکسان باشد. بنابراین اولین قطعه $\Gamma(t)$ برای $\circ \leq t < t_1$ به ω بستگی ندارد. با این وجود، مقدار $\Gamma(t)$ در بازه دوم، یعنی $[t_1, t_2]$ می تواند به مشاهدات انجام شده در اولین بازه زمانی بستگی داشته باشد.



شکل ۱-۲: یک مسیر از فرایند ساده.

در مورد اثر متقابل بین فرایند ساده $\Gamma(t)$ و حرکت براونی $W(t)$ در رابطه (۲-۳) براساس روشی که در ادامه به آن اشاره می کنیم عمل خواهیم کرد. $W(t)$ را به عنوان قیمت هر سهم یک دارایی در زمان t در نظر بگیرید. از آنجایی که حرکت براونی مقادیر منفی و همچنین مثبت را شامل می شود، نمی تواند مدل خوبی برای قیمت یک دارایی مانند سهام باشد. بنابراین آن را نادیده می گیریم. فرض کنید $t_0, t_1, \dots, t_n$ زمان معاملات دارایی و $\Gamma(t_0), \Gamma(t_1), \dots, \Gamma(t_n)$ تعداد سهم آن دارایی در هر زمان از معاملات باشد که تا تاریخ بعدی معاملات نگهداری می شود. سود یا زیان حاصل از

معامله در هر زمان t توسط روابط زیر بیان می‌شود

$$\begin{aligned} I(t) &= \Gamma(t_0) [W(t) - W(t_0)] = \Gamma(t_0) W(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \\ I(t) &= \Gamma(t_0) W(t_1) + \Gamma(t_1) [W(t) - W(t_1)], \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ I(t) &= \Gamma(t_0) W(t_1) + \Gamma(t_1) [W(t_2) - W(t_1)] + \Gamma(t_2) [W(t) - W(t_2)], \\ &\quad t_2 \leq t \leq t_3, \end{aligned}$$

و همین طور الی آخر. توجه کنید که $I(t)$ بر اساس وجود حرکت براونی می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در صورتی که $I(t)$ مثبت باشد، سرمایه‌گذار در لحظه t در سود و در غیر این صورت در زیان است. در حالت کلی، اگر $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ ، آنگاه

$$I(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \Gamma(t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] + \Gamma(t_k) [W(t) - W(t_k)]. \quad (5-2)$$

فرایند $I(t)$ در رابطه (۵-۲) انتگرال ایتو از فرایند ساده $\Gamma(t)$ است که به صورت زیر نمایش داده می‌شود

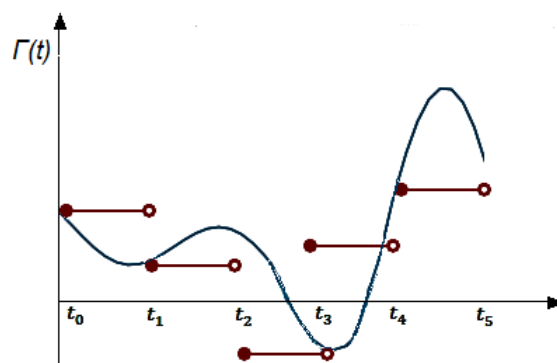
$$I(t) = \int_0^t \Gamma(s) dW(s).$$

تاکنون انتگرال ایتو را برای فرایندهای ساده بیان کردیم. در ادامه، انتگرال ایتو را برای تمام فرایندهایی که دارای مسیر پیوسته هستند تعمیم داده و نشان می‌دهیم که انتگرال‌های ایتو برای فرایندهایی با مسیر پیوسته را می‌توان توسط انتگرال‌های ایتو برای فرایندهای ساده تقریب زد. فرض کنید $\{\Delta(t)\}_{t \in [0, T]}$ یک مسیر از فرایند پیوسته و سازوار با پالایه $\mathcal{F}(t)$ باشد. به یاد داریم که در این صورت $\Delta(t)$ یک فرایند $\mathcal{F}(t)$ -اندازه‌پذیر است.

قضیه ۲-۱. اگر $\{\Gamma_n(t)\}_{t \in [0, T]}$ یک فرایند ساده با افراز (۴-۲) باشد، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^t |\Delta(s) - \Gamma_n(s)| dW(s) \right]^2 = 0. \quad (6-2)$$

ایده کار این است که وقتی طول افراز به صفر میل می‌کند (یعنی $n \rightarrow \infty$)، آنگاه هر مسیر از فرایند پیوسته را می‌توان توسط فرایندهای ساده تقریب زد (شکل (۲-۲) طریقه انجام این کار را ارائه می‌دهد). در این صورت انتگرال ایتو بیان شده در رابطه (۵-۲) را می‌توان برای هر مسیر از فرایند پیوسته به کار گرفت.



شکل ۲-۲: تقریب یک مسیر از فرایند پیوسته توسط فرایند ساده.

اثبات. بدون کاستن از کلیت، قضیه را برای $t = 1$ ثابت می کنیم. فرض کنید

$$\Gamma_n(t) = \Gamma(j, n), \quad \frac{j}{n} \leq t \leq \frac{j+1}{n},$$

که در آن $\Gamma(\cdot, n) = \Delta$ و برای $j \geq 1$ داریم

$$\Gamma(j, n) = n \int_{(j-1)/n}^{j/n} \Delta(s) ds.$$

از طرفی تابع $\Delta(t) \rightarrow t$ با احتمال ۱ پیوسته است. در نتیجه $\Gamma_n(t) \rightarrow \Delta(t)$ و با به کار گرفتن قضیه همگرایی کراندار برای اندازه لبگ^۱ $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = 0$ حاصل می شود، که در آن

$$Y_n = \int_0^1 [\Gamma_n(t) - \Delta(t)]^2 dt.$$

از آنجایی که متغیرهای تصادفی $\{Y_n\}$ به صورت یکنواخت کراندار هستند، به دست می آید

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^1 |\Delta(s) - \Gamma_n(s)| dW(s) \right]^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^1 [\Gamma_n(t) - \Delta(t)]^2 dt \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [Y_n] = 0. \end{aligned}$$

□

¹Lebesgue

- خواص انتگرال ایتو. فرض کنید T یک عدد مثبت و $\Delta(t)$ برای $0 \leq t \leq T$ یک فرایند تصادفی سازوار باشد. آنگاه انتگرال ایتو $I(t) = \int_0^t \Delta(s) dW(s)$ دارای ویژگی‌های زیر است:
- (الف) (پیوستگی) مسیرهای $I(t)$ پیوسته هستند،
- (ب) (سازواری) برای هر t ، فرایند تصادفی $I(t)$ ، $\mathcal{F}(t)$ -اندازه‌پذیر است،
- (ج) (خطی) اگر $I(t) = \int_0^t \Delta(s) dW(s)$ و $J(t) = \int_0^t \Gamma(s) dW(s)$ دو انتگرال ایتو باشند، آنگاه $I(t) \pm J(t) = \int_0^t (\Delta(s) \pm \Gamma(s)) dW(s)$ و برای هر مقدار ثابت مانند c داریم $cI(t) = \int_0^t c\Delta(s) dW(s)$
- (د) (مارتینگلی) $I(t)$ یک فرایند تصادفی مارتینگل است،
- (ه) (ایزومتري ایتو) $\mathbb{E}[I^2(t)] = \int_0^t \mathbb{E}[\Delta^2(s)] ds$
- (و) (تغییرات مرتبه دوم) $dI(t)dI(t) = \Delta^2(t) dt$

۲-۲-۱ معادلات دیفرانسیل تصادفی

به یک معادله ریاضی که شامل توابع و مشتقات آن‌ها باشد، معادله دیفرانسیل گفته می‌شود. در کاربردهای واقعی، این توابع معمولاً با مقادیر فیزیکی مطابقت دارند به‌طوری که مشتقات تابع، نرخ تغییرات را نشان می‌دهند. با استفاده از معادلات دیفرانسیل می‌توان رابطه بین مشتقات را نشان داد. به عنوان مثال مدل ساده افزایش جمعیت را در نظر بگیرید. فرض کنید $N(t)$ بیانگر اندازه جمعیت در لحظه t ، $\alpha(t)$ نرخ رشد نسبی قطعی در لحظه t ، $dN(t)/dt$ میزان تغییر اندازه جمعیت و N مقدار اولیه باشد. آنگاه معادله دیفرانسیل متناظر به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{dN(t)}{dt} = \alpha(t)N(t), \quad N(0) = N_0. \quad (2-7)$$

معادله فوق به این معنی است که سرعت تغییر جمعیت در زمان t برابر با ضرب نرخ رشد و جمعیت در آن لحظه است. با این حال معمولاً $\alpha(t)$ کاملاً شناخته شده نیست و تحت تأثیر برخی اثرات زیست محیطی (عوامل تصادفی) است. بنابراین آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\alpha(t) = r(t) + \beta \text{ noise}.$$

$r(t)$ بخش قطعی و β یک عدد ثابت با مقدار واقعی است. همچنین noise بیانگر جمله تصادفی است، بدین معنا که رفتار پدیده مورد نظر دقیقاً مشخص نیست و فقط توزیع احتمال مشخصی دارد. اصطلاح نویز به طور کلی یک نویز سفید در نظر گرفته می‌شود که می‌توان آن را بر اساس حاصلضرب

نمو حرکت براونی و نمو زمانی مدل سازی کرد. بنابراین معادله (۷-۲) به صورت زیر تبدیل می شود

$$\frac{dN(t)}{dt} = \left(r(t) + \beta \text{noise} \right) N(t) = \left(r(t) + \beta dt dW(t) \right) N(t).$$

در نتیجه داریم

$$dN(t) = r(t)N(t)dt + \beta N(t)dW(t).$$

به دلیل وجود نویز، این معادله دیفرانسیل را معادله دیفرانسیل تصادفی می گویند. در واقع با افزودن عامل تصادفی به مدلی واقعی تر و مطابق با پدیده های طبیعی دست می یابیم.

تعریف ۱۰-۲. (فرم کلی معادلات دیفرانسیل تصادفی) فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ یک فضای احتمال با پالایه $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ باشد و

$$W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))^T, \quad t \geq 0.$$

یک حرکت براونی m بعدی روی فضای احتمال باشد. معادله دیفرانسیل تصادفی با توابع f و g به فرم زیر است

$$\begin{cases} dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), & 0 \leq t \leq T, \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (۸-۲)$$

به طوری که $0 < T$ و X_0 متغیر تصادفی n بعدی است. همچنین $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $g : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ و بعلاوه معادله دیفرانسیل تصادفی را می توان به صورت انتگرالی زیر نوشت

$$X(t) = x_0 + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s).$$

لم ۱-۲. (لم ایتو) اگر فرایند تصادفی $X(t)$ دارای معادله دیفرانسیل تصادفی به صورت رابطه (۸-۲) باشد، آنگاه $h := h(t, x)$ دارای معادله دیفرانسیل تصادفی به فرم زیر است

$$dh = \frac{\partial h}{\partial t}dt + \frac{\partial h}{\partial x}dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}dX(t)dX(t),$$

که در آن $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است که مشتق مرتبه دوم آن نسبت به x و مشتق مرتبه اول آن نسبت به t موجود است.

قضیه ۲-۲. (قضیه لوی^۱) فرض کنید $X(t)$ یک فرایند مارتینگل و $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ پلایه تولید شده توسط آن باشد. همچنین فرض کنید $X(t)$ در لحظه $t = 0$ برابر صفر، دارای مسیرهای پیوسته و تغییرات مرتبه دوم dt باشد، یعنی $dX(t)dX(t) = dt$. در این صورت $X(t)$ یک حرکت براونی است.

اثبات. فرض کنید $f(t, x)$ یک تابع پیوسته دلخواه باشد. با به کار گرفتن لم ایتو برای این تابع به دست می‌آید

$$df(s, X(s)) = f_s(s, X(s))ds + f_x(s, X(s))dX(s) + \frac{1}{2}f_{xx}(s, X(s))dX(s)dX(s).$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق نسبت به s از 0 تا t داریم

$$\begin{aligned} f(t, X(t)) &= f(0, X(0)) + \int_0^t f_s(s, X(s))ds + \int_0^t f_x(s, X(s))dX(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X(s))dX(s)dX(s) \\ &= f(0, 0) + \int_0^t f_s(s, X(s))ds + \int_0^t f_x(s, X(s))dX(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t f_{xx}(s, X(s))ds. \end{aligned} \quad (9-2)$$

می‌دانیم که اگر تابع مولد گشتاور دو متغیر تصادفی یکسان باشد، آنگاه تابع توزیع احتمال آن‌ها یکسان است. از طرفی می‌دانیم حرکت براونی در لحظه t دارای توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس t است. برای اینکه نشان دهیم $X(t)$ نیز حرکت براونی است، کفایت ثابت کنیم تابع مولد گشتاور آن با تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال با میانگین 0 و واریانس t برابر است. به عبارتی دیگر باید ثابت کنیم

$$\mathbb{E}[e^{uX(t)}] = e^{\frac{1}{2}u^2t}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه (۹-۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(t, X(t))] &= f(0, 0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t f_s(s, X(s))ds\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^t f_x(s, X(s))dX(s)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^t f_{xx}(s, X(s))ds\right]. \end{aligned} \quad (10-2)$$

¹Levy

از آنجایی که $X(t)$ یک فرایند تصادفی مارتینگل است، پس انتگرال $\int_0^t f_x(s, X(s))dX(s)$ نیز مارتینگل خواهد بود. از طرفی امید ریاضی یک فرایند مارتینگل در کل دامنه اش یکسان است. بنابراین داریم

$$\mathbb{E}[\int_0^t f_x(s, X(s))dX(s)] = \mathbb{E}[\int_0^0 f_x(s, X(s))dX(s)] = 0.$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (۲-۱۰) به دست می آید

$$\mathbb{E}[f(t, X(t))] = f(0, 0) + \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(f_s(s, X(s)) + \frac{1}{2}f_{xx}(s, X(s))\right)ds\right]. \quad (2-11)$$

از آنجایی که $f(t, x)$ یک تابع دلخواه بود، می توانیم آن را به صورت زیر تعریف کنیم

$$f(t, x) = e^{ux - \frac{1}{2}u^2 t}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

در این صورت داریم

$$f_t(t, x) = -\frac{1}{2}u^2 f(t, x), \quad f_x(t, x) = u f(t, x), \quad f_{xx}(t, x) = u^2 f(t, x).$$

بنابراین خواهیم داشت

$$f_t(t, X(t)) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t)) = 0.$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (۲-۱۱) می توان نوشت

$$\mathbb{E}[e^{uX(t) - \frac{1}{2}u^2 t}] = f(0, 0) = 1.$$

در نتیجه تابع مولد گشتاور $X(t)$ به صورت زیر به دست می آید

$$\mathbb{E}[e^{uX(t)}] = e^{\frac{1}{2}u^2 t}, \quad u \in \mathbb{R},$$

□

و اثبات کامل می شود.

مثال ۲-۴. (معادله دیفرانسیل تصادفی وسیچک)^۱ هنگامی که رکود اقتصادی در یک کشور به بیش از اندازه برسد، بانک‌های مرکزی برای کنترل اوضاع اقتصادی و حمایت از تولید، نرخ بهره را کاهش می‌دهند. در بعضی از موارد خاص، اگر رکود بیش از اندازه باشد یا کشور در یک بحران اقتصادی فرو رفته باشد، نرخ بهره را منفی در نظر می‌گیرند. مقادیری که تحت مدل وسیچک به دست می‌آید می‌تواند منفی باشد و این ویژگی برای مدل‌سازی نرخ بهره مطلوب است. با توجه به اینکه ارزش نرخ بهره در طول زمان به سطح میانگین خود باز می‌گردد، یکی دیگر از ویژگی‌هایی که مدل وسیچک را به یک مدل محبوب در مدل‌سازی نرخ بهره تبدیل کرده است خاصیت بازگشت به میانگین این مدل است.

فرض کنید $R(t)$ مقدار نرخ بهره در لحظه $t \in [0, T]$ باشد. در این صورت تحت مدل وسیچک، مقدار نرخ بهره توسط معادله دیفرانسیل تصادفی زیر بیان می‌شود

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))dt + \sigma dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (12-2)$$

که در آن $W(t)$ حرکت براونی، α ، β و σ ثابت‌های مثبت هستند که تعبیر آن‌ها به ترتیب، سطح بازگشت به میانگین، سرعت بازگشت به میانگین و تلاطم است. معادله (۱۲-۲) یک مثال از معادله دیفرانسیل تصادفی است. برای حل معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۲-۲)، تابع دو متغیره زیر را تعریف کنید

$$f(t, x) = e^{\beta t} x.$$

در این صورت با استفاده از لم ایتو خواهیم داشت

$$df(t, R(t)) = f_t(t, R(t))dt + f_x(t, R(t))dR(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, R(t))dR(t)dR(t).$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned} de^{\beta s} R(s) &= e^{\beta s} \beta R(s)ds + e^{\beta s} dR(s) \\ &= e^{\beta s} \beta R(s)ds + e^{\beta s} \left((\alpha - \beta R(s))ds + \sigma dW(s) \right) \\ &= e^{\beta s} \alpha ds + e^{\beta s} \sigma dW(s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \end{aligned}$$

¹ Vasicek

با انتگرال گیری از عبارت فوق نسبت به s از 0 تا t و ضرب طرفین در $e^{-\beta t}$ ، فرم بسته $R(t)$ به صورت زیر به دست می آید

$$R(t) = e^{-\beta t}r + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \int_0^t \sigma e^{-\beta(t-s)} dW(s), \quad r = R(0). \quad (13-2)$$

می دانیم انتگرال ایتو $\int_0^t \sigma e^{-\beta(t-s)} dW(s)$ در معادله (۱۳-۲) دارای میانگین صفر است. بنابراین $R(t)$ در معادله (۱۳-۲) دارای میانگین $e^{-\beta t}r + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$ خواهد بود. همچنین با توجه به خاصیت ایزومتری ایتو، انتگرال $\int_0^t \sigma e^{-\beta(t-s)} dW(s)$ دارای واریانس زیر است

$$\int_0^t \sigma^2 e^{-2\beta(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t}).$$

از آنجایی که واریانس $e^{-\beta t}r + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$ به عنوان یک عبارت قطعی (بدون عامل تصادفی) صفر است، پس واریانس $R(t)$ در معادله (۱۳-۲) برابر $\frac{\sigma^2}{2\beta}(1 - e^{-2\beta t})$ خواهد بود.

اگر $R(t) = \frac{\alpha}{\beta}$ ، قسمت رانش (ضرب dt) در عبارت (۱۲-۲) برابر صفر است. در صورتی که اگر $R(t) > \frac{\alpha}{\beta}$ ، این قسمت منفی می شود و $R(t)$ به $\frac{\alpha}{\beta}$ میل می یابد. زمانی که $R(t) < \frac{\alpha}{\beta}$ ، این قسمت مثبت است و $R(t)$ باز هم به $\frac{\alpha}{\beta}$ سوق می یابد. اگر $r = \frac{\alpha}{\beta}$ ، آنگاه برای هر $t \in [0, T]$ ، $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[R(t)] = \frac{\alpha}{\beta}$ همچنین اگر $r \neq \frac{\alpha}{\beta}$ ، آنگاه $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[R(t)] = \frac{\alpha}{\beta}$.

مثال ۲-۵. (معادله دیفرانسیل تصادفی کاکس-اینگرسل-راس^۱) فرض کنید $R(t)$ نرخ بهره یا تلاطم بازار در لحظه $t \in [0, T]$ باشد. در این صورت تحت مدل کاکس-اینگرسل-راس (CIR)، نرخ بهره یا تلاطم بازار توسط معادله دیفرانسیل تصادفی زیر بیان می شود:

$$dR(t) = (\alpha - \beta R(t))dt + \sigma \sqrt{R(t)} dW(t), \quad r = R(0), \quad (14-2)$$

که در آن حرکت براونی، α ، β و σ ثابت های مثبت هستند که به ترتیب بیانگر سطح بازگشت به میانگین، سرعت بازگشت به میانگین و تلاطم هستند. برخلاف مدل وسیچک، این مدل تنها مقادیر مثبت را می پذیرد. مقادیر این فرایند همواره مثبت هستند اگر و تنها اگر پارامترها در شرط زیر (مرسوم به شرط فلر^۲) صدق کنند

$$\alpha\beta > \frac{1}{2}\sigma^2.$$

¹Cox-Ingersoll-Ross

²Feller

توجه کنید که اگر پارامترها در شرط فلر صدق نکنند، مقادیر به‌دست آمده برای فرایند CIR می‌تواند منفی باشد و این باعث می‌شود که نرخ بهره یا تلاطم بازار تحت این مدل اعداد موهومی شوند که نتیجه مطلوبی نخواهد بود. با توجه به اینکه خروجی در این مدل تحت شرط فلر همواره مثبت است، از مدل CIR معمولاً برای مدل‌سازی تلاطم بازار استفاده می‌شود. لازم به ذکر است که مدل CIR نیز مانند مدل وسیچک دارای خاصیت بازگشت به میانگین است. به علت وجود ریشه $R(t)$ در مدل CIR جواب آن را نمی‌توان به طور صریح به‌دست آورد، اما توزیع این مدل را می‌توان مشخص کرد. برای این کار، تابع زیر را تعریف می‌کنیم

$$f(t, x) = e^{\beta t} x.$$

در این صورت با استفاده از لم ایتو داریم

$$\begin{aligned} d(e^{\beta t} R(t)) &= df(t, R(t)) \\ &= f_t(t, R(t))dt + f_x(t, R(t))dR(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, R(t))dR(t)dR(t) \\ &= \beta e^{\beta t} R(t)dt + e^{\beta t}(\alpha - \beta R(t))dt + e^{\beta t} \sigma \sqrt{R(t)}dW(t) \\ &= \alpha e^{\beta t} dt + \sigma e^{\beta t} \sqrt{R(t)}dW(t) \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین عبارت فوق به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned} e^{\beta t} R(t) &= r + \alpha \int_0^t e^{\beta u} du + \sigma \int_0^t e^{\beta u} \sqrt{R(u)} dW(u) \\ &= r + \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta t} - 1) + \sigma \int_0^t e^{\beta u} \sqrt{R(u)} dW(u) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه امید ریاضی انتگرال ایتو برابر صفر است، خواهیم داشت

$$e^{\beta t} \mathbb{E}[R(t)] = r + \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta t} - 1),$$

و به طور معادل

$$\mathbb{E}[R(t)] = e^{-\beta t} r + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-\beta t}). \quad (۱۵-۲)$$

همان طور که مشاهده می شود امید ریاضی فرایند تلاطم مدل CIR مشابه مدل وسیچک است. برای محاسبه واریانس $R(t)$ قرار می دهیم $X(t) = e^{\beta t} R(t)$ در این صورت با استفاده از لم ایتو به دست می آید

$$\begin{aligned} dX(t) &= \beta e^{\beta t} R(t) dt + e^{\beta t} dR(t) \\ &= \alpha e^{\beta t} dt + \sigma e^{\beta t} \sqrt{R(t)} dW(t) \\ &= \alpha e^{\beta t} dt + \sigma e^{\frac{\beta t}{\gamma}} \sqrt{X(t)} dW(t). \end{aligned} \quad (۱۶-۲)$$

لذا با به کار گرفتن لم ایتو برای $X^{\gamma}(t)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} d(X^{\gamma}(t)) &= \gamma X(t) dX(t) + dX(t) dX(t) \\ &= \gamma \alpha e^{\beta t} X(t) dt + \gamma \sigma e^{\frac{\beta t}{\gamma}} X^{\frac{\gamma}{2}}(t) dW(t) + \sigma^{\gamma} e^{\beta t} X(t) dt. \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از طرفین عبارت فوق به دست می آید

$$X^{\gamma}(t) = X^{\gamma}(0) + (\gamma \alpha + \sigma^{\gamma}) \int_0^t e^{\beta u} X(u) du + \gamma \sigma \int_0^t e^{\frac{\beta u}{\gamma}} X^{\frac{\gamma}{2}}(u) dW(u).$$

با توجه به اینکه امید ریاضی انتگرال دوم صفر است، داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^{\gamma}(t)] &= X^{\gamma}(0) + (\gamma \alpha + \sigma^{\gamma}) \int_0^t e^{\beta u} \mathbb{E}[X(u)] du \\ &= r^{\gamma} + (\gamma \alpha + \sigma^{\gamma}) \int_0^t e^{\beta u} \left(r + \frac{\alpha}{\beta} (e^{\beta u} - 1) \right) du \\ &= r^{\gamma} + \frac{\gamma \alpha + \sigma^{\gamma}}{\beta} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} \right) (e^{\beta t} - 1) + \frac{\gamma \alpha + \sigma^{\gamma}}{\gamma \beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} (e^{\gamma \beta t} - 1). \end{aligned} \quad (۱۷-۲)$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R^{\gamma}(t)] &= e^{-\gamma \beta t} \mathbb{E}[X^{\gamma}(t)] \\ &= e^{-\gamma \beta t} r^{\gamma} + \frac{\gamma \alpha + \sigma^{\gamma}}{\beta} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} \right) (e^{-\beta t} - e^{-\gamma \beta t}) \\ &\quad + \frac{\alpha (\gamma \alpha + \sigma^{\gamma})}{\gamma \beta^{\gamma}} (1 - e^{-\gamma \beta t}). \end{aligned} \quad (۱۸-۲)$$

در نهایت داریم

$$\begin{aligned} V[R(t)] &= \mathbb{E}[R^2(t)] - (\mathbb{E}[R(t)])^2 \\ &= e^{-2\beta t} r^2 + \frac{2\alpha + \sigma^2}{\beta} \left(r - \frac{\alpha}{\beta} \right) (e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) \\ &\quad + \frac{\alpha(2\alpha + \sigma^2)}{2\beta^2} (1 - e^{-2\beta t}) - e^{-2\beta t} r^2 \\ &\quad - \frac{2\alpha}{\beta} r (e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} (1 - e^{-\beta t})^2 \\ &= \frac{\sigma^2}{\beta} r (e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) + \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta^2} (1 - 2e^{-\beta t} + e^{-2\beta t}). \end{aligned}$$

از طرفی می‌توان نوشت $\lim_{t \rightarrow \infty} V[R(t)] = \frac{\alpha\sigma^2}{2\beta^2}$.

۲-۳ مدل‌های تصادفی برای قیمت سهام

برای قیمت‌گذاری هر مشتقه، باید ارزش دارایی را در هر نقطه از زمان مدل کنیم که این زمان می‌تواند یک بازده یا لحظه‌ای باشد که در آن تصمیم سرمایه‌گذاری باید گرفته شود. در عمل، این به معنای توصیف تکامل قیمت دارایی (سهام) با استفاده از یک فرایند تصادفی است. در طول سالیان گذشته، مدل‌های تصادفی مختلفی مانند مدل‌های تلاطم ثابت، مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل‌های همراه با پرش قیمت و مدل‌های رژیم-سوئیچینگ معرفی شدند. در واقع هر یک از این مدل‌ها با توجه به اینکه بازار در چه وضعیتی قرار دارد به کار گرفته می‌شوند. در این بخش متداول‌ترین مدل‌های تصادفی را برای ارزیابی قیمت سهام بیان می‌کنیم.

۱-۳-۲ مدل حرکت براونی هندسی

با فرض اینکه $S(t)$ قیمت سهام در لحظه $t \in [0, T]$ است، دینامیک قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی به صورت زیر است

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad (19-2)$$

که در آن $W(t)$ حرکت براونی استاندارد، μ میانگین نرخ بازده و $\sigma > 0$ تلاطم بازار است. مدل حرکت براونی هندسی شامل تمام مسیرهای ممکن از فرایند قیمت دارایی است که همیشه مثبت است، هیچ پرشی ندارد و تنها یک حرکت براونی در آن به کار رفته است. اگر قرار دهیم

$$X(t) = \ln S(t) = f(S(t)),$$

آنگاه با استفاده از لم ایتو داریم

$$\begin{aligned} dX(t) &= f'(S(t))dS(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 f''(S(t))dt \\ &= \mu dt + \sigma dW(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 dt = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t). \end{aligned}$$

با انتگرال گیری عبارت فوق از 0 تا t به دست می آید

$$X(t) = X(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t).$$

با توجه به اینکه $X(t) = \ln S(t)$ ، خواهیم داشت

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t) \right\}. \quad (20-2)$$

به طور کلی اگر $u < t$ ، آنگاه می توان نوشت

$$S(t) = S(u) \exp \left\{ (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - u) + \sigma(W(t) - W(u)) \right\}. \quad (21-2)$$

قضیه ۲-۳. فرض کنید $S(t)$ قیمت سهام در لحظه $t \in [0, T]$ و از مدل حرکت براونی هندسی پیروی می کند، به عبارت دیگر

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) \in \mathbb{R}^+. \quad (22-2)$$

در این صورت $S(t)$ یک متغیر تصادفی لگ-نرمال است و میانگین و واریانس آن به ترتیب به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S(t)] &= e^{\mu t}, \\ V[S(t)] &= S^2(0)e^{2\mu t}(e^{\sigma^2 t} - 1). \end{aligned}$$

اثبات. فرض کنید Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد. چون $W(t) \sim \mathcal{N}(\circ, t)$ ، پس می‌توان نوشت $W(t) = \sqrt{t}Z$. لذا با توجه به معادله (۲-۲۰) داریم

$$S(t) = \exp \left\{ \ln S(\circ) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)t + \sigma\sqrt{t}Z \right\}.$$

با لگاریتم‌گیری از طرفین رابطه فوق داریم

$$\begin{aligned} \ln S(t) &= \ln S(\circ) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)t + \sigma\sqrt{t}Z \\ &\sim \mathcal{N}(\ln S(\circ) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)t, \sigma^2 t). \end{aligned}$$

در نتیجه $\ln S(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\ln S(\circ) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right)t$ و واریانس $\sigma^2 t$ خواهد بود. به عبارتی دیگر قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی از توزیع لگ-نرمال پیروی می‌کند. با انتگرال‌گیری از طرفین رابطه (۲-۲۲) خواهیم داشت

$$S(t) = S(\circ) + \mu \int_{\circ}^t S(u)du + \sigma \int_{\circ}^t S(u)dW(u),$$

از آنجایی که امید ریاضی انتگرال ایتو برابر صفر است، با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه فوق به‌دست می‌آید

$$\mathbb{E}[S(t)] = S(\circ) + \mu \int_{\circ}^t \mathbb{E}[S(u)]du.$$

با دیفرانسیل‌گیری از طرفین عبارت بالا داریم

$$d\mathbb{E}[S(t)] = \mu \mathbb{E}[S(t)]dt.$$

به طور معادل داریم

$$\frac{d\mathbb{E}[S(t)]}{\mathbb{E}[S(t)]} = \mu dt.$$

با حل معادله دیفرانسیل معمولی فوق، میانگین قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbb{E}[S(t)] = \mathbb{E}[S(\circ)]e^{\mu t} = S(\circ)e^{\mu t}.$$

برای محاسبه واریانس $S(t)$ ، ابتدا $\mathbb{E}[S^\gamma(t)]$ را محاسبه می کنیم. قرار می دهیم $f(t, x) = x^\gamma$. در این صورت با توجه به لم ایتو داریم

$$\begin{aligned} dS^\gamma(t) &= df(t, S(t)) \\ &= f_t(t, S(t))dt + f_x(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f_{xx}dS(t)dS(t) \\ &= \gamma S(t)(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) + ((\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)))^\gamma \\ &= \gamma \mu S^\gamma(t)dt + \gamma \sigma S^\gamma(t)dW(t) + \sigma^\gamma S^\gamma(t)dt \\ &= (\gamma \mu + \sigma^\gamma)S^\gamma(t)dt + \gamma \sigma S^\gamma(t)dW(t). \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه بالا داریم

$$S^\gamma(t) = S^\gamma(\circ) + (\gamma \mu + \sigma^\gamma) \int_\circ^t S^\gamma(u)du + \gamma \sigma \int_\circ^t S^\gamma(u)dW(u).$$

از آنجایی که امید ریاضی انتگرال ایتو برابر صفر است، با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه فوق به دست می آید

$$\mathbb{E}[S^\gamma(t)] = S^\gamma(\circ) + (\gamma \mu + \sigma^\gamma) \int_\circ^t \mathbb{E}[S^\gamma(u)]du.$$

با دیفرانسیل گیری از طرفین عبارت بالا خواهیم داشت

$$d\mathbb{E}[S^\gamma(t)] = (\gamma \mu + \sigma^\gamma)\mathbb{E}[S^\gamma(t)]dt.$$

به طور معادل می توان نوشت

$$\frac{d\mathbb{E}[S^\gamma(t)]}{\mathbb{E}[S^\gamma(t)]} = (\gamma \mu + \sigma^\gamma)dt.$$

با حل معادله دیفرانسیل معمولی فوق داریم

$$\mathbb{E}[S^\gamma(t)] = \mathbb{E}[S^\gamma(\circ)]e^{(\gamma \mu + \sigma^\gamma)t} = S^\gamma(\circ)e^{(\gamma \mu + \sigma^\gamma)t}.$$

بنابراین واریانس قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} V[S(t)] &= \mathbb{E}[S^\gamma(t)] - (\mathbb{E}[S(t)])^\gamma \\ &= S^\gamma(\circ)e^{(\gamma \mu + \sigma^\gamma)t} - S^\gamma(\circ)e^{\gamma \mu t} = S^\gamma(\circ)e^{\gamma \mu t}(e^{\sigma^\gamma t} - 1). \end{aligned}$$

□

۲-۳-۲ مدل هستون

در دهه ۷۰ میلادی، پس از معرفی مدل حرکت براونی هندسی برای ارزیابی قیمت سهام، بسیاری از مردم معتقد بودند که تلاطم سهام یک مقدار ثابت است. اما بعدها پس از سقوط اقتصادی در سال ۱۹۷۷، محققان و فعالان حوزه مالی شروع به تردید در مورد این فرضیه کردند و مدل‌های تلاطم تصادفی را ارائه دادند. یکی از مهم‌ترین مدل‌های تلاطم تصادفی برای ارزیابی قیمت سهام، مدل تلاطم تصادفی هستون^۱ است که به افتخار پایه‌گذار آن به نام استیون هستون چنین نام‌گذاری شده است. در این مدل برخلاف حرکت براونی هندسی، تلاطم دارایی نه تنها ثابت نیست، بلکه از یک فرایند تصادفی پیروی می‌کند.

تحت مدل تلاطم تصادفی هستون، ارزش سهام $S(t)$ در لحظه $t \in [0, T]$ از یک فرایند تصادفی پیروی کرده و توسط معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر توصیف می‌شود

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW^{(1)}(t), & S(0) = s, \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW^{(2)}(t), & V(0) = v, \end{cases} \quad (23-2)$$

که در آن $W^{(1)}(t)$ و $W^{(2)}(t)$ دو حرکت براونی با ضریب همبستگی $\rho \in (-1, 1)$ ، r نرخ بهره ثابت و θ ، κ و σ ثابت‌های مثبت هستند که تعبیر آن‌ها به ترتیب، سرعت بازگشت به میانگین، سطح بازگشت به میانگین و تلاطم برای تلاطم است. $V(t)$ فرایند تلاطم است که دینامیک آن از مدل CIR پیروی می‌کند.

فرض کنید $W^{(3)}(t)$ حرکت براونی باشد که مستقل از $W^{(1)}(t)$ است. در این صورت $W^{(2)}(t)$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$W^{(2)}(t) = \rho W^{(1)}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^{(3)}(t). \quad (24-2)$$

حال نشان می‌دهیم که سمت راست معادله (۲۴-۲)، یک حرکت براونی و با فرایند $W^{(1)}(t)$ دارای ضریب همبستگی ρ است.

با توجه به اینکه $W^{(2)}(t)$ در چهار شرط زیر (شرایط قضیه لوی) صدق می‌کند، یک حرکت براونی خواهد بود:

الف) $W^{(2)}(t)$ دارای تغییرات مرتبه دوم dt است، زیرا

$$dW^{(2)}(t)dW^{(2)}(t) = \left(\rho dW^{(1)}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW^{(3)}(t) \right)^2 = dt.$$

¹Heston

ب) $W^{(۲)}(t)$ یک فرایند مارتینگل است، زیرا

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W^{(۲)}(t)|\mathcal{F}(s)] &= \mathbb{E}[\rho W^{(۱)}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W^{(۳)}(t)|\mathcal{F}(s)] \\ &= \rho W^{(۱)}(s) + \sqrt{1 - \rho^2} W^{(۳)}(s) = W^{(۲)}(s).\end{aligned}$$

ج) با توجه به اینکه حرکت های براونی $W^{(۱)}(t)$ و $W^{(۳)}(t)$ در لحظه $t = 0$ برابر صفر هستند، بنابراین $W^{(۲)}(0)$ نیز برابر صفر است.

د) $W^{(۲)}(t)$ دارای مسیرهای پیوسته است. از آنجایی که

$$dW^{(۱)}(t)dW^{(۲)}(t) = dW^{(۱)}(t)(\rho dW^{(۱)}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW^{(۳)}(t)) = \rho dt.$$

در نتیجه $W^{(۱)}(t)$ و $W^{(۲)}(t)$ دارای ضریب همبستگی ρ هستند. بنابراین مدل هستون (۲-۲۳) را به صورت زیر می توان بازنویسی کرد

$$\begin{cases} dS(t) &= rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW^{(۱)}(t), \\ dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}(\rho dW^{(۱)}(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW^{(۳)}(t)), \end{cases} \quad (۲-۲۵)$$

که در آن $W^{(۱)}(t)$ و $W^{(۳)}(t)$ دو حرکت براونی مستقل از هم هستند.

۳-۳-۲ مدل پرش-انتشار

در مدل های قیمت گذاری مشتقات مالی همواره فرض بر این است که دارایی های پایه دارای مسیرهای پیوسته هستند، اما در بسیاری از حالات، شواهدی از قیمت های پرش یافته و اهمیت گنجاندن عامل پرش در دینامیک قیمت دارایی وجود دارد. در مقایسه با توزیع نرمال، لگاریتم فرایند قیمت با پرش اغلب دارای چولگی و کشیدگی است که این یکی از ویژگی های مهم داده های واقعی بازار است. در این بخش به مدل سازی قیمت سهام با در نظر گرفتن عامل پرش قیمت می پردازیم. قبل از بیان مدل، چند مفهوم پایه ای در این رابطه را بیان می کنیم.

تعریف ۲-۱۱. (فرایند پواسن^۱) یک فرایند تصادفی مانند $N := \{N(t)\}_{t \in [0, T]}$ را فرایند پواسن همگن یا به طور ساده تر فرایند پواسن با نرخ $\lambda > 0$ می گویند، هرگاه N در شرایط زیر صدق کند:

^۱Poisson

الف) در لحظه شروع برابر صفر است، یعنی $N(t_0) = 0$

ب) دارای نمونه‌های مانا و مستقل است. مانا بودن نموها بدین معناست که برای هر $s < t$ ، نمو $N(t) - N(s)$ هم توزیع با $N(t-s)$ است،

ج) برای هر $t \geq 0$ ، $N(t)$ دارای توزیع پواسن با پارامتر λt است.

با استفاده از خاصیت مانایی نموها، نمو $N(t) - N(s)$ برای $t > s$ هم توزیع با $N(t-s)$ است و در نتیجه $N(t-s)$ دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda(t-s)$ خواهد بود. یک تعریف جایگزین برای فرایند پواسن را به صورت زیر می‌توان ارائه داد

$$N(t) = \#\{n : T_n \leq t\}, \quad t > 0,$$

به‌طوری که $\#\{A\}$ تعداد عناصر یک مجموعه دلخواه مانند A و $T_n = Y_1 + \dots + Y_n$ که در آن $Y_1, \dots, Y_n$ نمونه‌ی تصادفی از توزیع نمایی با پارامتر λ است و تابع توزیع آن به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbb{P}(Y_1 \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

همانطور که می‌دانیم متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ دارای میانگین λ است. از آنجایی که فرایند پواسن $N(t)$ در لحظه t دارای توزیع پواسن با پارامتر λt است، تابع امید ریاضی فرایند پواسن به صورت λt خواهد بود.

تعریف ۲-۱۲. (فرایند پواسن مرکب) فرض کنید $N(t)$ فرایند پواسن با شدت λ و $Y_1, Y_2, \dots$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی هم‌توزیع به همراه میانگین $\mu = \mathbb{E}[Y_i]$ باشند. همچنین فرض کنید متغیرهای تصادفی $Y_1, Y_2, \dots$ از یکدیگر و از فرایند پواسن $N(t)$ مستقل هستند. در این صورت فرایند پواسن مرکب به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0. \quad (2-26)$$

زمان رخداد پرش‌ها در $Q(t)$ مشابه با فرایند $N(t)$ است، اما برخلاف فرایند پواسن $N(t)$ ، اندازه پرش‌ها در $Q(t)$ تصادفی است. اندازه اولین پرش برابر Y_1 ، اندازه دومین پرش برابر Y_2 و غیره.

مشابه فرایند پواسن $N(t)$ ، نموهای فرایند پواسن مرکب $Q(t)$ مستقل از هم هستند. به خصوص، برای $t \leq s$ ، مجموع $N(s)$ پرش اول به صورت زیر بیان می شود

$$Q(s) = \sum_{i=1}^{N(s)} Y_i, \quad (27-2)$$

و داریم

$$Q(t) - Q(s) = \sum_{i=N(s)+1}^{N(t)} Y_i, \quad (28-2)$$

که مجموع پرش های مستقل از $N(s) + 1$ تا $N(t)$ است. بعلاوه توزیع $Q(t) - Q(s)$ مشابه توزیع $Q(t - s)$ است، زیرا با توجه به خاصیت مانایی فرایند پواسن می دانیم $N(t) - N(s)$ هم توزیع با $N(t - s)$ است. همچنین میانگین فرایند پواسن مرکب به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q(t)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k Y_i \mid N(t) = k \right] \mathbb{P}\{N(t) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \mu \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} = \mu \lambda t. \end{aligned}$$

مرتون^۱ نخستین بار یک مدل مالی با دو عامل پرش و انتشار برای قیمت گذاری اوراق بهادار مشتقه معرفی کرد. مرتون این مدل را برای اختیارهای صادر شده روی سهام در نظر گرفت و پرش ها را به طور کلی به عنوان شوک های وارد شده به یک شرکت خاص تفسیر کرد. پس از آن مدل های مشابهی برای شاخص ها، نرخ ارزها، کالاها و نرخ های بهره معرفی شدند. مدل پرش-انتشار مرتون به صورت معادله دیفرانسیل تصادفی زیر بیان می شود

$$\frac{dS(t)}{S(t^-)} = rdt + \sigma dW(t) + dJ(t), \quad (29-2)$$

که در آن ثابت های r و σ به ترتیب نرخ بهره و تلاطم بازار، $W := \{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ حرکت براونی یک-بعدی، $S(t^-)$ قیمت سهام قبل از زمان پرش و $J := \{J(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند پواسن مرکب

¹Merton

و مستقل از W است. به طور خاص، J به صورت زیر تعریف می‌شود

$$J(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1), \quad (۳۰-۲)$$

که در آن $Y_1, Y_2, \dots$ متغیرهای تصادفی دلخواه و $\{N(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند پواسن است. این بدان معناست که زمان‌های تصادفی $\dots < \tau_2 < \tau_1 < 0$ به عنوان زمان‌های پرش وجود دارند، به‌طوری که فرایند

$$N(t) = \sup\{n : \tau_n \leq t\},$$

تعداد پرش‌ها را در بازه زمانی $[0, t]$ می‌شمارد. همچنین $dJ(t)$ در رابطه (۲۹-۲) اندازه پرش J در زمان t است. اگر $t = \tau_j$ ، آنگاه اندازه پرش برابر $Y_j - 1$ است، در غیر این صورت اندازه پرش برابر صفر خواهد بود. توجه کنید که نمو $dS(t)$ در لحظه t به مقدار S درست قبل از پرش در این لحظه بستگی دارد و به مقدار بعد از پرش وابسته نیست. در واقع پرش S در زمان t برابر $S(t) - S(t^-)$ است. این مقدار صفر است مگر اینکه $t = \tau_j$ باشد و قیمت در لحظه t پرش کند، یعنی اگر تساوی $t = \tau_j$ برای برخی از اندیس‌های j برقرار باشد. پرش S در لحظه τ_j برابر است با

$$S(\tau_j) - S(\tau_j^-) = S(\tau_j^-)[J(\tau_j) - J(\tau_j^-)] = S(\tau_j^-)(Y_j - 1).$$

بنابراین به‌دست می‌آید

$$S(\tau_j) = S(\tau_j^-)Y_j.$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که Y_j نسبت قیمت دارایی قبل و بعد از یک پرش است. این رابطه توضیح می‌دهد که چرا $Y_j - 1$ به جای Y_j در معادله (۲۹-۲) قرار داده شده است.

قضیه ۲-۴. جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۲۹-۲) به صورت زیر است

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\} \prod_{j=0}^{N(t)} Y_j. \quad (۳۱-۲)$$

اثبات. با به کار گرفتن لم ایتو برای $\ln S(t)$ داریم

$$d \ln S(t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW(t) + \left(\ln(S(t)) - \ln(S(t^-)) \right) dJ(t).$$

بنابراین به دست می آید

$$\ln S(t) = \ln S(\circ) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \int_0^t \left(\ln(S(u)) - \ln(S(u^-))\right) dJ(u).$$

از طرفی در زمان پرش u داریم

$$S(u) - S(u^-) = S(u^-) (Y_j - 1) \iff S(u) = S(u^-) Y_j.$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین عبارت فوق خواهیم داشت

$$\ln S(u) - \ln S(u^-) = \ln \frac{S(u)}{S(u^-)} = \ln Y_j,$$

و به دست می آید

$$\ln S(t) = \ln S(\circ) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) + \sum_{j=1}^{N(t)} \ln Y_j.$$

□

با اعمال تابع نمایی در طرفین رابطه بالا حکم نتیجه می شود.

۲-۳-۴ مدل رژیم-سوئیچینگ

بسیاری از سری های زمانی مالی در رفتار خود اختلافات چشمگیری در مواجه با بحران های مالی یا تغییر سیاست دولت ها از خود نشان می دهند. علاقه ی خاص اقتصاددانان استفاده از متغیرهایی است که در مواجه با این عوامل به صورت متفاوت عمل کنند. مدلی که بتواند این تغییرات را تجزیه و تحلیل کند، مدل رژیم-سوئیچینگ نام دارد. این مدل قابلیت آن را دارد که تغییرات متناوب و تکراری رژیم های اقتصادی را به صورت درونزا در نظر بگیرد، حال آن که در مدل های دیگر معمولاً این تغییرات به صورت خاص و برونزا امکان پذیر است. در اکثر تحقیقات ممکن است اطلاعات اندکی در مورد زمان هایی که پارامترها تغییر می کنند وجود داشته باشد. بنابراین نیاز داریم تا نتایجی در مورد نقاط عطف، که با توجه به آن تغییر پارامترها معنادار هستند ایجاد کنیم. در این راستا، ابتدا برخی محققین مدل هایی را در نظر گرفتند که فقط یک تغییر رژیم در داده ها رخ می دهد، سپس مدل هایی با بیش از یک رژیم طراحی شدند که احتمال سوئیچ شدن آن ها وابسته به مسیر دارایی است. این وابستگی تحت عنوان مدل های رژیم-سوئیچینگ معرفی شد.

۲-۳-۴-۱ زنجیر مارکف

زنجیر مارکف^۱ یک فرایند تصادفی گسسته در زمان با خاصیت مارکف است. یک فرایند تصادفی گسسته در زمان شامل سیستمی است که در هر مرحله در حالت خاص و مشخصی قرار دارد و به صورت تصادفی در هر مرحله تغییر حالت می‌دهد. مراحل اغلب به عنوان لحظه‌های زمانی در نظر گرفته می‌شوند ولی می‌توان آن‌ها را فاصله فیزیکی یا هر متغیر گسسته دیگری در نظر گرفت. خاصیت مارکف بیان می‌کند که توزیع احتمال شرطی برای سیستم در مرحله بعد فقط به حالت فعلی سیستم بستگی دارد و به حالت‌های قبل بستگی ندارد. چون سیستم به صورت تصادفی تغییر می‌کند به طور کلی پیش‌بینی حالت زنجیر مارکف در نقطه‌ای خاص در آینده غیرممکن است. از آنجایی که زنجیر مارکف پنهان در ارزیابی بازارهای مالی تحت مدل رژیم-سوئیچینگ اهمیت بسیار زیاد دارد، در این بخش قبل از معرفی مدل رژیم-سوئیچینگ، به بیان ساختارهای زنجیر مارکف و زنجیر مارکف پنهان می‌پردازیم.

تعریف ۲-۱۳. یک زنجیر مارکف دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ است که دارای خاصیت مارکف هستند، یعنی

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = z \mid Z_1 = z_1, Z_2 = z_2, \dots, Z_n = z_n) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = z \mid Z_n = z_n). \quad (2-32)$$

مقادیر ممکن برای Z_i مجموعه قابل شمارشی را می‌سازند که فضای حالت نام دارد.

مثال ۲-۶. ورشکستگی قمارباز مسئله معروف از زنجیر مارکف است. در این مسئله دو فرد سکه پرتاب می‌کنند و هر بار که سکه شیر آمد شخص A یک دلار از B می‌برد و هر بار که سکه خط بیاید، شخص B یک دلار از A می‌برد. در ابتدای بازی، A مقدار a دلار و B مقدار b دلار دارند. فرض کنید Z_i دارایی A پس از i مرحله بازی باشد. یکی از خواص دنباله $\{Z_i\}$ این است که اگر در مرحله n ام مقدار Z_i را بدانیم، در این صورت سرمایه A از آن مرحله به بعد تنها به Z_n و نه به $Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$ وابسته است. یعنی اگر سرمایه A در زمان حال معلوم باشد، سرمایه آینده او مستقل از مقدار پولی است که در هر مرحله از بازی در گذشته برنده شده یا باخته است.

تعریف ۲-۱۴. (ماتریس احتمال انتقال) دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ که یک زنجیر مارکف را تشکیل می‌دهند را در نظر بگیرید. در این صورت احتمال آن که زنجیر در لحظه

¹Markov

n روی حالت j قرار داشته باشد به شرط آن که در لحظه $n - 1$ روی حالت i قرار داشته است، به صورت زیر تعریف می شود

$$p_{ij} = \mathbb{P}(Z_n = j \mid Z_{n-1} = i), \quad (33-2)$$

که در آن p_{ij} را احتمال انتقال زنجیر از حالت i به حالت j گویند. در حالت کلی برای یک زنجیر مارکف n -حالت، ماتریس احتمال انتقال به صورت زیر تعریف می شود

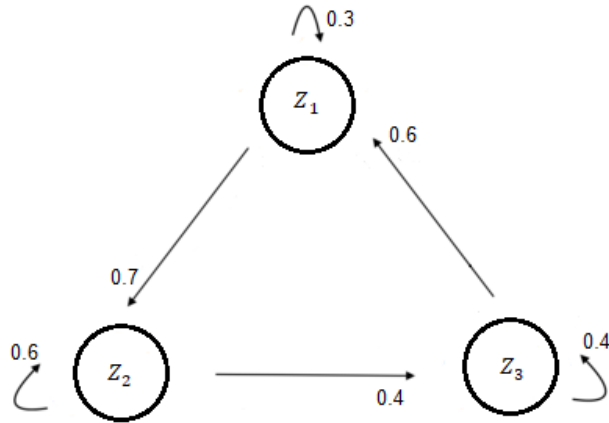
$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

با توجه به خاصیت مارکف (32-2) می توان نشان داد (تمرین 6 فصل 2)

$$\mathbb{P}(Z_{k+n} = j \mid Z_k = i) = [P^n]_{ij}. \quad (34-2)$$

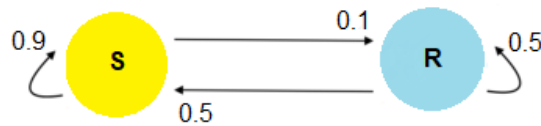
در شکل (3-2) یک ساختار از زنجیر مارکف سه حالتی آورده شده است که اعداد نمایش داده شده روی یال ها بیانگر احتمال انتقال زنجیر از یک حالت به حالت دیگر هستند. برای این مثال، ماتریس احتمال انتقال را به صورت زیر می توان بیان کرد

$$P = \begin{pmatrix} 0/3 & 0/7 & 0 \\ 0 & 0/6 & 0/4 \\ 0/6 & 0 & 0/4 \end{pmatrix}.$$



شکل ۲-۳: یک ساختار سه حالتی از زنجیر مارکف.

مثال ۲-۷. فرض کنید وضعیت آب و هوا یک شهر از مدل زنجیر مارکف زیر پیروی کند



شکل ۲-۴: مدل‌سازی وضعیت آب و هوا بر اساس زنجیر مارکف. حالت S بیانگر روز آفتابی و حالت R بیانگر روز بارانی است.

در این صورت ماتریس احتمال انتقال به صورت زیر خواهد بود

$$P = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

طبق ماتریس احتمال انتقال داده شده، احتمال آن که امروز و فردا آفتابی ۹۰ درصد، احتمال آن که امروز آفتابی و فردا بارانی ۱۰ درصد، احتمال آن که امروز و فردا بارانی ۵۰ درصد، و احتمال آن که امروز بارانی و فردا آفتابی ۵۰ درصد است. فرض کنید $\pi^{(i)} = (\pi_1 \quad \pi_2)$ برداری باشد که مؤلفه اول، احتمال آفتابی بودن و مؤلفه دوم، احتمال بارانی بودن روز i ام را نشان می‌دهد. فرض کنید هوای امروز آفتابی باشد، یعنی $\pi^{(0)} = (1 \quad 0)$. در این صورت بنا به قانون ضرب، احتمال آفتابی

و بارانی بودن روز بعد را به صورت زیر می توان ارائه داد

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

همچنین احتمال آفتابی و بارانی بودن دو روز بعد با توجه به رابطه (۲-۳۴) به صورت زیر خواهد بود

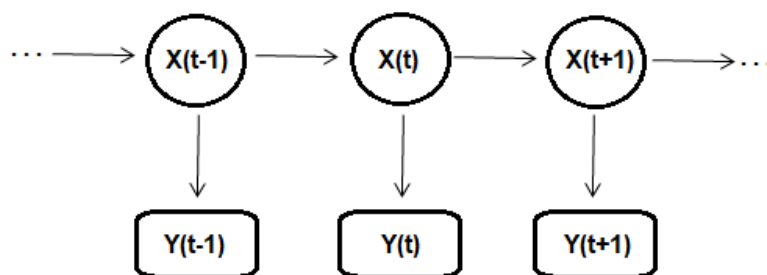
$$\pi^{(2)} = \pi^{(0)} P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 \end{pmatrix}.$$

به همین ترتیب، وضعیت آب و هوا را برای روزهای بعدتر نیز می توان ارزیابی کرد.

۲-۴-۳-۲ زنجیر مارکف پنهان

زنجیر مارکف پنهان یک مدل آماری است که در آن سیستم مدل شده به صورت یک فرایند مارکف با حالت های مشاهده نشده (پنهان) فرض می شود. در مدل عادی مارکف، حالت های زنجیر به صورت مستقیم توسط ناظر قابل مشاهده هستند، به طوری که احتمال انتقال بین حالت ها تنها پارامترهای موجود است. در یک مدل مارکف پنهان، حالت به طور مستقیم قابل مشاهده نیست، اما خروجی، بسته به حالت، قابل مشاهده است.

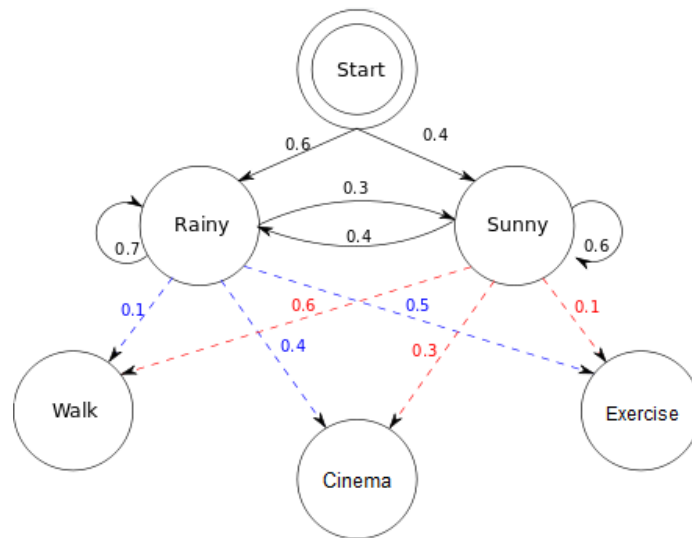
شکل (۲-۵) معماری کلی یک زنجیر مارکف پنهان را نشان می دهد. متغیر تصادفی $X(t)$ یک حالت پنهان در زمان t و متغیر تصادفی $Y(t)$ یک حالت مشاهده شده در زمان t است. فلش ها به معنای وابستگی های شرطی می باشند. از شکل مشخص است که توزیع احتمال شرطی متغیر پنهان $X(t)$ ، در همه زمان ها مقداری را ارائه می دهد که فقط به مقدار متغیر پنهان $X(t-1)$ وابسته است. به عبارتی دیگر مقادیر در زمان های $t-2$ و قبل تر از آن هیچ اثری ندارند. به طور مشابه، مقدار متغیر مشاهده شده $Y(t)$ تنها به مقدار متغیر پنهان $X(t)$ بستگی دارد. در حالت استاندارد زنجیر مارکف پنهان، فضای حالت گسسته است. با این وجود متغیرهای مشاهده شده می توانند گسسته یا پیوسته باشند.



شکل ۲-۵: معماری کلی زنجیر مارکف پنهان.

مثال ۲-۸. دو دوست به نام‌های A و B را در نظر بگیرید. آن‌ها دور از هم زندگی کرده و هر روز درباره کارهای روزمره‌شان با هم تلفنی صحبت می‌کنند. فعالیت‌های A شامل قدم‌زدن، سینما رفتن و ورزش کردن است و انتخاب اینکه او هر روز کدام کار را انجام دهد منحصراً بستگی به هوای همان روز دارد. فرد B اطلاع دقیقی از هوای محل زندگی A نداشته ولی از تمایلات کلی وی آگاه است (بنا به نوع هوا چه کاری را دوست دارد انجام دهد). بر اساس گفته‌های A در پایان هر روز، B سعی می‌کند هوای آن روز را حدس بزند. B هوا را یک زنجیر مارکف می‌پندارد که دو حالت بارانی و آفتابی دارد. او به طور مستقیم هوا را مشاهده نمی‌کند، بنابراین حالات هوا بر او پنهان است. در هر روز احتمال اینکه A به قدم‌زدن، سینما رفتن و ورزش کردن بپردازد بستگی به هوا داشته و دارای یک احتمال مشخص است. مشاهدات مسئله شرح فعالیت‌هایی است که A در انتهای هر روز به B می‌گوید.

شکل (۲-۶) یک ساختار نمونه‌ای از مثال (۲-۸) را نشان می‌دهد. از آنجایی که وضعیت آب و هوا از دید B پنهان است، وی هر یک از حالت‌های آفتابی یا بارانی را با استفاده از اطلاعات گذشته توسط احتمالاتی حدس می‌زند. این احتمالات که به احتمالات اولیه زنجیر مارکف پنهان مشهور هستند روی یال‌هایی که از حالت شروع خارج شده‌اند نمایش داده شده است. در این شکل حالت‌های آفتابی و بارانی بیانگر حالت‌های زنجیر مارکف پنهان هستند که اعداد درج شده روی یال‌های آن بیانگر احتمال انتقال از یک حالت به حالت دیگر در زنجیر مارکف پنهان است. همچنین اعداد نوشته شده روی یال‌های خط‌چین نیز نشان دهنده‌ی احتمالات خروجی هستند. به عبارت دیگر، احتمالات خروجی بیان می‌کنند که فرد A علاقه دارد در هر هوایی چه فعالیتی انجام دهد. به عنوان مثال، در هوای بارانی با احتمال 50° درصد ورزش می‌کند یا در هوای آفتابی با احتمال 60° درصد در پارک قدم می‌زند.



شکل ۲-۶: یک ساختار نمونه‌ای از زنجیر مارکف پنهان برای مثال (۲-۸).

تعریف ۲-۱۵. (ماتریس نرخ انتقال) ماتریس نرخ انتقال آرایه‌ای از اعداد است که نرخ حرکت بین حالات زنجیر مارکف زمان پیوسته را توصیف می‌کند. در ماتریس نرخ انتقال Π ، درایه π_{ij} برای $i \neq j$ نشان دهنده نرخ خروج از حالت i و رسیدن به حالت j است. عناصر قطر اصلی این ماتریس به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\pi_{ii} = - \sum_{i \neq j} \pi_{ij}.$$

بنابراین مجموع هر سطر از ماتریس نرخ انتقال برابر صفر است.

نمایش شبه مارتینگل زنجیر مارکف پنهان. فرض کنید $Z(t)$ فرایند زنجیر مارکف پنهان H حالتی با ماتریس نرخ انتقال Π باشد. همچنین فرض کنید $\mathcal{F}^Z := \{\mathcal{F}^Z(t)\}_{t \in [0, T]}$ پلایه تولید شده توسط $Z(t)$ باشد. در این صورت $Z(t)$ همواره در رابطه زیر صدق می‌کند

$$dZ(t) = \Pi Z(t)dt + dV(t),$$

که در آن $\{V(t)\}_{t \in [0, T]}$ یک فرایند $\mathbb{R}^H$ -مقدار و $\mathcal{F}^Z$ -مارتینگل است. $\{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ را فرایند شبه مارتینگل گویند، هرگاه آن را بتوان به صورت $X(t) = V(t) + A(t)$ تجزیه کرد، که در آن $V(t)$ یک فرایند مارتینگل و $A(t)$ یک فرایند سازوار با پالایه تولید شده توسط $X(t)$ است، یعنی σ -میدان تولید شده توسط $A(t)$ به پالایه تولید شده توسط $X(t)$ تعلق دارد. واضح است که هر فرایند مارتینگل، شبه مارتینگل است ولی عکس آن لزوماً صحیح نیست.

۲-۳-۴-۳ مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی

می‌خواهیم پیامدهای یک تغییر چشمگیر در رفتار یک متغیر مانند $Y(t)$ را توصیف کنیم. فرض کنید رفتار $Y(t)$ که بر اساس زمان تکامل می‌یابد از مدل اتورگرسیو زیر پیروی کند

$$Y(t) = C_1 + \phi Y(t-1) + \varepsilon_t, \quad (35-2)$$

که در آن ϕ و C_1 پارامترها ثابت هستند و $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ داده‌ها را برای $t = 1, 2, \dots, t_0$ توصیف می‌کند. اگر در زمان t_0 ، تغییر چشمگیر و معناداری در دنباله وجود داشته باشد، به جای مدل (۳۵-۲) داده‌ها را با توجه به مدل زیر ارزیابی می‌کنیم

$$Y(t) = C_2 + \phi Y(t-1) + \varepsilon_t, \quad t = t_0 + 1, \dots \quad (36-2)$$

تغییر C_1 به C_2 ممکن است به مدل کمک کند تا پیش‌بینی‌های بهتری انجام شود اما به عنوان یک قانون احتمالی برای تولید داده‌ها رضایت‌بخش نیست. مطمئناً نمی‌خواهیم ثابت کنیم که تغییر C_1 به C_2 در تاریخ t_0 یک رویکرد قطعی است که هر فردی می‌تواند آن را پیش‌بینی کند. لذا باید برخی عوامل غیر قابل پیش‌بینی که باعث به وجود آمدن تغییر می‌شود، وجود داشته باشد. بنابراین به جای مدل (۳۵-۲) که داده‌ها را تا تاریخ t_0 و مدل (۳۶-۲) که داده‌ها را پس از آن کنترل می‌کند، به یک مدل بزرگتر مانند مدل (۳۷-۲) که هر دو را شامل می‌شود نیاز داریم

$$Y(t) = C_{Z(t)} + \phi Y(t-1) + \varepsilon_t. \quad (37-2)$$

مدل (۳۷-۲) یک مدل رژیم-سوئیچینگ دو حالت نامیده می‌شود، که در آن متغیر تصادفی $Z(t)$ به عنوان یک نتیجه از تغییرات اساسی است و مقدار آن به صورت زیر به دست می‌آید

$$Z(t) = \begin{cases} 1, & t = 1, 2, \dots, t_0, \\ 2, & t = t_0 + 1, t_0 + 2, \dots \end{cases}$$

پس از شرح کامل قانون احتمال حاکم بر داده های مشاهده شده به یک مدل احتمالی از آنچه که باعث تغییر $Z(t) = ۱$ به $Z(t) = ۲$ می شود، نیاز داریم. این همان مشخصات زنجیر مارکف دو حالت است که تابع احتمال انتقال آن به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z(t) = j | Z(t-1) = i, Z(t-2) = k, \dots, Y(t-1), Y(t-2), \dots) \\ = \mathbb{P}(Z(t) = j | Z(t-1) = i). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه تغییر رژیم در مدل های رژیم-سوئیچینگ که بر اساس تغییرات آبوهوا، خرابی سیستم ها، تغییر سیاست دولت ها، جنگ، رکود اقتصادی، تورم اقتصادی و موارد دیگر به وجود می آید، غیر قابل مشاهده است، زنجیر مارکف در این مدل همواره به صورت پنهان در نظر گرفته می شود. برای بررسی و درک بیشتر مدل های رژیم-سوئیچینگ، این مفهوم را روی مدل تصادفی حرکت براونی هندسی مورد مطالعه قرار می دهیم. در ادامه، مدل رژیم-سوئیچینگ به همراه زنجیر مارکف پنهان دو حالت را در نظر می گیریم. تعمیم دادن مدل به تعداد حالت های بیشتر مشابه مدل رژیم-سوئیچینگ دو حالت است.

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ فضای احتمال و $[0, T]$ یک بازه زمانی با زمان سررسید $T > 0$ باشد. بعلاوه فرض کنید $Z := \{Z(t)\}_{t \in [0, T]}$ زنجیر پنهان مارکف با H حالت روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ باشد که مجموعه حالات زنجیر به صورت $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_H\}$ است. بدون از دست دادن کلیت می توان فرض کرد حالات زنجیر مارکف پنهان به صورت بردار یکه باشند، یعنی i امین درایه بردار e_i برای هر $i = 1, \dots, H$ برابر یک و مابقی درایه ها صفر است. فرض کنید $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j=1,\dots,H}$ ماتریس نرخ زنجیر مارکف پنهان باشد، که در آن π_{ij} شدت انتقال زنجیر از حالت e_i (رژیم i) به حالت e_j (رژیم j) است، به طوری که برای هر $i, j = 1, \dots, H$ داریم

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \pi_{ij} \geq 0, & i \neq j \\ -\sum_{i=1, i \neq j}^H \pi_{ij}, & i = j. \end{cases}$$

ماتریس انتقال زنجیر مارکف پنهان Z را به صورت $P = (p_{ij})$ در نظر بگیرید، به طوری که برای هر $p_{ij} = \mathbb{P}(Z(t_i) = e_j | Z(t_{i-1}) = e_i)$ ، $i, j = 1, \dots, H$ توجه کنید که p_{ij} به معنای سوئیچ شدن رژیم i (حالت e_i) در لحظه t_{i-1} به رژیم j (حالت e_j) در لحظه t_i است. برای مثال اگر زنجیر مارکف پنهان دارای دو حالت باشد ($H = 2$)، آنگاه داریم

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 1 - p_{11} \\ p_{21} & 1 - p_{21} \end{pmatrix}.$$

برای ارزیابی بازار تحت مدل رژیم-سوئیچینگ، فرض کنید زمان تغییر از حالت $Z(t_i)$ به حالت $Z(t_{i+1})$ یک متغیر تصادفی نمایی به صورت $Exp(\lambda)$ باشد، یعنی متغیر تصادفی که تابع توزیع تجمعی آن برای $x \geq 0$ به صورت $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ و شدت انتقال آن برابر λ است. فرض کنید $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ دو بردار غیر تصادفی باشند. در این صورت پارامترهای نرخ بهره و تلاطم وابسته به زنجیر مارکف پنهان $Z(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} r(t) := r(Z(t)) = \langle r, Z(t) \rangle = \sum_{i=1}^2 r_i \langle Z(t), e_i \rangle, \\ \sigma(t) := \sigma(Z(t)) = \langle \sigma, Z(t) \rangle = \sum_{i=1}^2 \sigma_i \langle Z(t), e_i \rangle, \quad \sigma_i > 0, \end{cases} \quad (38-2)$$

که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ نشان‌دهنده ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ است. از طرفی با توجه به نمایش شبه مارتینگل زنجیر مارکف پنهان، $Z(t)$ همواره در رابطه زیر صدق می‌کند

$$dZ(t) = \Pi Z(t) dt + dV(t), \quad (39-2)$$

که در آن $\{V(t)\}_{t \in [0, T]}$ یک فرایند $\mathbb{R}^2$ -مقدار و $\mathcal{F}^Z := \{\mathcal{F}^Z(t)\}_{t \in [0, T]}$ مارتینگل است. همچنین $\mathcal{F}^Z$ نشان‌دهنده پالایه تولید شده توسط زنجیر مارکف پنهان Z است. تعریف می‌کنیم $f(t, z) = e^{-\Pi t} z$. در این صورت از عبارت (39-2) و با به کار گرفتن لم ایتو برای $f(t, z)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} df(s, z) &= f_s ds + f_z dZ(s) + \frac{1}{2} f_{zz} dZ(s) dZ(s) \\ &= -\Pi e^{-\Pi s} Z(s) ds + e^{-\Pi s} (\Pi Z(s) ds + dV(s)) = e^{-\Pi s} dV(s). \end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری نسبت به s از 0 تا t و ضرب طرفین در $e^{\Pi t}$ داریم

$$Z(t) = e^{\Pi t} Z(0) + \int_0^t e^{\Pi(t-s)} dV(s).$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z(t)] &= e^{\Pi t} \mathbb{E}[Z(0)] \\ &= e^{\Pi t} (e_1 \times \mathbb{P}(Z(0) = e_1) + e_2 \times \mathbb{P}(Z(0) = e_2)). \end{aligned}$$

اگر $m := (e_1 \times \mathbb{P}(Z(\circ) = e_1) + e_2 \times \mathbb{P}(Z(\circ) = e_2))$ آنگاه با استفاده از روابط (۳۸-۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[r(Z(t))] &= \langle r, \mathbb{E}[Z(t)] \rangle = \langle r, me^{\Pi t} \rangle, \\ \mathbb{E}[\sigma(Z(t))] &= \langle \sigma, \mathbb{E}[Z(t)] \rangle = \langle \sigma, me^{\Pi t} \rangle.\end{aligned}\quad (۴۰-۲)$$

حال دینامیک قیمت سهام را تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی ارائه می دهیم. فرض کنید $S(t)$ قیمت سهام در لحظه $t \in [0, T]$ باشد. در این صورت تحت مدل رژیم-سوئیچینگ دو حالت حرکت براونی هندسی داریم

$$dS(i, t) = r_i S(i, t)dt + \sigma_i S(i, t)dW(t), \quad S(i, 0) = s, \quad i = 1, 2,$$

که در آن (r_1, r_2) و (σ_1, σ_2) به ترتیب نرخ بهره و تلاطم بازار را در رژیم های ۱ و ۲ بیان می کنند که وابسته به زنجیر مارکف پنهان $Z(t)$ هستند، $W(t)$ نیز حرکت براونی استاندارد تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ است. در حالت کلی، $S(t)$ می تواند به صورت زیر بیان شود

$$S(t) = \begin{cases} S(1, t) & \text{اگر } Z(t) \text{ در حالت } e_1 \text{ (در رژیم ۱) باشد} \\ S(2, t) & \text{اگر } Z(t) \text{ در حالت } e_2 \text{ (در رژیم ۲) باشد} \end{cases} \quad (۴۱-۲)$$

که در آن

$$dS(i, t) = r_i S(i, t)dt + \sigma_i S(i, t)dW(t), \quad i = 1, 2.$$

همواره فرض بر این است که زنجیر مارکف Z و حرکت براونی W مستقل از هم هستند. لذا Z به عنوان یک عامل خارجی از اطلاعات بازار محسوب می شود. فرض کنید $\mathcal{F}^W(t)$ پالایه تولید شده توسط حرکت براونی W باشد. قرار دهید $\mathcal{F}(t) := \mathcal{F}^W(t) \vee \mathcal{F}^Z(t)$ که در آن $\mathcal{F}(t)$ یک پالایه جامع شامل اطلاعات خارجی Z و حرکت براونی W است.

۴-۲ مدل سازی ارزش پرتفوی

پرتفوی یا سبد به ترکیبی از دارایی های مالی مانند سهام، اوراق قرضه و وجه نقد اشاره دارد. پرتفوی ممکن است توسط شخص سرمایه گذار، متخصصان مالی، صندوق های تأمین، بانک ها و سایر موسسات

مالی مدیریت شود. این یک اصل پذیرفته شده است که یک پرتفوی بر اساس چارچوب زمانی، تحمل ریسک سرمایه‌گذار و اهداف سرمایه‌گذاری طراحی می‌شود. در این بخش به مدل‌سازی تصادفی ارزش پرتفوی که توسط یک کارگزاری مدیریت می‌شود می‌پردازیم.

کارگزاری را در نظر بگیرید که در لحظه t دارای پرتفوی با ارزش $X(t)$ است. این پرتفوی با نرخ بهره ثابت r در یک حساب بانکی، پول پرداخت کرده و ارزش سهام در آن از یک مدل حرکت براونی هندسی به صورت زیر پیروی می‌کند

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t). \quad (۴۲-۲)$$

در واقع این پرتفوی ترکیبی از اوراق قرضه و سهام است. فرض کنید سرمایه‌گذار در لحظه t ، $\Delta(t)$ سهم از سهام را در اختیار دارد. موقعیت $\Delta(t)$ می‌تواند تصادفی اما سازوار با پالایه تولید شده توسط حرکت براونی $W(t)$ باشد. باقیمانده ارزش پرتفوی، یعنی $X(t) - \Delta(t)S(t)$ ، در حساب بانکی سرمایه‌گذاری می‌شود.

تغییرات ارزش پرتفوی سرمایه‌گذار، یعنی $dX(t)$ ، در لحظه t به دلیل دو عامل است: سود سرمایه (یا $\Delta(t)dS(t)$) در موقعیت سهام و سود بهره (یا $r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt$) در موقعیت نقدی. به عبارتی دیگر داریم

$$\begin{aligned} dX(t) &= \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt \\ &= \Delta(t)(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt \\ &= rX(t)dt + \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t). \end{aligned} \quad (۴۳-۲)$$

سه عبارت ظاهر شده در خط آخر رابطه (۴۳-۲) را می‌توان به صورت زیر تعبیر کرد:
 الف) متوسط نرخ بازده r روی پرتفوی که توسط عبارت $rX(t)dt$ بیان می‌شود،
 ب) صرفه ریسک $\alpha - r$ برای سرمایه‌گذاری در سهام که توسط عبارت $\Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt$ بیان می‌شود،
 ج) میزان تلاطم متناسب با حجم سرمایه‌گذاری سهام که توسط عبارت $\Delta(t)\sigma S(t)dW(t)$ بیان می‌شود.

حال به مقایسه ارزش تنزیل یافته سهام و ارزش تنزیل یافته پرتفوی می‌پردازیم. با به کار گرفتن

لم ایتو برای $f(t, x) = e^{-rt}x$ ، تغییرات ارزش تنزیل یافته سهام به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} & d(e^{-rt}S(t)) \\ &= df(t, S(t)) \\ &= f_t(t, S(t))dt + f_x(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, S(t))dS(t)dS(t) \\ &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) \\ &= (\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t). \end{aligned} \quad (۴۴-۲)$$

همچنین تغییرات ارزش تنزیل یافته پرتفوی با به کار گرفتن لم ایتو برای $f(t, x) = e^{-rt}x$ به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{aligned} & d(e^{-rt}X(t)) \\ &= df(t, X(t)) \\ &= f_t(t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X(t))dX(t)dX(t) \\ &= -re^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) \\ &= \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) \\ &= \Delta(t)d(e^{-rt}S(t)). \end{aligned} \quad (۴۵-۲)$$

تنزیل دادن ارزش سهام، میانگین نرخ بازده را از α به $\alpha - r$ تبدیل می کند. بعلاوه تنزیل دادن ارزش پرتفوی، نرخ بهره بدن ریسک r را حذف می کند. حال خط آخر (۴۴-۲) را با خط ماقبل آخر (۴۵-۲) مقایسه کنید. خط آخر (۴۵-۲) نشان می دهد که تغییر در ارزش تنزیل یافته پرتفوی صرفاً به دلیل تغییر در قیمت تنزیل یافته سهام است.

۲-۴-۱ پوشش ریسک

پوشش ریسک به گونه ای از سرمایه گذاری اشاره دارد که باعث کاهش ریسک سود و زیان پرتفوی سرمایه گذاری می شود. در شرایط عادی، پوشش ریسک می تواند از ابزارهای مالی گوناگونی مانند برگه سهام، پیمان های آتی، قراردادهای سوآپ و اختیار معامله، همچنین گونه های مختلف از ابزارهای مشتقه، قراردادهای آتی و معاملات فرابورس تشکیل شود.

قرارداد اختیار معامله یکی از ابزارهای مهندسی مالی برای مدیریت ریسک است. تاریخچه این ابزار به دهه ۱۹۷۰ و اوایل دهه ۱۹۸۰ برمی‌گردد. اختیار، مشتقه‌ای مالی است که در بازارهای مالی معامله می‌شود و دو نوع بسیار مهم آن، اختیارات اروپایی و آمریکایی هستند. اختیار معامله توافقی است بین فرد واگذارکننده و فردی که حق خرید یا فروش دارایی تعهد شده را دارد. اختیار برای دارنده آن یک تعهد را به همراه نمی‌آورد بلکه یک حق را به وجود می‌آورد. بدین صورت که دارنده اختیار حق خرید یا فروش دارایی خاصی را با قیمت توافقی مشخص، در تاریخ مشخص از آینده خواهد داشت.

در این کتاب، مسئله پرتفوی پوشش ریسک را بر اساس اختیار معامله از نوع خرید اروپایی بیان می‌کنیم. اختیارات اروپایی و نحوه قیمت‌گذاری آن‌ها در فصل چهار به طور مفصل پرداخته شده است. با این حال در این بخش برای پیش بردن اهداف پرتفوی پوشش ریسک با استفاده از اختیار خرید اروپایی تنها به تعریف این نوع اختیار بسنده می‌کنیم.

تعریف ۲-۱۶. (اختیار خرید اروپایی) این نوع اختیار معامله به دارنده، اختیار خرید یا فروش دارایی مالی را فقط در تاریخ سررسید می‌دهد. بنابراین دارنده این نوع اختیار معامله در طول دوره تا تاریخ سررسید، حق اعمال آن را نخواهد داشت. به این نوع اختیار اصطلاحاً اختیار معامله اروپایی می‌گویند. فرض کنید T زمان سررسید، $S(T)$ ارزش سهام در زمان T و $K > 0$ قیمت توافقی ثابت باشد. در این صورت بازده اختیار خرید اروپایی (ارزش اختیار در لحظه T) برابر $\max\{S(T) - K, 0\}$ است. همچنین با فرض اینکه r نرخ بهره ثابت و $\mathcal{F}(t)$ اطلاعات بازار سهام تا لحظه t است، ارزش اختیار خرید اروپایی در لحظه t ، توسط امید ریاضی شرطی $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0) | \mathcal{F}(t)]$ محاسبه شود.

از آنجایی که مبلغ اختیار در لحظه $t = 0$ توسط فروشنده از خریدار دریافت می‌شود، قیمت اختیار در این لحظه از اهمیت بسیاری برخوردار است. در سال ۱۹۷۰، آقایان فیشر بلک و مایرن شولز، مسئله قیمت‌گذاری اختیار اروپایی را زمانی که فرایند قیمت سهام از مدل حرکت براونی هندسی پیروی می‌کرد، مورد ارزیابی قرار دادند و به حل امید ریاضی $e^{-rT}\mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0)]$ پرداختند. حل این مسئله به افتخار این دو دانشمند بزرگ به فرمول بلک-شولز مشهور شد.

قضیه ۲-۵. (فرمول بلک-شولز) فرض کنید $S(t)$ قیمت سهام در لحظه $0 \leq t \leq T$ با زمان سررسید T ، نرخ بهره r و تلاطم σ باشد. در این صورت ارزش اختیار خرید اروپایی در لحظه $t = 0$ تحت مدل حرکت براونی هندسی (۲-۱۹) به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mu^{eur} := C(S_0, K, T, r, \sigma) = S(0)\mathcal{N}(d_+) - e^{-rT}K\mathcal{N}(d_-), \quad (46-2)$$

که در آن K قیمت توافقی و

$$d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\log \frac{S(\circ)}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T \right], \quad d_+ = d_- + \sigma\sqrt{T}.$$

بعلاوه $\mathcal{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.

اثبات. با توجه به عبارت (۲-۲۰) قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی در زمان سررسید T به صورت زیر است

$$\begin{aligned} S(T) &= S(\circ) \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W(T) \right\} \\ &= S(\circ) \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T}Y \right\}, \end{aligned}$$

که در آن Y متغیر تصادفی نرمال استاندارد و پارامتر نرخ بهره بدون ریسک r جایگزین پارامتر میانگین نرخ بازده μ شده است. علت انجام این کار را در بخش ۲-۵-۱ این فصل به طور مفصل مورد مطالعه قرار خواهیم داد. از طرفی ارزش اختیار خرید اروپایی در لحظه $t = \circ$ توسط امید ریاضی زیر محاسبه می شود

$$\mu^{eur} = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max \left(S(T) - K, \circ \right) \right].$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \mu^{eur} &= e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max \left(S(\circ) \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T}Y \right\} - K, \circ \right) \right] \\ &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\max \left(S(\circ) \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T}y \right\} - K, \circ \right) \right] e^{-\frac{1}{2}y^2} dy. \end{aligned} \quad (۴۷-۲)$$

عبارت $\max \left(S(\circ) \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T}y \right\} - K, \circ \right)$ مثبت است، اگر و تنها اگر

$$S(\circ) \exp \left\{ (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T - \sigma\sqrt{T}y \right\} > K.$$

با کمی ساده‌سازی عبارت جبری، نامساوی فوق معادل با عبارت زیر است

$$y < d_- = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log \frac{S(\circ)}{K} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right).$$

بنابراین با توجه به عبارت (۴۷-۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mu^{eur} &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} \left(S(\circ) \exp \left\{ -\sigma\sqrt{T}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T \right\} - K \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} S(\circ) \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} - \sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2} \right\} dy \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} e^{-rT} K e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ &= \frac{S(\circ)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_-} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y + \sigma\sqrt{T})^2 \right\} dy - e^{-rT} K \mathcal{N}(d_-) \\ &= \frac{S(\circ)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_- + \sigma\sqrt{T}} \exp \left\{ -\frac{z^2}{2} \right\} dz - e^{-rT} K \mathcal{N}(d_-) \\ &= S(\circ) \mathcal{N}(d_+) - e^{-rT} K \mathcal{N}(d_-), \end{aligned}$$

□

که در آن $d_+ = d_- + \sigma\sqrt{T}$.

تعریف ۱۷-۲. (پرتفوی پوشش ریسک) فرض کنید $X(t)$ ارزش پرتفوی سرمایه‌گذار در لحظه t باشد که به صورت ترکیبی از ارزش سهام و حساب بانکی است. همچنین فرض کنید $C(t, S(t))$ ارزش اختیار خرید اروپایی در لحظه t با زمان سررسید T باشد. در این صورت پرتفوی این سرمایه‌گذار پوشش ریسک داده خواهد شد، اگر ارزش پرتفوی در هر لحظه برابر ارزش اختیار باشد.

با توجه به تعریف (۱۷-۲)، اگر $C(t, S(t))$ ارزش اختیار خرید اروپایی در لحظه t با زمان سررسید T باشد، پرتفوی پوشش ریسک که در لحظه t دارای ارزش $X(t)$ است، در معادله زیر صدق می‌کند

$$X(t) = C(t, S(t)).$$

بنابراین تغییرات ارزش تنزیل‌یافته پرتفوی پوشش ریسک برابر تغییرات ارزش تنزیل‌یافته اختیار خرید اروپایی خواهد بود و داریم

$$d(e^{-rt}X(t)) = d(e^{-rt}C(t, S(t))), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (۴۸-۲)$$

فرض کنید در لحظه t ، سرمایه گذار $\Delta(t)$ سهم از سهام را در اختیار دارد. در این صورت با جایگذاری رابطه (۴۵-۲) در معادله (۴۸-۲) به دست می آید

$$\begin{aligned} & \Delta(t)(\alpha - r)e^{-rt}S(t)dt + \Delta(t)\sigma e^{-rt}S(t)dW(t) \\ &= d(e^{-rt}C(t, S(t))) \\ &= -re^{-rt}C(t, T)dt + e^{-rt}dC(t, S(t)). \end{aligned}$$

با حذف عامل تنزیل e^{-rt} از طرفین عبارت بالا خواهیم داشت

$$\Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \sigma\Delta(t)S(t)dW(t) = -rC(t, T)dt + dC(t, S(t)). \quad (۴۹-۲)$$

با به کار گرفتن لم ایتو برای $C(t, S(t))$ داریم

$$\begin{aligned} dC(t, S(t)) &= C_t(t, S(t))dt + C_S(t, S(t))dS(t) + \frac{1}{2}C_{SS}(t, S(t))dS(t)dS(t) \\ &= C_t(t, S(t))dt + C_S(t, S(t))(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) \\ &\quad + \frac{1}{2}C_{SS}(t, S(t))(\alpha S(t)dt + \sigma S(t)dW(t))^2 \\ &= (C_t(t, S(t)) + \alpha C_S(t, S(t))S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 C_{SS}(t, S(t))S^2(t))dt \\ &\quad + \sigma C_S(t, S(t))S(t)dW(t). \end{aligned}$$

با جایگذاری عبارت فوق در رابطه (۴۹-۲) به دست می آید

$$\begin{aligned} & \Delta(t)(\alpha - r)S(t)dt + \Delta(t)\sigma S(t)dW(t) \\ &= (-rC(t, T) + C_t(t, S(t)) + \alpha C_S(t, S(t))S(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sigma^2 C_{SS}(t, S(t))S^2(t))dt + \sigma C_S(t, S(t))S(t)dW(t). \quad (۵۰-۲) \end{aligned}$$

در نهایت با برابر قرار دادن ضریب $dW(t)$ در طرفین رابطه (۵۰-۲) خواهیم داشت

$$\Delta(t) = C_S(t, S(t)) = \frac{\partial C(t, S(t))}{\partial S(t)}. \quad (۵۱-۲)$$

در ادبیات ریاضیات مالی، رابطه فوق که تغییرات قیمت اختیار نسبت به قیمت سهام را بیان می‌کند، به قانون دلتا-پوشش ریسک مشهور است. این رابطه نشان می‌دهد که سرمایه‌گذار باید چه اندازه سهام بخرد یا بفروشد تا دارایی خود را پوشش ریسک دهد. برابر قراردادن ضریب dt در طرفین رابطه (۵۰-۲) و جایگذاری $C_S(t, S(t))$ به جای $\Delta(t)$ ، به‌دست می‌دهد

$$C_S(t, S(t))(\alpha - r)S(t) = -rC(t, T) + C_t(t, S(t)) + \alpha C_S(t, S(t))S(t) + \frac{1}{2}\sigma^2 C_{SS}(t, S(t))S^2(t).$$

با حذف عبارت $\alpha C_S(t, S(t))S(t)$ از طرفین رابطه بالا، داریم

$$rC(t, S(t)) = C_t(t, S(t)) + rS(t)C_S(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)C_{SS}(t, S(t)),$$

$$\forall t \in [0, T]. \quad (52-2)$$

رابطه (۵۲-۲) به معادله بلک-شولز مشهور است و با حل آن ارزش اختیار خرید اروپایی در لحظه t به‌دست می‌آید.

۵-۲ اندازه احتمال معادل

در ادبیات ریاضیات مالی، اندازه مارتینگل معادل بیانگر اندازه احتمالی است که قیمت سهام تحت آن دقیقاً برابر با مقدار مورد انتظار شرطی برای قیمت تنزیل یافته همان سهام است. به طور دقیق‌تر، اگر $S(t)$ قیمت سهام در لحظه t و $\mathcal{F}(t)$ تمام اطلاعات بازار تا این لحظه باشد، آنگاه با فرض اینکه $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}$ امید ریاضی تحت اندازه مارتینگل معادل $\mathbb{Q}$ است، داریم

$$e^{-rt}S(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-ru}S(u) \mid \mathcal{F}(t)], \quad u \geq t.$$

در نتیجه به‌دست می‌آید

$$S(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-r(u-t)}S(u) \mid \mathcal{F}(t)].$$

با توجه به اینکه قیمت تنزیل یافته سهام تحت این اندازه احتمال یک فرایند تصادفی مارتینگل است، مهم‌ترین مزیت استفاده از اندازه مارتینگل معادل که از آن به عنوان اندازه احتمال ریسک خنثی یاد

می شود آن است که مدل بازار تحت این اندازه احتمال شرایط آربیتراژی را نمی پذیرد و معامله گران می توانند در یک محیط عادلانه دادوستد کنند. این در حالی است که بازار تحت اندازه احتمال واقعی که معادل با اندازه ریسک خنثی است می تواند دارای شرایط آربیتراژی باشد. در این بخش به بررسی اندازه احتمال معادل پرداخته و چند مثال را برای تشریح آن ارائه می دهیم.

تعریف ۲-۱۸. دو اندازه احتمال $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ روی $(\Omega, \mathcal{F})$ معادل گفته می شوند، اگر موافق باشند. این بدان معناست که اگر احتمال رخداد پیشامدی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ برابر صفر باشد، آنگاه احتمال رخداد همان پیشامد در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ نیز برابر صفر است و برعکس. به صورت معادل می توان بیان کرد: دو اندازه احتمال $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ روی $(\Omega, \mathcal{F})$ معادل هم هستند، اگر احتمال رخداد پیشامدی در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ بزرگتر اکید از صفر باشد، آنگاه احتمال رخداد همان پیشامد در فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ نیز بزرگتر اکید از صفر باشد و برعکس.

تعریف ۲-۱۹. (مشتق رادون-نیکودیم)^۱ فرض کنید Z متغیر تصادفی مثبت روی فضای نمونه ای پیوسته Ω باشد، به طوری که $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$. تعریف می کنیم

$$Z(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}(\omega)}{d\mathbb{P}(\omega)}, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (53-2)$$

در این صورت $Z(\omega)$ را مشتق رادون-نیکودیم $\mathbb{Q}$ نسبت به $\mathbb{P}$ گویند. همچنین اگر Ω بیانگر فضای نمونه ای گسسته باشد، آنگاه چگالی رادون-نیکودیم $Z(\omega)$ با فرض $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$ به صورت زیر تعریف می شود

$$Z(\omega) = \frac{\mathbb{Q}(\omega)}{\mathbb{P}(\omega)}, \quad \forall \omega \in \Omega. \quad (54-2)$$

با به کار گرفتن معادلات (۵۳-۲) و (۵۴-۲)، دو رابطه مهم زیر به ترتیب در فضای احتمال گسسته و پیوسته به دست می آیند:

الف) با فرض اینکه متغیر تصادفی X گسسته است، داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{Q}(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) Z(\omega) \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[ZX]; \end{aligned} \quad (55-2)$$

¹Radon-Nikodym

ب) با فرض اینکه متغیر تصادفی X پیوسته است، داریم

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] &= \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) d\mathbb{Q}(\omega) \\ &= \int_{\omega \in \Omega} X(\omega) Z(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[ZX].\end{aligned}\quad (۵۶-۲)$$

توسط روابط فوق می‌توانیم امید ریاضی تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ را به امید ریاضی تحت اندازه احتمال معادل $\mathbb{Q}$ تبدیل کنیم.

مثال ۲-۹. یک شی چهار وجهی اریب را که وجوه آن از اعداد متمایز ۱ تا ۴ نام‌گذاری شده‌اند، در نظر بگیرید. در این صورت فضای نمونه‌ای برابر $\Omega = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ خواهد بود. فرض کنید $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یک متغیر تصادفی باشد، به‌طوری که $\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(X = ۱) = \frac{۱}{۸}, \quad \mathbb{P}(X = ۲) = \frac{۳}{۸}, \quad \mathbb{P}(X = ۳) = \frac{۲}{۸}, \quad \mathbb{P}(X = ۴) = \frac{۲}{۸},$$

که در آن $\mathbb{P}$ بیانگر اندازه احتمال واقعی است. حال اندازه احتمال دیگری به نام $\mathbb{Q}$ را چنان در نظر می‌گیریم که

$$\mathbb{Q}(X = ۱) = \frac{۴}{۸}, \quad \mathbb{Q}(X = ۲) = \frac{۱}{۸}, \quad \mathbb{Q}(X = ۳) = \frac{۲}{۸}, \quad \mathbb{Q}(X = ۴) = \frac{۱}{۸}.$$

در این صورت چگالی رادون-نیکودیم $Z(\omega)$ به عنوان یک متغیر تصادفی، با توجه به رابطه (۵۴-۲) به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$Z(\omega) = \left\{۴, \frac{۱}{۳}, ۱, \frac{۱}{۲}\right\},$$

که در آن رابطه $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = ۱$ برقرار است، زیرا

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = \left(۴ \times \frac{۱}{۸}\right) + \left(\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۸}\right) + \left(۱ \times \frac{۲}{۸}\right) + \left(\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۸}\right) = ۱.$$

از آنجایی که $\mathbb{P}(Z > ۰) = ۱$ ، با توجه به رابطه (۵۴-۲) داریم

$$\mathbb{P}(X = i) > ۰ \iff \mathbb{Q}(X = i) > ۰, \quad i = ۱, ۲, ۳, ۴.$$

بنابراین دو اندازه احتمال $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ معادل هستند. بعلاوه برای هر متغیر تصادفی مانند X داریم

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[ZX] \quad \text{زیرا}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X] &= (1 \times \frac{4}{8}) + (2 \times \frac{1}{8}) + (3 \times \frac{2}{8}) + (4 \times \frac{1}{8}) = 2, \\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[ZX] &= (4 \times \frac{1}{8}) + (\frac{2}{3} \times \frac{3}{8}) + (3 \times \frac{2}{8}) + (\frac{4}{2} \times \frac{1}{8}) = 2.\end{aligned}$$

مثال ۲-۱۰. فرض کنید X متغیر تصادفی نرمال استاندارد روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و θ پارامتر ثابت باشد. قرار می‌دهیم

$$Z = \exp \left\{ -\theta X - \frac{1}{2}\theta^2 \right\}.$$

در این صورت $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$ و با توجه به رابطه (۲-۵۳) به دست می‌آید

$$d\mathbb{Q} = Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق، اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\mathbb{Q}(A) = \int_A Z(\omega)d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

از آنجایی که $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ ، با توجه به رابطه (۲-۵۳) داریم

$$\mathbb{P}(A) > 0 \iff \mathbb{Q}(A) > 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

بنابراین دو اندازه احتمال $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ معادل هستند.

حال نشان می‌دهیم متغیر تصادفی $X + \theta$ تحت اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ دارای توزیع نرمال استاندارد است. می‌دانیم دو متغیر تصادفی از یک توزیع پیروی می‌کنند، اگر دارای تابع مولد گشتاور یکسانی باشند. از طرفی تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی نرمال استاندارد Y تحت هر اندازه احتمالی به صورت زیر بیان می‌شود

$$\mathbb{E}[e^{tY}] = e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

لذا کفایت نشان دهیم تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی $X + \theta$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ برابر $e^{\frac{1}{2}t^2}$ است. به عبارتی دیگر باید ثابت کنیم

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{t(X+\theta)}] = e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

که در آن X متغیر تصادفی نرمال استاندارد روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است. با استفاده از رابطه (۵۶-۲) داریم

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{t(X+\theta)}] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Ze^{t(X+\theta)}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{-\theta X - \frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{t(X+\theta)}] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{(t-\theta)X + t\theta - \frac{1}{2}\theta^2}] \\ &= e^{t\theta - \frac{1}{2}\theta^2} \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[e^{(t-\theta)X}] \\ &= e^{t\theta - \frac{1}{2}\theta^2} \cdot e^{\frac{1}{2}(t-\theta)^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}. \end{aligned}$$

۲-۵-۱ اندازه احتمال ریسک خنثی

همان‌طور که در ابتدای بخش قبل اشاره شد، در ادبیات ریاضیات مالی، اندازه احتمال معادل از اهمیت بسیاری برخوردار است. به عنوان مثال، با تعریف یک اندازه احتمال معادل از نوع مارتینگل (یا اندازه احتمال ریسک خنثی) می‌توان بازار را بدون شرایط آربیتراژی بر اساس یک مدل تصادفی توصیف کرد. اندازه احتمال ریسک خنثی یکی از اندازه احتمال‌های معادل است به‌طوری که تحت این اندازه احتمال، قیمت تنزیل‌یافته سهام مارتینگل است. برای یک مدل بازار بی‌شمار اندازه احتمال معادل می‌توان تعریف کرد، به طوری که اندازه احتمال ریسک خنثی به عنوان یکی از این اندازه‌ها به صورت منحصر به فرد تعریف می‌شود. در ادامه این بخش تحت اندازه احتمال ریسک خنثی، دینامیک قیمت سهام را که از مدل حرکت براونی هندسی (۲-۱۹) پیروی می‌کند بیان می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا به بیان قضیه بیز^۱ که در ارزیابی قیمت سهام تحت اندازه احتمال ریسک خنثی نقش بسزایی ایفا می‌کند می‌پردازیم. سپس قضیه گیرسانف^۲ را به عنوان یکی از قضایای مهم در قیمت‌گذاری دارایی بیان می‌کنیم.

^۱Bayes

^۲Girsanov

قضیه ۲-۶. (قضیه بیز) فرض کنید X متغیر تصادفی باشد که روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ تعریف شده است. همچنین فرض کنید $\mathbb{Q}$ اندازه احتمال دیگری روی $(\Omega, \mathcal{F})$ با مشتق رادون-نیکودیم زیر باشد

$$Z(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}(\omega)}{d\mathbb{P}(\omega)}, \quad \omega \in \Omega.$$

در این صورت داریم

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ(t)|\mathcal{F}(s)]}{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z(t)|\mathcal{F}(s)]}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

اثبات. نشان می دهیم

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)] \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z(t)|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ(t)|\mathcal{F}(s)]. \quad (57-2)$$

با انتگرال گیری از سمت چپ رابطه (۵۷-۲) روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ، برای هر $A \in \mathcal{F}(s)$ داریم

$$\begin{aligned} & \int_A \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)] \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z(t)|\mathcal{F}(s)] d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)]|\mathcal{F}(s)] d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_A Z(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)] d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_A Z(t)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)] \left(\frac{1}{Z(t)} d\mathbb{Q}(\omega) \right) \\ &= \int_A \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)] d\mathbb{Q}(\omega) \\ &= \int_A X d\mathbb{Q}(\omega). \end{aligned} \quad (58-2)$$

در تساوی اول از این ویژگی استفاده شده است که $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}(s)]$ متغیر تصادفی $\mathcal{F}(s)$ -اندازه پذیر است و می تواند داخل امید ریاضی شرطی $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\cdot|\mathcal{F}(s)]$ شود. در تساوی دوم از این حقیقت استفاده شده است که برای هر متغیر تصادفی مانند H که روی $(\Omega, \mathcal{F}(t))$ تعریف شده است، امید ریاضی شرطی $\mathbb{E}[H|\mathcal{F}(s)]$ یک برآوردگر نااریب برای H است، یعنی $\mathbb{E}[\mathbb{E}[H|\mathcal{F}(s)]] = \mathbb{E}[H]$ در

تساوی پنجم نیز از این ویژگی استفاده شده است که برای هر متغیر تصادفی مانند H روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ و برای هر $A \in \mathcal{F}(s)$ ، همواره داریم

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[H|\mathcal{F}(s)]d\mathbb{Q}(\omega) = \int_A H(\omega)d\mathbb{Q}(\omega).$$

رابطه فوق به خاصیت میانگین‌پذیری جزئی متغیرهای تصادفی مشهور است. حال با انتگرال‌گیری از سمت راست معادله (۵۷-۲) روی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و برای هر $A \in \mathcal{F}(s)$ داریم

$$\int_A \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[XZ(t)|\mathcal{F}(s)]d\mathbb{P}(\omega) = \int_A XZ(t)d\mathbb{P}(\omega) = \int_A Xd\mathbb{Q}(\omega). \quad (۵۹-۲)$$

با مقایسه طرفین روابط (۵۸-۲) و (۵۹-۲) اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۲-۷. (قضیه گیرسائف) فرض کنید $W(t)$ برای $0 \leq t \leq T$ ، حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و $\mathcal{F} := \{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ پالایه تولید شده توسط $W(t)$ باشد. همچنین فرض کنید θ یک پارامتر ثابت باشد، به‌طوری که

$$B(t) = W(t) + \theta t. \quad (۶۰-۲)$$

قرار دهید

$$Z(t) = \exp \left\{ -\theta(t)W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t \right\}, \quad (۶۱-۲)$$

و اندازه احتمال جدید $\mathbb{Q}$ را به صورت زیر تعریف کنید

$$d\mathbb{Q}(\omega) = Z(t)d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

در این صورت دو اندازه احتمال $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ معادل هستند. همچنین $B(t)$ تحت اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ ، حرکت براونی است.

اثبات. از آنجایی که $\mathbb{P}(Z > 0) = 1$ ، با توجه به رابطه (۵۳-۲) داریم

$$\mathbb{P}(A) > 0 \iff \mathbb{Q}(A) > 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

بنابراین دو اندازه احتمال $\mathbb{P}$ و $\mathbb{Q}$ معادل هستند.

حال نشان می‌دهیم فرایند $B(t)$ تحت اندازه $\mathbb{Q}$ یک حرکت براونی است. برای این منظور کافیست ثابت کنیم $B(t)$ در چهار شرط قضیه لوی صدق می‌کند.

(الف) از آنجایی که $W(0) = 0$ برابر صفر است، پس $B(0) = W(0) + \theta \times 0 = 0$.

(ب) چون $W(t)$ تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ یک حرکت براونی را توصیف می‌کند، دارای مسیرهای پیوسته است. همچنین θt نیز پیوسته است. بنابراین فرایند $B(t) = W(t) + \theta t$ دارای مسیرهای پیوسته خواهد بود.

(ج) $B(t)$ دارای تغییرات مرتبه دوم dt است، زیرا

$$dB(t)dB(t) = (dW(t) + \theta dt)^2 = dW(t)dW(t) = dt.$$

(د) فرایند تصادفی $B(t)$ تحت اندازه $\mathbb{Q}$ مارتینگل است. برای نشان دادن این موضوع ابتدا متغیر تصادفی زیر را تعریف می‌کنیم

$$X(t) = -\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t.$$

قرار دهید $f(x) = e^x$ ، در این صورت با استفاده از لم ایتو داریم

$$\begin{aligned} dZ(s) &= df(X(s)) \\ &= f'(X(s))dX(s) + \frac{1}{2}f''(X(s))dX(s)dX(s) \\ &= e^{X(s)}\left(-\theta dW(s) - \frac{1}{2}\theta^2 ds\right) + \frac{1}{2}e^{X(s)}\theta^2 ds = -\theta Z(s)dW(s). \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از طرفین عبارت فوق نسبت به s از 0 تا t خواهیم داشت

$$Z(t) = Z(0) - \theta \int_0^t Z(s)dW(s).$$

بنابراین $Z(t)$ یک انتگرال ایتو و تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ یک فرایند مارتینگل است. داریم

$$\begin{aligned} d(B(t)Z(t)) &= B(t)dZ(t) + Z(t)dB(t) + dB(t)dZ(t) \\ &= -\theta B(t)Z(t)dW(t) + Z(t)dW(t) + \theta Z(t)dt \\ &\quad + (dW(t) + \theta dt)(-\theta Z(t)dW(t)) \\ &= (-\theta B(t) + 1)Z(t)dW(t). \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $B(\circ)$ برابر صفر است، با انتگرال‌گیری از طرفین عبارت فوق از $\circ$ تا t داریم

$$B(t)Z(t) = \int_{\circ}^t (-\theta B(s) + 1)Z(s)dW(s).$$

بنابراین $B(t)Z(t)$ یک انتگرال ایتو و تحت اندازه $\mathbb{P}$ یک فرایند مارتینگل است. با استفاده از قضیه (۶-۲) به دست می‌آید

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B(t)|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[B(t)Z(t)|\mathcal{F}(s)] = \frac{1}{Z(s)}B(s)Z(s) = B(s).$$

در نتیجه $B(t)$ تحت اندازه $\mathbb{Q}$ مارتینگل است. $\square$

تعریف ۲-۴۰. فرض کنید $\mathbb{P}$ اندازه احتمال واقعی باشد. در این صورت اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ را یک اندازه احتمال ریسک خنثی گویند، هرگاه $\mathbb{Q}$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{P}$ معادل باشند،

ب) تحت اندازه $\mathbb{Q}$ ، قیمت تنزیل‌یافته سهام مارتینگل باشد.

قضیه ۲-۸. فرض کنید $S(t)$ قیمت سهام در لحظه t باشد که تحت اندازه احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ توسط مدل حرکت براونی هندسی (۲-۱۹) توصیف می‌شود. در این صورت تحت اندازه احتمال ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ ، دینامیک قیمت سهام به صورت زیر بیان می‌شود

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad (۲-۶۲)$$

که در آن σ تلاطم بازار، r نرخ بهره بدون ریسک و $B(t)$ حرکت براونی تحت اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ است.

اثبات. با توجه به مدل حرکت براونی هندسی (۲-۱۹)، فرم دیفرانسیلی قیمت تنزیل‌یافته سهام را تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ به صورت زیر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} d(e^{-rt}S(t)) &= S(t)de^{-rt} + e^{-rt}dS(t) \\ &= -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}(\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)) \\ &= e^{-rt}(\mu - r)S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t), \end{aligned}$$

که در آن μ میانگین نرخ بازده و $W(t)$ حرکت براونی تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ است. از طرفی طبق قضیه گیرسائف می دانیم، $B(t) = W(t) + \theta t$ حرکت براونی تحت اندازه احتمال معادل $\mathbb{Q}$ است. بنابراین با جایگذاری $B(t) - \theta t$ به جای $W(t)$ ، دینامیک قیمت تنزیل یافته سهام تحت اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{aligned} d(e^{-ru}S(u)) &= e^{-ru}(\mu - r)S(u)du + \sigma e^{-ru}S(u)dW(u) \\ &= e^{-ru}(\mu - r)S(u)du + \sigma e^{-ru}S(u)(dB(u) - \theta du) \\ &= e^{-ru}(\mu - r - \theta\sigma)S(u)du + \sigma e^{-ru}S(u)dB(u). \quad (۶۳-۲) \end{aligned}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه (۶۳-۲) نسبت به u از $\circ$ تا t داریم

$$e^{-rt}S(t) = S(\circ) + (\mu - r - \theta\sigma) \int_{\circ}^t e^{-ru}S(u)du + \sigma \int_{\circ}^t e^{-ru}S(u)dB(u). \quad (۶۴-۲)$$

با توجه به اینکه $B(t)$ حرکت براونی تحت اندازه احتمال معادل $\mathbb{Q}$ است، پس تحت این اندازه احتمال، انتگرال دوم در رابطه (۶۴-۲) یک انتگرال ایتو و به دنبال آن یک فرایند مارتینگل خواهد بود. از طرفی بنا به تعریف (۲-۲۰)، اندازه احتمال معادل $\mathbb{Q}$ بیانگر اندازه احتمال ریسک خنثی است، اگر قیمت تنزیل یافته سهام تحت این اندازه احتمال مارتینگل باشد. این گزاره برای عبارت (۶۴-۲) صادق است، اگر و تنها اگر انتگرال اول در رابطه (۶۴-۲) برابر صفر باشد. به عبارتی دیگر باید داشته باشیم

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}. \quad (۶۵-۲)$$

در ادبیات مالی، θ به دست آمده در رابطه (۶۵-۲) را قیمت بازاری ریسک می گویند. با جایگذاری عبارت (۶۵-۲) در رابطه (۶۴-۲)، تحت اندازه احتمال ریسک خنثی $\mathbb{Q}$ به دست می آید

$$e^{-rt}S(t) = S(\circ) + \sigma \int_{\circ}^t e^{-ru}S(u)dB(u).$$

در نهایت با گرفتن دیفرانسیل از طرفین رابطه فوق خواهیم داشت

$$d(e^{-rt}S(t)) = \sigma e^{-rt}S(t)dB(t).$$

بنابراین

$$-re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t) = \sigma e^{-rt}S(t)dB(t),$$

□

و حکم به دست می آید.

۶-۲ تمرینات فصل دوم

۱- جواب دقیق معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را به دست آورید

$$dX(t) = rdt + \alpha X(t)dW(t),$$

که در آن r و α پارامترهای ثابت هستند.

(راهنمایی: ابتدا فرایند $Y(t) = \exp(-\alpha W(t) + \frac{1}{2}\alpha^2 t)$ را تعریف کرده و سپس لم ایتو را برای $X(t)Y(t)$ به کار بگیرید.)

۲- فرض کنید $X := \{X(t)\}_{t \in [0, T]}$ یک فرایند تصادفی و $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ پالایه تولید شده توسط آن باشد. با استفاده از لم ایتو بررسی کنید کدام یک از فرایندهای زیر مارتینگل هستند:

الف) $X(t) = W(t) + \frac{1}{2}t$

ب) $X(t) = W^2(t)$

ج) $X(t) = t^2 W(t) - 2 \int_0^t s W(s) ds$

۳- فرض کنید $A := \{A(t)\}_{t \in [0, T]}$ یک فرایند تصادفی و $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ حرکت براونی با پالایه تولید شده $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [0, T]}$ است. فرایند تصادفی A را چنان پیدا کنید که $W^4(t) + A(t)$ یک فرایند مارتینگل باشد.

(راهنمایی: ابتدا به محاسبه امید ریاضی شرطی $\mathbb{E}[(W(t) - W(s)) + W(s)]^4 | \mathcal{F}(s)$ برای $s < t$ بپردازید.)

۴- فرض کنید قیمت سهام دو شرکت از مدل‌های حرکت براونی هندسی زیر پیروی کند

$$dS_1(t) = r_1 S_1(t)dt + \sigma_1 S_1(t)dW_1(t),$$

$$dS_2(t) = r_2 S_2(t)dt + \sigma_2 S_2(t)dW_2(t),$$

که در آن r_i و σ_i به ترتیب نرخ بهره و تلاطم شرکت $i \in \{1, 2\}$ است. فرض کنید ضریب همبستگی بین دو حرکت براونی $W_1(t)$ و $W_2(t)$ برابر ρ باشد. در این صورت کوواریانس بین قیمت سهام شرکت‌ها را به دست آورده و نشان دهید ضریب همبستگی بین آن‌ها برابر ρ است. این بدان معنی است که تغییرات قیمت سهام شرکت اول توسط عامل ρ بر قیمت سهام شرکت دوم تأثیر می‌گذارد. به عبارتی دیگر اگر ρ منفی باشد، افزایش (کاهش) قیمت سهام شرکت اول باعث کاهش

(افزایش) قیمت سهام شرکت دوم می شود. همچنین اگر ρ مثبت باشد، افزایش (کاهش) قیمت سهام شرکت اول باعث افزایش (کاهش) قیمت سهام شرکت دوم می شود.

۵- فرض کنید $X(t)$ ارزش پرتفوی سرمایه گذار در لحظه t باشد که شامل ورقه مشتقه C و سهام S است، به طوری که دینامیک قیمت سهام از مدل تلاطم تصادفی هستون به صورت زیر پیروی کند

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW^{(1)}(t), & S(0) = s, \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW^{(2)}(t), & V(0) = v, \end{cases}$$

که در آن $W^{(1)}(t)$ و $W^{(2)}(t)$ دو حرکت براونی با ضریب همبستگی $\rho \in (-1, 1)$ ، r نرخ بهره ثابت و θ ، κ و σ ثابت های مثبت هستند که تعبیر آن ها به ترتیب، سرعت بازگشت به میانگین، سطح بازگشت به میانگین و تلاطم برای تلاطم است. فرض کنید سرمایه گذار در لحظه t ، $\Delta(t)$ سهم از سهام را در اختیار داشته باشد، به طوری که تغییرات ارزش پرتفوی او توسط معادله دیفرانسیل تصادفی زیر توصیف می شود

$$dX(t) = \Delta(t)dS(t) + r(X(t) - \Delta(t)S(t))dt.$$

با فرض اینکه $C(t)$ ارزش ورقه مشتقه در لحظه t است، یک استراتژی ارائه دهید که سرمایه گذار بتواند بر اساس آن پرتفوی خود را بر اساس ورقه مشتقه $C(t)$ پوشش ریسک دهد.

۶- فرض کنید $Z := \{Z_t\}_{t=0,1,2,\dots}$ فرایند زنجیر مارکف با m حالت باشد، به طوری که حالت های آن را مجموعه $E := \{1, \dots, m\}$ تشکیل می دهد. همچنین فرض کنید $P = [p_{i,j}]_{i,j \in E}$ ماتریس احتمال انتقال زنجیر مارکف Z باشد، به طوری که برای هر $i, j \in E$ ، احتمال انتقال زنجیر در لحظه t به صورت $p_{ij} = \mathbb{P}[Z_t = j \mid Z_{t-1} = i]$ نشان دهید برای هر $n, k \in \{0, 1, \dots\}$ داریم $\mathbb{P}(Z_{k+n} = j \mid Z_k = i) = [P^n]_{ij}$.

۷- فرض کنید $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ و $\mathbb{Q}$ اندازه احتمال جدیدی باشد که در رابطه زیر صدق می کند

$$d\mathbb{Q}(\omega) = Z(t)d\mathbb{P}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

به طوری که Z منغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است و به صورت زیر تعریف می شود

$$Z(t) = \exp \left\{ -\frac{r}{\sigma} W(t) - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{\sigma} \right)^2 t \right\},$$

که در آن $r \in \mathbb{R}$ و $\sigma \in \mathbb{R}^+$ مقادیر غیر تصادفی هستند. نشان دهید $\mathbb{Q}$ اندازه احتمال معادل با $\mathbb{P}$ و $X(t) = W(t) + \frac{r}{\sigma}t$ حرکت براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ است. فرض کنید تحت اندازه احتمال $\mathbb{P}$ ، دینامیک ارزش دارایی از مدل بازگشت به میانگین زیر پیروی کند

$$dS(t) = \kappa(r - \delta - \ln S(t))S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

که در آن κ سرعت بازگشت به میانگین، r نرخ بهره بدون ریسک، δ نرخ آیدی و σ تلاطم قیمت دارایی است. در این صورت دینامیک ارزش دارایی را تحت اندازه احتمال $\mathbb{Q}$ بیان کنید.

فصل ۳

شبیه‌سازی بازارهای مالی

شبیه‌سازی بازارهای مالی رفتار یک بازار (مانند قیمت سهام) را بر اساس نرم‌افزارهای رایانه‌ای تجزیه و تحلیل می‌کند، به‌طوری که کاربر می‌تواند بدون ریسک مالی، ویژگی‌های آن بازار را مورد ارزیابی قرار دهد. با توجه به اهمیت مدل‌های تصادفی برای توصیف پدیده‌های طبیعی که در فصل قبل اشاره شد، شبیه‌سازی قیمت محصولات در بازارهای مالی با استفاده از مدل‌های تصادفی می‌تواند بسیار کارآمد باشد. چنین مدل‌هایی نه تنها باید منعکس‌کننده واقعیت‌های تلطیف‌شده قیمت بازار در بورس باشند، بلکه باید به اندازه کافی برای توصیف این رفتارها به روش تحلیلی انعطاف‌پذیر باشند. قیمت‌های لحظه‌ای بازار مرتبط با سهام چندین ویژگی دارند، که برجسته‌ترین آن‌ها تلاطم ثابت یا تصادفی، وجود پرش‌های قیمت و تغییر حالات اقتصادی است. در این فصل برای شبیه‌سازی قیمت سهام با در نظر گرفتن این عوامل به ترتیب مدل‌های حرکت براونی هندسی، مدل تلاطم تصادفی هستون، مدل پرش-انتشار و مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

با توجه به وجود حرکت براونی در تمام مدل‌های تصادفی، قبل از شروع بحث شبیه‌سازی بازارهای مالی به نحوه تولید این فرایند تصادفی می‌پردازیم و حرکت قدم‌زدن تصادفی را به عنوان یک پیش‌زمینه ارائه می‌دهیم.

مثال ۳-۱. (شبیه‌سازی مسیر قدم‌زدن تصادفی) قدم‌زدن تصادفی مطالعه‌ی رفتار یک مسیر تشکیل شده از گام‌های تصادفی و پی‌درپی با استفاده از ابزار ریاضیات است. نتایج کاوش در مورد این موضوع در شاخه‌های مختلف علم همچون علوم کامپیوتر، فیزیک، بوم‌شناسی، اقتصاد، روان‌شناسی و موارد دیگر به عنوان مدلی پایه برای فرایندهای تصادفی در طول زمان استفاده می‌شود. به عنوان

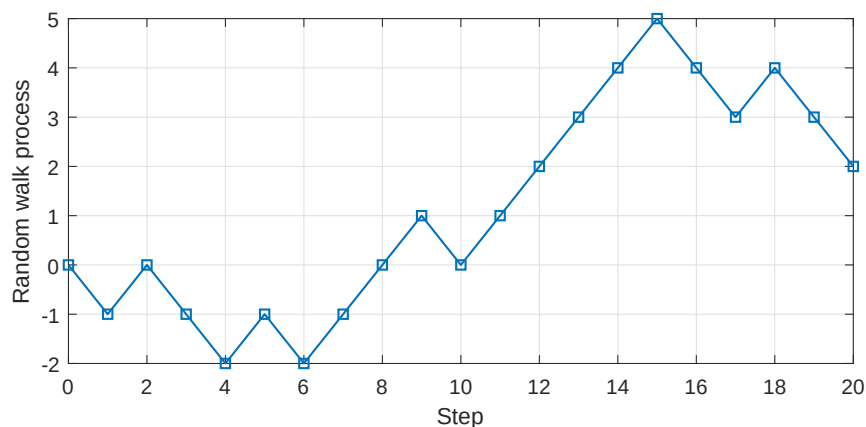
مثال، تلاطم قیمت سهام، وضعیت مالی یک قمارباز و مسیر طی شده توسط یک مولکول هنگام حرکت درون گاز یا مایع مواردی هستند که می توانند توسط فرایند قدم زدن تصادفی شبیه سازی شوند. برای شبیه سازی فرایند قدم زدن تصادفی، به طور مکرر یک سکه نارایب را پرتاب می کنیم. نتایج متوالی پرتاب ها را توسط $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots$ نشان می دهیم. به عبارتی دیگر ω دنباله نامتناهی از نتایج پرتاب سکه و ω_n نتیجه پرتاب n ام است. با فرض اینکه

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega_j = H, \\ -1 & \text{if } \omega_j = T, \end{cases}$$

و تعریف

$$M_k = \sum_{j=1}^k X_j, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1-3)$$

به طوری که $M_0 = 0$. آنگاه فرایند M_k برای $k = 0, 1, 2, \dots$ یک فرایند قدم زدن تصادفی است که با هر بار پرتاب سکه، یک واحد به سمت بالا یا یک واحد به سمت پایین حرکت می کند. برای شبیه سازی مسیر حرکت قدم زدن تصادفی به صورت زیر عمل می کنیم.



شکل ۱-۳: یک مسیر تصادفی از فرایند قدم زدن تصادفی با ۲۰ گام.

می‌دانیم متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ با احتمال 0.5 بزرگتر از 0.5 و با همین احتمال کوچکتر از 0.5 است. بنابراین ابتدا یک متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته در بازه $(0, 1)$ تولید کرده و آن را R می‌نامیم. اگر R بزرگتر از 0.5 باشد، آن را آمدن شیر در پرتاب سکه، در غیر این صورت، آن را آمدن خط در پرتاب سکه تعبیر می‌کنیم. با استفاده از این رویکرد اگر $R > 0.5$ ، آنگاه قرار می‌دهیم $X = 1$. در غیر این صورت، قرار می‌دهیم $X = -1$. آنچه که گفته شد بر اساس اولین پرتاب سکه است. برای پرتاب‌های بعدی سکه نیز می‌توان به روش مشابه عمل نمود و با توجه به رابطه (۱-۳) به شبیه‌سازی حرکت قدم‌زدن تصادفی پرداخت. شکل (۱-۳) بیست گام از مسیر قدم‌زدن تصادفی را که بر اساس الگوریتم ۱.۳ پیاده‌سازی شده است نشان می‌دهد.

الگوریتم ۱.۳: شبیه‌سازی مسیر فرایند قدم‌زدن تصادفی

- ۱- برای $k = 1, 2, \dots, K$ دستورات ۲ تا ۳ را انجام بده.
 - ۲- متغیر تصادفی یکنواخت پیوسته R در بازه $(0, 1)$ را توسط دستور $R = rand$ تولید کن.
 - ۳- اگر $R > 0.5$ باشد آنگاه قرار بده $X(k) = 1$. در غیر این صورت قرار بده $X(k) = -1$.
 - ۴- فرایند حرکت قدم‌زدن تصادفی را توسط دستور $M = [cumsum(X)]$ شبیه‌سازی کن.
- ⊙ دستور $cumsum$ به معنای جمع تجمعی است. برای مثال اگر $X = [1 \ 3 \ 6]$ ، آنگاه $cumsum(X) = [1 \ 4 \ 10]$

مثال ۲-۳. (شبیه‌سازی مسیر فرایند حرکت براونی) بر اساس تعریف (۲-۵) در فصل دوم، اگر $\{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند حرکت براونی باشد، آنگاه نمونه‌های آن، یعنی $W(t) - W(s)$ برای $s < t$ دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $t - s$ خواهد بود. به عبارتی اگر $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta := t_i - t_{i-1}$ باشد، آنگاه $W(t_i) - W(t_{i-1}) \sim \mathcal{N}(0, \delta)$ و داریم

$$W(t_1) - W(t_0) \sim \mathcal{N}(0, \delta) = \sqrt{\delta}Z_1,$$

$$W(t_2) - W(t_1) \sim \mathcal{N}(0, \delta) = \sqrt{\delta}Z_2,$$

$$W(t_3) - W(t_2) \sim \mathcal{N}(0, \delta) = \sqrt{\delta}Z_3,$$

$$W(t_4) - W(t_3) \sim \mathcal{N}(0, \delta) = \sqrt{\delta}Z_4,$$

⋮

$$W(t_n) - W(t_{n-1}) \sim \mathcal{N}(0, \delta) = \sqrt{\delta}Z_n.$$

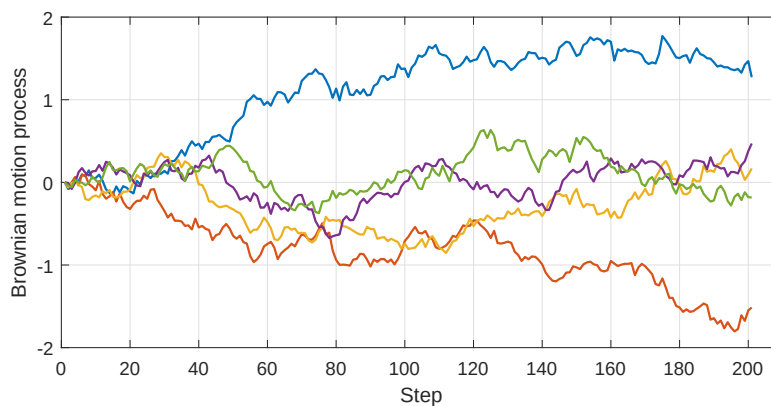
به طور معادل می توان نوشت

$$\begin{aligned} W(t_1) &= \sqrt{\delta} Z_1, \\ W(t_2) &= \sqrt{\delta} Z_2 + \sqrt{\delta} Z_1, \\ W(t_3) &= \sqrt{\delta} Z_3 + \sqrt{\delta} Z_2 + \sqrt{\delta} Z_1, \\ W(t_4) &= \sqrt{\delta} Z_4 + \sqrt{\delta} Z_3 + \sqrt{\delta} Z_2 + \sqrt{\delta} Z_1, \\ &\vdots \\ W(t_n) &= \sqrt{\delta} Z_n + \sqrt{\delta} Z_{n-1} + \dots + \sqrt{\delta} Z_1. \end{aligned}$$

که در آن $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند که به طور مستقل از هم روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ توزیع شده اند. بنابراین حرکت براونی را در لحظه t_i به صورت زیر می توان شبیه سازی کرد

$$W(t_i) = \sqrt{\delta} \sum_{k=1}^i Z_k.$$

شکل (۳-۲)، ۵ مسیر شبیه سازی شده از فرایند حرکت براونی را تحت فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ با استفاده از الگوریتم ۲.۳ نشان می دهد. همان طور که از این شکل مشاهده می شود، با توجه به تصادفی بودن حرکت براونی، برای هر $\omega \in \Omega$ مسیرهای متفاوتی داریم.



شکل ۳-۲: پنج مسیر تصادفی از فرایند حرکت براونی با مقادیر $T = 1$ و $n = 200$.

الگوریتم ۲.۳: شبیه‌سازی مسیر حرکت براونی

- ۱- تعداد گام‌ها (n) و زمان نهایی (T) به عنوان ورودی وارد شود و قرار بده $dt = T/n$.
- ۲- برای $i = 1, 2, \dots, n$ دستورات ۳ تا ۴ را انجام بده.
- ۳- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = randn$ تولید کن.
- ۴- قرار بده $X(i) = sqrt(dt) * Z$.
- ۵- فرایند تصادفی حرکت براونی را توسط دستور $W = [cumsum(X)]$ شبیه‌سازی کن.

۳-۱ گسسته‌سازی مدل‌های تصادفی

معادلات دیفرانسیل تصادفی بسیاری وجود دارند که جواب صریح ندارند. بنابراین روش‌های عددی برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در ادامه، چنین تقریبی از معادلات دیفرانسیل تصادفی را گسسته‌سازی می‌نامیم. روش‌های گسسته‌سازی برای اهداف مختلف به کار گرفته می‌شوند. یکی از این اهداف، تجسم تمام مسیرهای نمونه از جواب معادله دیفرانسیل تصادفی است. مجموعه این مسیرها را گاهی سناریو می‌نامند. این رویکرد، تصویری از رفتار مسیر نمونه‌ای به دست می‌دهد، به طوری که بر اساس آن می‌توانیم نوعی پیش‌بینی از فرایند تصادفی را در زمان‌های آینده ارائه دهیم. اما یک سناریو باید با دقت تفسیر شود. در دنیای واقعی هرگز نمی‌دانیم چه مسیری از حرکت براونی معادله دیفرانسیل را بر اساس واقعیت هدایت می‌کند. از طرفی شبیه‌سازی چند مورد از این مسیرها نمی‌تواند رفتار یک پدیده (در اینجا قیمت سهام) را به خوبی توصیف کند. توجه کنید که از بین بی‌شمار مسیر نمونه‌ای برای معادله دیفرانسیل تصادفی، حتماً یک مسیر وجود دارد که با واقعیت مطابقت داشته باشد. هدف دیگر (شاید مهم‌ترین هدف) از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی، دستیابی به تقریب‌های معقول برای تعیین ویژگی‌های توزیع از جواب یک معادله دیفرانسیل تصادفی است. این ویژگی‌ها شامل مقدار مورد انتظار (امید ریاضی)، واریانس، کوواریانس و گشتاورهای مرتبه بالا هستند. این در واقع موضوع مهمی است، زیرا تنها در موارد معدودی می‌توان فرمول‌های صریح برای این مقادیر ارائه داد. حتی اگر این کار برای یک معادله دیفرانسیل خاص قابل انجام باشد، اغلب آن‌ها دارای توابع پیچیده‌ای هستند که باید به صورت عددی تقریب زده شوند. گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی به ما این امکان را می‌دهد که هر تعداد مسیر نمونه را که می‌خواهیم شبیه‌سازی کنیم. انجام این کار ما را قادر می‌سازد که با به کار گرفتن روش شبیه‌سازی مونت-کارلو، ویژگی‌های توزیع جواب معادله دیفرانسیل تصادفی را مورد ارزیابی قرار دهیم.

برای پرداختن به مسئله گسسته سازی، معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad X(\circ) = x, \quad \circ \leq t \leq T, \quad (2-3)$$

که در آن $\circ < T$ و x یک مقدار غیر تصادفی و $W(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_m(t))^T$ یک حرکت براونی m بعدی با پالایه تولید شده $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \in [\circ, T]}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ است. همچنین $f: [\circ, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $g: [\circ, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ یکی از روش های متداول گسسته سازی، گسسته سازی اوایلر^۱ است. پیاده سازی این روش بدین صورت است که افراز $\{\circ = t_\circ < t_1 < \dots < t_n = T\}$ از بازه $[\circ, T]$ با طول گام $\delta := t_{i+1} - t_i$ را برای $i = \circ, \dots, n-1$ در نظر می گیریم. با توجه به اینکه

$$dW(t) := W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim \mathcal{N}(\circ, \delta) = \sqrt{\delta} \mathcal{N}(\circ, 1),$$

فرم گسسته شده معادله دیفرانسیل تصادفی (۲-۳) را به صورت زیر می توان بیان کرد

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + f(t_i, X(t_i))\delta + g(t_i, X(t_i))\sqrt{\delta}Z_i, \quad (3-3)$$

که در آن $Z_1, \dots, Z_n$ دنباله تصادفی از توزیع نرمال استاندارد m متغیره است.

مثال ۳-۳. معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t), \quad X(\circ) = x, \quad (4-3)$$

که در آن a و b پارامترهای غیر تصادفی مثبت هستند. در این صورت با استفاده از لم ایتو، این معادله دارای جواب صریح زیر است

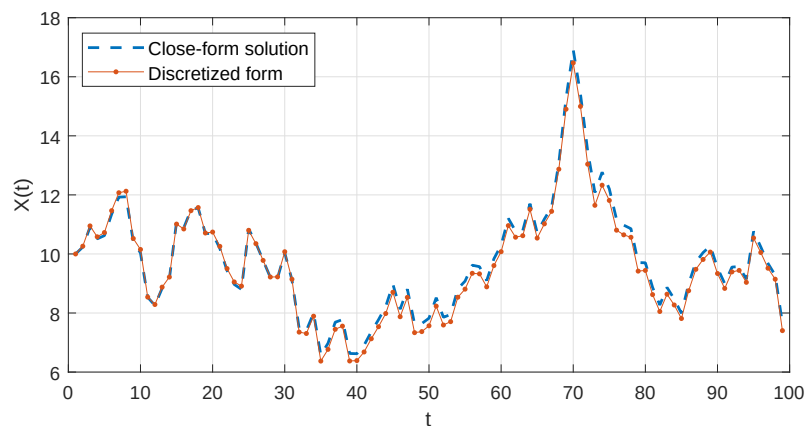
$$X(t_{i+1}) = X(t_i) \exp \left\{ \left(a - \frac{1}{2}b^2 \right) (t_{i+1} - t_i) + b(W(t_{i+1}) - W(t_i)) \right\},$$

که در آن $\{\circ = t_\circ < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[\circ, T]$ است. همچنین با توجه به گسسته سازی اوایلر، فرم گسسته معادله به صورت زیر خواهد بود

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + aX(t_i)\delta + bX(t_i)\sqrt{\delta}Z_i.$$

¹Euler

که در آن $\delta := t_{i+1} - t_i$ طول گام و $Z_1, \dots, Z_n$ دنباله تصادفی از توزیع نرمال استاندارد است. شکل (۳-۳) به مقایسه جواب صریح معادله دیفرانسیل تصادفی (۴-۳) و فرم گسسته‌شده با پارامترهای $a = 0.05$, $b = 0.8$, $x = 10$, $T = 100$ و $n = 100$ می‌پردازد. همانطور که از این شکل مشخص است جواب دقیق و جواب به‌دست آمده توسط گسسته‌سازی اوایلر تقریباً بر هم منطبق هستند.



شکل ۳-۳: مقایسه جواب صریح و فرم گسسته‌شده معادله دیفرانسیل تصادفی (۴-۳).

الگوریتم ۳.۳: جواب صریح و فرم گسسته‌شده معادله دیفرانسیل تصادفی در مثال (۳-۳)

- ۱- قرار بده $dt = t_i - t_{i-1} = T/n$ و $X(t_0) = x$
- ۲- برای $i = 0, 1, \dots, n$ دستورات زیر را انجام بده.
- ۳- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = randn$ تولید کن.
- (جواب صریح): قرار بده $X(t_{i+1}) = X(t_i) \exp((a - 0.5b^2)dt + b\sqrt{dt}Z)$
- (گسسته‌سازی اوایلر): قرار بده $X(t_{i+1}) = X(t_i) + aX(t_i)dt + bX(t_i)\sqrt{dt}Z$

۲-۳ شبیه‌سازی قیمت سهام

از دهه ۷۰ میلادی با معرفی مدل بلک-شولز، مدل‌های تصادفی بسیاری برای شبیه‌سازی قیمت سهام معرفی شدند. هدف از ارائه این مدل‌ها برطرف کردن ضعف مدل‌های دیگر در شبیه‌سازی و پیش‌بینی

قیمت سهام است. هرچند که در بسیاری از موارد ممکن است مدل های قدیمی تر برای یک بازار بهتر از مدل های جدید عمل کنند. در واقع انتخاب بهترین مدل برای یک بازار، نیازمند بررسی کامل رفتار قیمت است. به عنوان مثال، در بازارهای انرژی به علت عدم تعادل در عرضه و تقاضا همواره در طی یک دوره زمانی با پرش های بزرگ و ناگهانی مواجه هستیم. در این صورت واضح است که یک محقق حوزه ریاضی مالی، مدل حرکت براونی هندسی که عامل پرش در آن لحاظ نمی شود را برای ارزیابی یک بازار انرژی (مانند بازار الکتریسیته یا گاز) در نظر نگیرد. در واقع او علاقه دارد از مدل های پرش-انتشار یا رژیم-سوئیچینگ برای شبیه سازی قیمت های نقدی انرژی استفاده کند. با این حال در هر یک از مدل های تصادفی هنوز بحث های زیادی در مورد اینکه کدام مدل قابل اعتمادترین است وجود دارد. در کل این حقیقت از کسی پوشیده نیست که شبیه سازی قیمت سهام به معنای ایجاد مسیرهای نمونه ای از آن است که سهام می تواند در آینده دنبال کند. لذا مدیران مالی و سرمایه گذاران به منظور اتخاذ تصمیمات مهم سرمایه گذاری علاقه مند به شبیه سازی بازارهای مالی هستند. در این بخش شبیه سازی قیمت سهام را توسط چهار مدل رایج و مهم حرکت براونی هندسی، هستون، پرش-انتشار و رژیم-سوئیچینگ مورد مطالعه قرار می دهیم.

۱-۲-۳ شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل حرکت براونی هندسی

اگر $S(t)$ قیمت سهام در لحظه $0 \leq t \leq T$ با زمان سررسید $T > 0$ باشد. در این صورت دینامیک قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی به صورت زیر است

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) = s, \quad (5-3)$$

که در آن $W(t)$ حرکت براونی استاندارد، μ میانگین نرخ بازده و $\sigma > 0$ تلاطم بازار است. فرض کنید $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta := t_i - t_{i-1}$ باشد. در این صورت با استفاده از روش اویلر، فرم گسسته شده معادله دیفرانسیل تصادفی (5-3) به صورت زیر است

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) + \mu S(t_{i-1})\delta + \sigma S(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6-3)$$

که در آن $Z_1, \dots, Z_n$ دنباله تصادفی از توزیع نرمال استاندارد است. از طرفی Z_i ها متغیر تصادفی نرمال استاندارد هستند و داریم $\mathbb{E}[Z_i] = 0$. بنابراین با تقسیم طرفین رابطه (6-3) بر $S(t_{i-1})$ و گرفتن امید ریاضی از دو طرف آن به دست می آید

$$\mathbb{E}\left[\frac{S(t_i) - S(t_{i-1}) - \mu S(t_{i-1})\delta}{S(t_{i-1})}\right] = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

حال اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، بنا به قانون قوی اعداد بزرگ می‌توان نوشت

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{S(t_i) - S(t_{i-1}) - \mu S(t_{i-1})\delta}{S(t_{i-1})} \right] = 0.$$

بنابراین

$$\mu = \frac{1}{n\delta} \sum_{i=1}^n \frac{S(t_i) - S(t_{i-1})}{S(t_{i-1})}.$$

با فرض اینکه $S^*(t_0), S^*(t_1), \dots, S^*(t_n)$ قیمت‌های سهام یک شرکت خاص باشند، با قرار دادن این مقادیر به جای $S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)$ ، برآورد پارامتر μ به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\mu^* = \frac{1}{n\delta} \sum_{i=1}^n \frac{S^*(t_i) - S^*(t_{i-1})}{S^*(t_{i-1})}. \quad (7-3)$$

با معلوم شدن μ ، به برآورد پارامتر تلاطم بازار می‌پردازیم. بر اساس معادله (۳-۶)، با به توان دو رساندن طرفین رابطه زیر

$$S(t_i) - S(t_{i-1}) - \mu^* S(t_{i-1})\delta = \sigma S(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

داریم

$$\left(S(t_i) - S(t_{i-1}) - \mu^* S(t_{i-1})\delta \right)^2 = \sigma^2 S^2(t_{i-1})\delta Z_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\frac{\left(S(t_i) - S(t_{i-1}) - \mu^* S(t_{i-1})\delta \right)^2}{\sigma^2 S^2(t_{i-1})\delta} = Z_i^2, \quad i = 1, \dots, n.$$

از آنجایی که برای هر $i = 1, \dots, n$ ، $\mathbb{E}[Z_i^2] = 1$ ، با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه بالا داریم

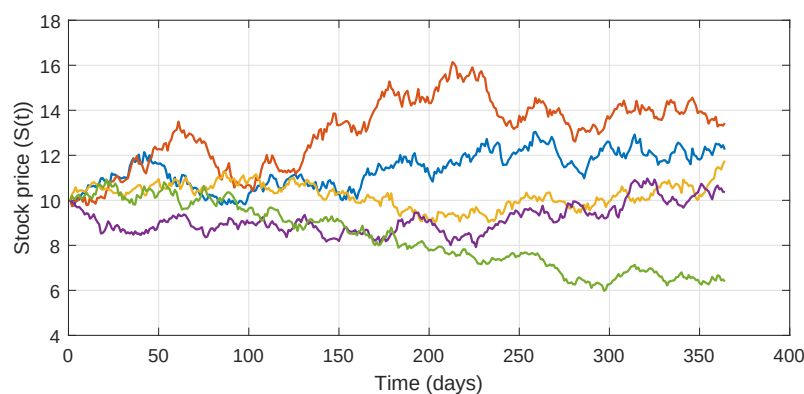
$$\mathbb{E} \left[\frac{\left(S(t_i) - S(t_{i-1}) - \mu^* S(t_{i-1})\delta \right)^2}{\sigma^2 S^2(t_{i-1})\delta} \right] = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

حال اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد، بنا به قانون قوی اعداد بزرگ می توان نوشت

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(S(t_i) - S(t_{i-1}) - \mu^* S(t_{i-1}) \delta)^2}{\sigma^2 S^2(t_{i-1}) \delta} \right] = 1.$$

با فرض اینکه $S^*(t_0), S^*(t_1), \dots, S^*(t_n)$ قیمت های سهام یک شرکت خاص باشند، با قرار دادن این مقادیر به جای $S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)$ ، برآورد پارامتر σ به صورت زیر خواهد بود

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(S^*(t_i) - S^*(t_{i-1}) - \mu^* S^*(t_{i-1}) \delta)^2}{S^{*2}(t_{i-1}) \delta} \right]}. \quad (۸-۳)$$



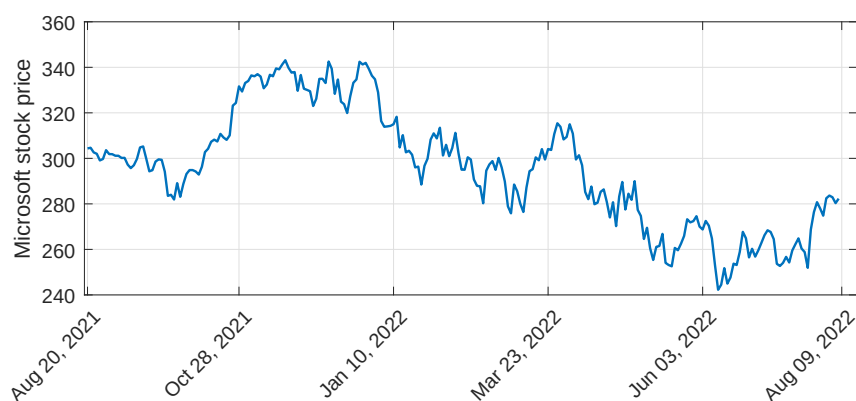
شکل ۳-۴: پنج مسیر شبیه سازی شده از قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی.

الگوریتم ۴.۳: شبیه سازی قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی

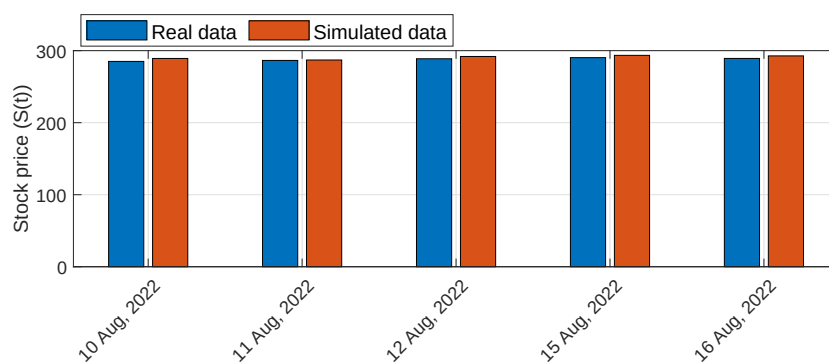
- ۱- قرار بده $dt = t_i - t_{i-1} = T/n$ و $S(t_0) = s$
 - ۲- برای $i = 1, \dots, n$ دستورات زیر را انجام بده.
 - ۳- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = randn$ تولید کن.
 - ۴- قیمت سهام را در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن
- $$S(t_i) = S(t_{i-1}) + \mu^* * S(t_{i-1}) * dt + \sigma^* * S(t_{i-1}) * \text{sqrt}(dt) * Z.$$

با به کار گرفتن الگوریتم ۴.۳، در شکل (۴-۳) پنج مسیر تصادفی از قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی آورده شده است، که در آن پارامترهای مدل به صورت $s = 10$ ، $T = 1$

$n = 365$, $r = 0.05$ و $\sigma = 0.3$ اختیار شده‌اند.



شکل ۳-۵: ارزش سهام شرکت مایکروسافت از ۲۰ اوت ۲۰۲۱ تا ۱۰ اوت ۲۰۲۲



شکل ۳-۶: مقایسه قیمت سهام شرکت مایکروسافت و قیمت‌های شبیه‌سازی شده تحت مدل حرکت براونی هندسی.

حال به مقایسه داده‌های واقعی بازار و داده‌های به‌دست آمده توسط مدل تصادفی حرکت براونی هندسی می‌پردازیم. قبل از انجام این کار نیاز داریم که پارامترهای مدل یعنی μ و σ را بر اساس داده‌های بازار برآورد کنیم. برای این منظور، داده‌های مربوط به قیمت سهام شرکت مایکروسافت را از ۲۰ اوت ۲۰۲۱ تا ۱۰ اوت ۲۰۲۲ در نظر بگیرید (شکل ۳-۵) و بر اساس روابط (۳-۷) و (۳-۸)، برآورد پارامترهای میانگین نرخ بازده و تلاطم بازار را به‌دست می‌آوریم. در این صورت خواهیم داشت

$$\mu^* = -0.0306, \quad \sigma^* = 0.0897.$$

برای ارزیابی مدل تصادفی حرکت براونی هندسی، قیمت سهام شرکت مایکروسافت را در پنج روز بعدی معاملات (۱۰ اوت ۲۰۲۲ تا ۱۶ اوت ۲۰۲۲) با پنج داده به دست آمده توسط این مدل تصادفی بر اساس پارامترهای برآورد شده مقایسه می کنیم. نتایج بر اساس بهترین شبیه سازی قیمت سهام تحت مدل حرکت براونی هندسی از میان ۱۰۰۰ شبیه سازی در شکل (۳-۶) آورده شده است.

۲-۲-۳ شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل تلاطم تصادفی هستون

از فصل دوم به یاد داریم که تحت مدل تلاطم تصادفی هستون، با فرض اینکه $S(t)$ قیمت سهام و $V(t)$ تلاطم بازار در لحظه t است، دینامیک قیمت سهام به صورت زیر توصیف می شود

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW^{(1)}(t), & S(0) = s, \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}(\rho dW^{(1)}(t) + \sqrt{1-\rho^2}dW^{(2)}(t)), \\ V(0) = v, \end{cases}$$

که در آن $W^{(1)}(t)$ و $W^{(2)}(t)$ دو حرکت براونی، r نرخ بهره ثابت و κ ، θ و σ ثابت های مثبت هستند که تعبیر آن ها به ترتیب، سرعت بازگشت به میانگین، سطح بازگشت به میانگین و تلاطم برای تلاطم است. همچنین $\rho \in (-1, 1)$ ضریب همبستگی بین قیمت سهام و تلاطم بازار را نشان می دهد. توجه کنید برای اینکه مقادیر تلاطم همواره مثبت باشند، پارامترهای κ ، θ و σ باید در شرط فلر صدق کنند، یعنی

$$2\kappa\theta > \sigma^2.$$

با استفاده روش گسسته سازی اوایلر در معادله (۳-۳)، شبیه سازی قیمت سهام تحت مدل تلاطم تصادفی هستون به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{cases} S(t_{i+1}) = S(t_i) + rS(t_i)\delta + \sqrt{\delta V(t_i)}S(t_i)Z_i^{(1)}, \\ V(t_{i+1}) = V(t_i) + \kappa(\theta - V(t_i))\delta + \sigma\sqrt{\delta V(t_i)}(\rho Z_i^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2}Z_i^{(2)}), \end{cases}$$

که در آن $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ و $\delta := t_{i+1} - t_i$ طول گام است. همچنین $Z_1^{(1)}, \dots, Z_n^{(1)}$ و $Z_1^{(2)}, \dots, Z_n^{(2)}$ دو دنباله ی تصادفی از توزیع نرمال استاندارد هستند.

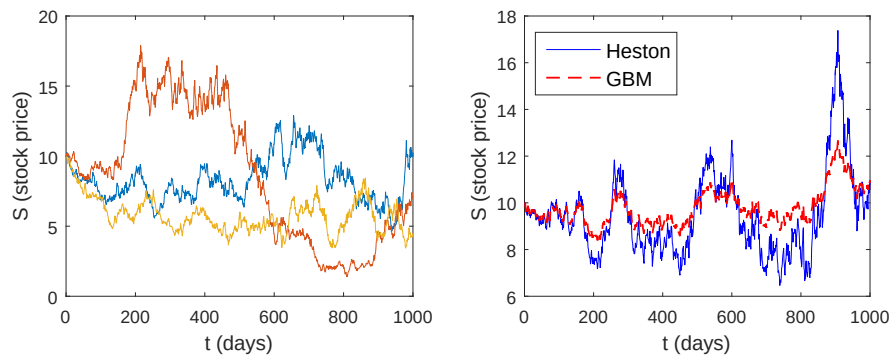
الگوریتم ۵.۳: شبیه‌سازی قیمت سهام تحت مدل تلاطم تصادفی هستون

- ۱- قرار بده $dt = t_i - t_{i-1} = T/n$ و $S(t_0) = s$ و $V(t_0) = v$
- ۲- برای $i = 1, \dots, n$ دستورات زیر را انجام بده.
- ۳- متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد Z_1 و Z_2 را به صورت مستقل از هم توسط دستورات $Z_1 = randn$ و $Z_2 = randn$ تولید کن.
- ۴- فرایند تلاطم را در لحظه t_i به صورت زیر شبیه‌سازی کن
- ۵- قیمت سهام را در لحظه t_i به صورت زیر شبیه‌سازی کن

$$V(t_i) = V(t_{i-1}) + \kappa(\theta - V(t_{i-1}))dt + \sigma\sqrt{V(t_{i-1})}\sqrt{dt}(\rho Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Z_2).$$

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) + rS(t_{i-1})dt + \sqrt{V(t_{i-1})}S(t_{i-1})\sqrt{dt}Z_1.$$

در شکل (۷-۳)، چند شبیه‌سازی از قیمت سهام تحت مدل تلاطم تصادفی هستون و مقایسه آن با مدل حرکت براونی هندسی آورده شده است، که در آن پارامترها به صورت $r = 0.05$ ، $s = 10$ ، $\rho = -0.6$ و $\sigma = 0.4$ ، $\theta = 3/5$ ، $\kappa = 0.8$ ، $n = 1000$ ، $T = 1$ ، $v = 0.2$ شده‌اند.



شکل ۷-۳: سه مسیر شبیه‌سازی شده از قیمت سهام تحت مدل تلاطم تصادفی هستون (شکل سمت چپ) و مقایسه آن با مدل حرکت براونی هندسی (شکل سمت راست).

۳-۲-۳ شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل پرش-انتشار

با توجه به اینکه در مدل تصادفی پرش-انتشار، پرش های قیمت بر اساس فرایند پواسن ساخته می شوند، در این بخش قبل از پرداختن به موضوع شبیه سازی قیمت سهام تحت این مدل، به شبیه سازی مسیرهای فرایند پواسن و پواسن مرکب می پردازیم.

مثال ۳-۴. (شبیه سازی فرایند پواسن) فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta := t_i - t_{i-1}$ باشد. در این صورت با توجه به تعریف (۱۱-۲) در فصل قبل، اگر فرایند تصادفی $\{N(t)\}_{t \in [0, T]}$ یک فرایند پواسن با شدت λ باشد، آنگاه $N(t)$ در لحظه شروع برابر صفر و نمونه های آن دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda\delta$ است. یعنی $N(t_i) - N(t_{i-1}) \sim Poisson(\lambda\delta)$ فرض کنید $N_1, N_2, \dots, N_n$ متغیرهای تصادفی پواسن با پارامتر $\lambda\delta$ باشند که به طور مستقل از هم روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ توزیع شده اند. در این صورت داریم

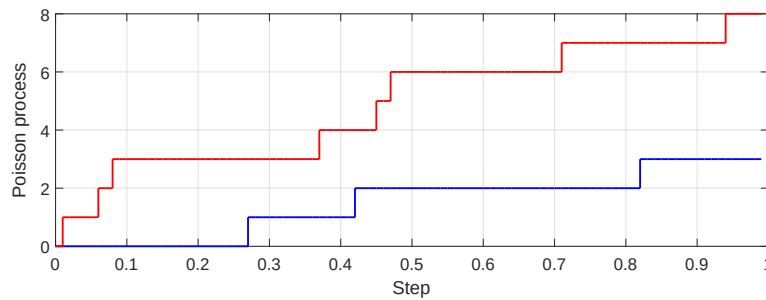
$$\begin{aligned} N(t_1) - N(t_0) &\sim Poisson(\lambda\delta) = N_1, \\ N(t_2) - N(t_1) &\sim Poisson(\lambda\delta) = N_2, \\ &\vdots \\ N(t_n) - N(t_{n-1}) &\sim Poisson(\lambda\delta) = N_n. \end{aligned}$$

به طور معادل می توان نوشت

$$\begin{aligned} N(t_1) &= N_1, \\ N(t_2) &= N_2 + N_1, \\ &\vdots \\ N(t_n) &= N_n + N_{n-1} + \dots + N_1. \end{aligned}$$

بنابراین فرایند پواسن را در لحظه t_i به صورت زیر می توان شبیه سازی کرد

$$N(t_i) = \sum_{k=1}^i N_k.$$



شکل ۳-۸: دو مسیر تصادفی از فرایند پواسن با مقادیر $T = 1$ ، $n = 100$ و $\lambda = 5$.

شکل (۳-۸) دو مسیر شبیه‌سازی شده از فرایند پواسن را تحت فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ با استفاده از الگوریتم ۶.۳ نشان می‌دهد. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود، با توجه به تصادفی بودن فرایند پواسن، برای هر $\omega \in \Omega$ مسیرهای متفاوت داریم.

الگوریتم ۶.۳: شبیه‌سازی فرایند پواسن

- ۱- تعداد گام‌ها (n) و زمان نهایی (T) به عنوان ورودی وارد شود و قرار بده $dt = T/n$.
- ۲- برای $i = 1, 2, \dots, n$ دستورات ۳ تا ۴ را انجام بده.
- ۳- متغیر تصادفی پواسن N با پارامتر λdt را توسط $A = \text{poissrnd}(\lambda * dt)$ تولید کن.
- ۴- قرار بده $X(i) = A$.
- ۵- فرایند تصادفی پواسن را توسط دستور $N = [\text{cumsum}(X)]$ شبیه‌سازی کن.

مثال ۳-۵. (شبیه‌سازی مسیر فرایند پواسن مرکب) از تعریف (۲-۱۲) فصل دوم به یاد داریم که اگر $N(t)$ فرایند پواسن با شدت λ باشد، آنگاه فرایند پواسن مرکب $\{Q(t)\}_{t \in [0, T]}$ در لحظه t به صورت زیر توصیف می‌شود

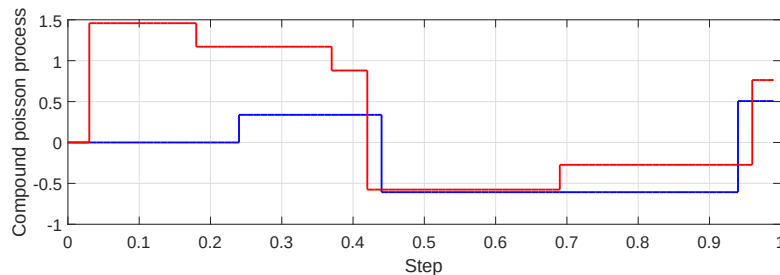
$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad (9-3)$$

که در آن $Y_1, Y_2, \dots$ دنباله تصادفی از یک توزیع خاص و مستقل از فرایند پواسن $N(t)$ است. برخلاف فرایند پواسن که در آن اندازه پرش‌ها مقدار ثابت ۱ است، در فرایند پواسن مرکب این مقادیر نه تنها ثابت نیستند بلکه به طور تصادفی تغییر می‌کنند. به عبارتی دیگر اندازه اولین پرش برابر Y_1 ، اندازه دومین پرش برابر Y_2 و به همین ترتیب الی آخر. فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$

یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta := t_i - t_{i-1}$ باشد. از آنجایی که فرایند پواسن $N(t)$ ، یک فرایند صعودی (نه اکیداً صعودی) و در لحظه شروع مقدار صفر را اختیار می کند، ممکن است تا لحظه t_{m-1} ($m - 1 \leq n$) مقدار آن همچنان برابر صفر باشد. به عنوان مثال، با توجه به نمودار آبی رنگ در شکل (۸-۳)، فرایند پواسن $N(t)$ تا لحظه $t_{m-1} = 0.27$ ($m = 28$) برابر صفر است. بنابراین برای تعریف اندیس سیگمای فرایند پواسن مرکب (۹-۳)، قرار می دهیم $Q(t_0) = \dots = Q(t_{m-1}) = 0$.

الگوریتم ۷.۳: شبیه سازی فرایند پواسن مرکب

- ۱- تعداد گام ها (n) و زمان نهایی (T) به عنوان ورودی وارد شود و قرار بده $dt = T/n$.
 - ۲- مقادیر $N(1), N(2), \dots, N(n)$ از فرایند پواسن را بر اساس الگوریتم ۶.۳ تولید کن و قرار بده $M = N(n)$.
 - ۳- یک بردار M تایی از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد را توسط $R = randn(1, M)$ تولید کن.
 - ۴- برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، اگر $N(i) = 0$ ، قرار بده $X(i) = 0$. در غیر این صورت $X(i) = sum(R(1 : N(i)))$.
 - ۵- فرایند تصادفی پواسن مرکب را توسط دستور $Q = [0 \ X]$ شبیه سازی کن.
- دستور $sum(X(i : j))$ مولفه های i ام تا j ام از بردار X را با هم جمع می کند.



شکل ۳-۹: دو مسیر تصادفی از فرایند پواسن مرکب با اندازه پرش نرمال استاندارد به همراه مقادیر $\lambda = 5$ و $n = 100$ ، $T = 1$.

شکل (۹-۳) دو مسیر شبیه سازی شده از فرایند پواسن مرکب را تحت فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ با استفاده از الگوریتم ۷.۳ نشان می دهد. در این شکل اندازه های پرش، یعنی $Y_1, Y_2, \dots$ متغیرهای

تصادفی نرمال استاندارد فرض شده‌اند. همان‌طور که از این شکل مشاهده می‌شود، با توجه به تصادفی بودن فرایند پواسن مرکب، برای هر $\omega \in \Omega$ مسیرهای متفاوتی خواهیم داشت. حال به شبیه‌سازی قیمت سهام تحت مدل پرش-انتشار مرتون می‌پردازیم. با توجه به رابطه (۲۹-۲) در فصل دوم، اگر $S(t)$ قیمت سهام در لحظه t باشد، داریم

$$\frac{dS(t)}{S(t^-)} = rdt + \sigma dW(t) + dQ(t), \quad t \in [0, T],$$

که در آن ثابت‌های r و σ به ترتیب نرخ بهره و تلاطم بازار، $W := \{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ حرکت براونی، $S(t^-)$ قیمت سهام قبل از زمان پرش و $Q := \{Q(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند پواسن مرکب و مستقل از حرکت براونی است. به طور خاص، Q به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} (Y_j - 1), \quad t \in [0, T],$$

که در آن $Y_1, Y_2, \dots$ متغیرهای تصادفی دلخواه و $N(t)$ یک فرایند پواسن است. فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta := t_i - t_{i-1}$ باشد. در این صورت با استفاده از روش گسسته‌سازی اوایلر، فرم گسسته‌شده مدل پرش-انتشار مرتون برای $i = 1, 2, \dots, n$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) + rS(t_{i-1})\delta + \sigma S(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i + S(t_{i-1})(Q(t_i) - Q(t_{i-1})), \quad (10-3)$$

که در آن $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد هستند که به صورت مستقل از هم توزیع شده‌اند. الگوریتم ۸.۳ به نحوه شبیه‌سازی قیمت سهام تحت مدل پرش-انتشار مرتون می‌پردازد. همچنین در شکل (۱۰-۳) دو شبیه‌سازی از قیمت سهام تحت این مدل تصادفی، زمانی که اندازه پرش‌ها از توزیع نمایی و لگ-نرمال پیروی می‌کنند را می‌توانیم مشاهده کنیم.

الگوریتم ۸.۳: شبیه‌سازی قیمت سهام تحت مدل پرش-انتشار مرتون

۱- قرار بده $dt = t_i - t_{i-1} = T/n$ و $S(t_0) = s$

۲- مقادیر تصادفی $Q(0), Q(1), Q(2), \dots, Q(n)$ از فرایند پواسن مرکب با اندازه پرش‌های $Y_1 - 1, Y_2 - 1, Y_3 - 1, \dots$ که $Y_1, Y_2, Y_3, \dots$ دارای توزیع نمایی (یا لگ-نرمال) هستند

را توسط الگوریتم ۷.۳ تولید کن.

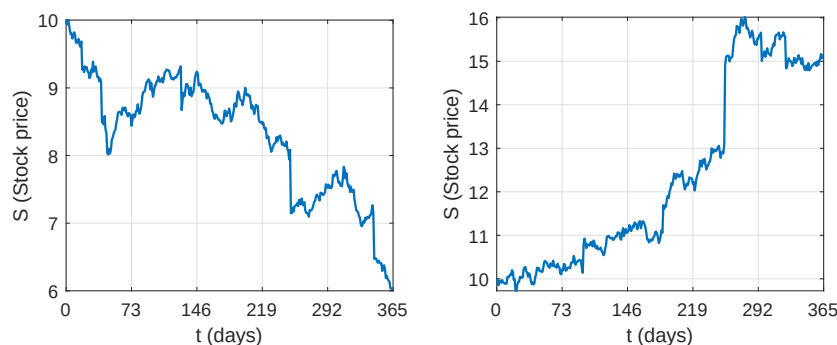
۳- برای $i = 1, \dots, n$ دستورات زیر را انجام بده.

۴- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = \text{randn}$ تولید کن.

۵- قیمت سهام را در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) + rS(t_{i-1})dt + \sigma S(t_{i-1})\sqrt{dt}Z + S(t_{i-1})(Q(i) - Q(i-1)).$$

⊙ یک بردار n تایی از متغیرهای تصادفی نمایی با پارامتر a توسط دستور $\text{exprnd}(a, n, 1)$ تولید می شود. همچنین یک بردار n تایی از متغیرهای تصادفی لگ-نرمال با پارامترهای a و b را می توان توسط دستور $\text{lognrnd}(a, b, n, 1)$ تولید کرد.



شکل ۳-۱۰: دو مسیر شبیه سازی شده از قیمت سهام تحت مدل پرش-انتشار مرتون به همراه اندازه پرش نمایی با پارامتر $a = 0.5$ (شکل سمت چپ) و اندازه پرش لگ-نرمال با پارامترهای $a = 0.2$ و $b = 0.8$ (شکل سمت راست). همچنین پارامتر نرخ بهره $r = 0.05$ ، پارامتر تلاطم بازار $\sigma = 0.15$ ، پارامتر شدت فرایند پواسن $\lambda = 5$ ، زمان سررسید $T = 1$ و تعداد نقاط گسسته سازی $n = 365$ فرض شده اند.

۴-۲-۳ شبیه سازی قیمت سهام توسط مدل رژیم-سوئیچینگ

فرض کنید $S(t)$ قیمت سهام و $Z(t)$ زنجیر مارکف پنهان در لحظه t با مجموعه حالت هایی از بردارهای یکه $\{e_1, e_2\}$ باشد، به طوری که $e_1 = (1, 0)$ و $e_2 = (0, 1)$. در این صورت تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی، دینامیک قیمت سهام به صورت زیر توصیف می شود

$$S(t) = \begin{cases} S(1, t) & \text{اگر } Z(t) \text{ در حالت } e_1 \text{ (در رژیم ۱) باشد} \\ S(2, t) & \text{اگر } Z(t) \text{ در حالت } e_2 \text{ (در رژیم ۲) باشد} \end{cases}$$

که در آن

$$dS(i, t) = r_i S(i, t) dt + \sigma_i S(i, t) dW(t), \quad i = 1, 2,$$

به‌طوری که $W(t)$ حرکت براونی و مستقل از فرایند زنجیر مارکف پنهان $Z(t)$ است. بعلاوه $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ دو بردار غیر تصادفی هستند و تعبیر آن‌ها به ترتیب نرخ بهره و تلاطم بازار در رژیم‌های ۱ و ۲ است. در حالت کلی، دینامیک قیمت سهام را تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی، به صورت زیر می‌توان بیان کرد

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (11-3)$$

که در آن $r(t)$ و $\sigma(t)$ به ترتیب پارامترهای نرخ بهره و تلاطم وابسته به زنجیر مارکف پنهان $Z(t)$ هستند، که تعریف آن‌ها به ترتیب به صورت زیر است

$$\begin{cases} r(t) = \langle r, Z(t) \rangle = \sum_{i=1}^2 r_i \langle Z(t), e_i \rangle, \\ \sigma(t) = \langle \sigma, Z(t) \rangle = \sum_{i=1}^2 \sigma_i \langle Z(t), e_i \rangle, \quad \sigma_i > 0. \end{cases}$$

توجه کنید که بر اساس تعریف زنجیر مارکف پنهان، فرایند $Z(t)$ در لحظه t مقادیر e_1 یا e_2 را می‌تواند بگیرد.

فرض کنید $\{0 = t_0 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta := t_i - t_{i-1}$ باشد. در این صورت با استفاده از روش اویلر، فرم گسسته‌شده مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی (۱۱-۳) توسط رابطه زیر بیان می‌شود

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + r(t_i)S(t_i)\delta + \sigma(t_i)S(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i,$$

که در آن $Z_1, \dots, Z_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد است.

برای شبیه‌سازی قیمت سهام تحت مدل رژیم-سوئیچینگ نیاز داریم که حالت زنجیر در لحظه t_0 و لحظات پس از آن یعنی $t_1, t_2, \dots, t_n$ معلوم باشد. بنابراین مسئله شبیه‌سازی قیمت سهام تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی را به دو بخش زیر تقسیم می‌کنیم.

• شبیه‌سازی قیمت سهام در لحظه t_0 : فرض کنید حالت زنجیر در اولین لحظه از توزیع دوجمله‌ای پیروی کند. برای پیاده‌سازی این رویکرد، فرض کنید k دارای توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای ۱ (تعداد آزمایش‌ها) و $\mathcal{P}$ (احتمال موفقیت آمیز بودن آزمایش) باشد. در اینجا فرض کنید که $\mathcal{P}$ احتمال قرارگیری زنجیر در حالت e_1 (رژیم ۱) باشد. در این صورت واضح است که k صفر یا یک

خواهد بود و قرار می دهیم $Z(t_0) = k$. بنابراین اگر $k = 0$ باشد، زنجیر در لحظه t_0 در حالت e_1 (رژیم ۱) و اگر $k = 1$ باشد زنجیر در حالت e_2 (رژیم ۲) قرار دارد.

• شبیه سازی قیمت سهام در لحظات پس از t_0 : می دانیم برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، زنجیر مارکف پنهان $Z(t_i)$ در حالت e_1 یا e_2 قرار دارد، یعنی $Z(t_i) = e_1 \vee e_2$. طبق ادبیات مدل رژیم-سوئیچینگ، اگر زنجیر مارکف پنهان $Z(t_i)$ از حالت e_i به حالت e_j پرش کند، گوییم قیمت سهام در لحظه t_i از رژیم i به رژیم j سوئیچ شده است. برای شبیه سازی زمان هایی که زنجیر مارکف پنهان می تواند در برخی زمان های t_i ($i = 1, \dots, n$) پرش کند، از متغیرهای تصادفی نمایی کمک می گیریم. برای این منظور ابتدا متغیر تصادفی پواسن با پارامتر شدت λ تولید کرده و قرار می دهیم $\mathcal{H} \sim \text{Poisson}(\lambda)$. در این صورت $\mathcal{H} \in \{0, 1, 2, \dots\}$ را به عنوان تعداد پرش های زنجیر مارکف پنهان در بازه زمانی $[0, T]$ تعبیر می کنیم. از طرفی می دانیم متغیر تصادفی پواسن، وقوع پیشامدهای تصادفی بر روی یک بازه زمانی را به دست می دهد به طوری که زمان بین دو پیشامد متوالی (در اینجا تغییر حالت زنجیر مارکف) را متغیر تصادفی نمایی مشخص می کند. بنابراین برای شبیه سازی زمان های پرش زنجیر مارکف پنهان، $\mathcal{H}$ متغیر تصادفی نمایی در بازه زمانی $[0, T]$ تولید کرده و آن ها را به صورت صعودی مرتب می کنیم. در واقع هر یک از این اعداد تصادفی که از توزیع نمایی با پارامتر λ پیروی می کنند، نشان دهنده مدت زمانی هستند که زنجیر مارکف پنهان در یک حالت خاص باقی می ماند. توجه کنید که در این صورت باید آخرین عدد تصادفی نمایی، کوچکتر اکید از T باشد. در غیر این صورت، متغیرهای تصادفی نمایی را آنقدر تولید می کنیم تا آخرین عدد تصادفی نمایی (بعد از مرتب شدن اعداد به صورت صعودی) کوچکتر اکید از T باشد.

مثال ۳-۶. فرض کنید $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام δ باشد، به طوری که برای هر $i = 0, 1, \dots, n$ ، $t_i = i\delta$. قرار می دهیم $T = 1$ ، $n = 100$ و $\delta = 0.01$. همچنین فرض کنید متغیر تصادفی پواسن $\mathcal{H}$ با پارامتر شدت $\lambda = 5$ برابر ۴ باشد. در این صورت برای شبیه سازی زمان هایی که زنجیر مارکف پنهان تغییر حالت می دهد نیاز به تولید ۴ متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $\lambda = 5$ داریم. فرض کنید متغیرهای تصادفی نمایی تولید شده که به صورت صعودی مرتب شده اند به صورت زیر باشند

$$a_1 = 0.1, \quad a_2 = 0.15, \quad a_3 = 0.3, \quad a_4 = 0.32. \quad (12-3)$$

آنگاه با فرض اینکه زنجیر مارکف پنهان در لحظه t_0 در حالت e_1 قرار دارد، 0.1 زمان طول می کشد تا زنجیر در همین حالت باقی بماند. به عبارتی دیگر از لحظه $t = 0$ تا $t = 0.1$ ، دینامیک قیمت سهام توسط رژیم ۱ توصیف می شود. سپس در لحظه $t = 0.1$ زنجیر تغییر حالت داده و از حالت e_1 به حالت e_2 پرش می کند. در این صورت 0.15 زمان طول می کشد تا زنجیر در حالت e_2 باقی

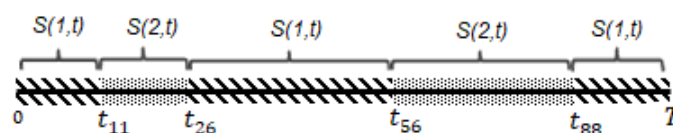
بماند. به بیان دیگر، دینامیک قیمت سهام از لحظه $t = ۰/۱۱$ تا $t = ۰/۲۵$ توسط رژیم ۲ توصیف می‌شود. به همین ترتیب، بقیه تغییر حالات زنجیر مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. شکل (۳-۱۱) نحوه سوئیچ شدن رژیم‌ها را در مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی نشان می‌دهد. همچنین در دستگاه زیر نحوه شبیه‌سازی قیمت سهام تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی با زمان‌های تغییر حالت (۳-۱۲) آورده شده است

$$\begin{aligned}
 \text{رژیم اول} & \begin{cases} S(t_1) = S(t_0) + r_1 S(t_0) \delta + \sigma_1 S(t_0) \sqrt{\delta} Z_{11}, \\ \vdots \\ S(t_{10}) = S(t_9) + r_1 S(t_9) \delta + \sigma_1 S(t_9) \sqrt{\delta} Z_{10}, \end{cases} \\
 \text{رژیم دوم} & \begin{cases} S(t_{11}) = S(t_{10}) + r_2 S(t_{10}) \delta + \sigma_2 S(t_{10}) \sqrt{\delta} Z_{11}, \\ \vdots \\ S(t_{25}) = S(t_{24}) + r_2 S(t_{24}) \delta + \sigma_2 S(t_{24}) \sqrt{\delta} Z_{25}, \end{cases} \\
 \text{رژیم اول} & \begin{cases} S(t_{26}) = S(t_{25}) + r_1 S(t_{25}) \delta + \sigma_1 S(t_{25}) \sqrt{\delta} Z_{26}, \\ \vdots \\ S(t_{55}) = S(t_{54}) + r_1 S(t_{54}) \delta + \sigma_1 S(t_{54}) \sqrt{\delta} Z_{55}, \end{cases} \\
 \text{رژیم دوم} & \begin{cases} S(t_{56}) = S(t_{55}) + r_2 S(t_{55}) \delta + \sigma_2 S(t_{55}) \sqrt{\delta} Z_{56}, \\ \vdots \\ S(t_{87}) = S(t_{86}) + r_2 S(t_{86}) \delta + \sigma_2 S(t_{86}) \sqrt{\delta} Z_{87}, \end{cases} \\
 \text{رژیم اول} & \begin{cases} S(t_{88}) = S(t_{87}) + r_1 S(t_{87}) \delta + \sigma_1 S(t_{87}) \sqrt{\delta} Z_{88}, \\ \vdots \\ S(t_{100}) = S(t_{99}) + r_1 S(t_{99}) \delta + \sigma_1 S(t_{99}) \sqrt{\delta} Z_{100}, \end{cases}
 \end{aligned}$$

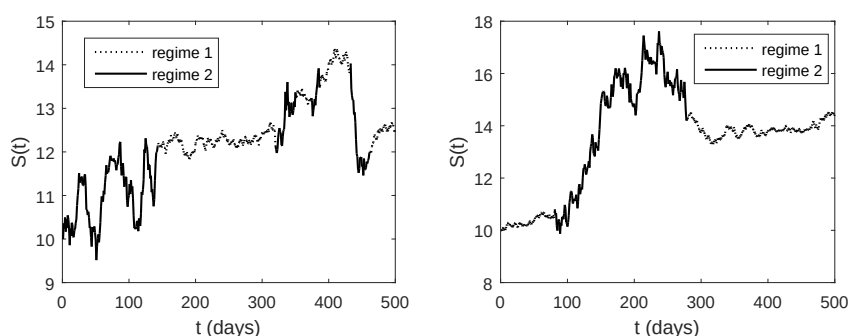
که در آن $Z_1, Z_2, \dots, Z_{100}$ نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد است.

در شکل (۳-۱۲)، دو مسیر شبیه‌سازی شده از قیمت سهام تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی بر اساس الگوریتم ۹.۳ ترسیم شده است که در آن پارامترها به صورت $s = ۱۰$ ، $\lambda = ۴$ ، $n = ۵۰۰$ ، $T = ۱$ ، $\sigma_2 = ۰/۸$ ، $\sigma_1 = ۰/۲$ ، $r_2 = ۰/۰۲$ ، $r_1 = ۰/۱$ و $P = ۰/۷۵$ در نظر گرفته شده‌اند. از آنجایی که هر رژیم در دینامیک قیمت سهام تحت مدل‌های

رژیم-سوئیچینگ یک معنای اقتصادی دارد، رژیم ۱ می تواند معرف یک "اقتصاد خوب" و رژیم ۲ می تواند معرف یک "اقتصاد بد" باشد. همانطور که در مقاردهی پارامترها مشاهده می کنیم، در رژیم ۲، تلاطم بازار بیشتر از رژیم ۱ و نرخ بهره در رژیم ۲، کمتر از رژیم ۱ است که این نشان دهنده یک اقتصاد خوب در رژیم ۱ و یک اقتصاد بد در رژیم ۲ است. با این حال برای مقایسه قابل قبول داده های به دست آمده توسط مدل با داده های واقعی بازار و تعیین اینکه کدام رژیم وضعیت اقتصادی را به خوبی در نظر می گیرد، نیاز به کالیبره کردن مدل با استفاده از داده های واقعی بازار است.



شکل ۳-۱۱: نحوه سوئیچ شدن رژیم های مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی در مثال (۳-۶).



شکل ۳-۱۲: دو مسیر شبیه سازی شده از قیمت سهام تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی.

الگوریتم ۹.۳: شبیه سازی قیمت سهام تحت مدل رژیم-سوئیچینگ حرکت براونی هندسی

- ۱- قرار بده $r = (r_1, r_2)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$, $dt = t_i - t_{i-1} = T/n$ و $S(t_0) = s$.
- ۲- متغیر تصادفی پواسن H با نرخ λ را توسط دستور $H = \text{poissrnd}(\lambda)$ تولید کن.
- ۳- متغیر تصادفی دوجمله ای با پارامترهای ۱ و $\mathcal{P}$ را توسط دستور $k = \text{binornd}(1, \mathcal{P})$ تولید کن.
- ۴- اگر $k = 0$ باشد آنگاه $Z(t_0) = e_1$ ، در غیر این صورت قرار بده $Z(t_0) = e_2$.

۵- H متغیر تصادفی مستقل از هم نمایی با پارامتر λ که به طور صعودی مرتب شده‌اند را توسط دستور $U = \text{sort}(\text{exprnd}(\lambda, 1, H))$ تا زمانی که شرط $U(H) < T$ برقرار باشد تولید کن.

۶- برای هر $i = 1, \dots, n$ اگر بر اساس زمان‌های تغییر رژیم U ، $Z(t_i)$ در حالت e_1 باشد، قرار بده $(r(t_i), \sigma(t_i)) = (r_1, \sigma_1)$. در غیر این صورت، $(r(t_i), \sigma(t_i)) = (r_2, \sigma_2)$.

۷- یک بردار n تایی از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد که به طور مستقل از هم توزیع شده‌اند را توسط دستور $Z = \text{randn}(1, n)$ تولید کن.

۸- برای هر $i = 1, \dots, n$ قیمت سهام را به صورت زیر شبیه‌سازی کن

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) + r(t_{i-1})S(t_{i-1})dt + \sigma(t_{i-1})S(t_{i-1})\sqrt{dt}Z(i).$$

۳-۳ تمرینات فصل سوم

۱- معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t \in [0, T], \quad (13-3)$$

که در آن f و g دو تابع مشتق‌پذیر هستند. گسسته‌سازی میلشتین^۱ یکی دیگر از روش‌های گسسته‌سازی برای معادلات دیفرانسیل تصادفی است که با استفاده از آن فرم گسسته‌شده معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۳-۳) به صورت زیر بیان می‌شود

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + f(X(t_{i-1}))\Delta + g(X(t_{i-1}))\Delta_i W + \frac{1}{2}g(X(t_{i-1}))g'(X(t_{i-1}))((\Delta_i W)^2 - \Delta_i),$$

که در آن $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\Delta := t_i - t_{i-1}$ است. همچنین $\Delta_i W$ برای هر $i = 1, \dots, n$ نمونه‌های حرکت براونی $W(t)$ است.

با استفاده از روش‌های گسسته‌سازی اوپلر و میلشتین یک الگوریتم برای جواب هر یک از معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر ارائه دهید

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sqrt{X(t)}dW(t) \quad \text{الف}$$

¹Milstein

$$dX(t) = e^{X(t)}dt + \sin(X(t))dW(t) \quad \text{ب)}$$

۲- (شبیه سازی قیمت نقدی کالا) فرض کنید $S(t)$ قیمت نقدی کالا در لحظه t باشد. در این صورت تحت مدل بازگشت به میانگین، دینامیک قیمت نقدی کالا توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف می شود

$$dS(t) = \kappa(r - \delta - \ln S(t))S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad S(0) > 0, \quad (14-3)$$

که در آن κ سرعت بازگشت به میانگین، r نرخ بهره بدون ریسک، δ نرخ آیدی و σ تلاطم قیمت نقدی است. ابتدا با استفاده از روش میلشتین معادله دیفرانسیل تصادفی (۱۴-۳) را گسسته سازی کرده و سپس توسط یک الگوریتم شبیه سازی، قیمت نقدی کالا را تحت دینامیک (۱۴-۳) مدل سازی کنید.

۳- (شبیه سازی قیمت قراردادهای آتی کالا) فرض کنید $S(t)$ قیمت نقدی کالا باشد که دینامیک آن روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ از مدل تصادفی (۱۴-۳) پیروی می کند. الف) در بازارهای انرژی و کالا، قراردادهای آتی (یا پیمان های آتی) همواره مورد معامله قرار می گیرند و ارزش آنها که از یک مدل تصادفی پیروی می کند از قیمت نقدی حاصل می شود. ارزش قرارداد آتی کالا در لحظه t با زمان سررسید T ، توسط امید ریاضی شرطی $F_T(t) := \mathbb{E}[S(t) | \mathcal{F}(t)]$ به دست می آید. با استفاده از لم ایتو ثابت کنید

$$dF_T(t) = F_T(t)e^{-\kappa(T-t)}\sigma dW(t), \quad F_T(0) := f > 0. \quad (15-3)$$

همچنین با استفاده از روش گسسته سازی اوپلر ارزش قرارداد آتی کالا را شبیه سازی کنید. ب) در ادبیات ریاضیات مالی، تلاطم موضعی به تلاطمی از مدل تصادفی اشاره دارد که وابسته به ارزش دارایی است. نسخه تلاطم موضعی از مدل قیمت قرارداد آتی کالا (۱۵-۳) به صورت زیر بیان می شود

$$dF_T(t) = F_T(t)e^{-\kappa(T-t)}\sigma(t, F_T(t))dW(t), \quad F_T(0) := f > 0, \quad (16-3)$$

که در آن برای $\gamma \in (0, 1)$ ، $\sigma(t, F_T(t)) = \sigma F_T^\gamma(t) \sqrt{\frac{1 - e^{-2\kappa(T-t)}}{2\kappa(T-t)}}$ با استفاده از روش گسسته سازی اوپلر ارزش قرارداد آتی کالا را تحت مدل تلاطم موضعی (۱۶-۳) شبیه سازی کرده و

نتایج حاصل شده را با نتایج شبیه‌سازی به‌دست آمده توسط مدل (۳-۱۵) مقایسه کنید.

۴- (شبیه‌سازی قیمت نقدی کالا توسط مدل تصادفی دو-عامله) فرض کنید $S(t)$ قیمت نقدی کالا در لحظه t باشد که توسط تابع نمایی دو مؤلفه تصادفی $X(t)$ و $Y(t)$ به صورت زیر تشکیل شده است

$$\begin{cases} S(t) = e^{X(t)+Y(t)} \\ dX(t) = -\kappa X(t)dt + \sigma dW_1(t), \quad X(0) = x \\ dY(t) = \mu dt + \xi dW_2(t), \quad Y(0) = y \end{cases} \quad (۳-۱۷)$$

که در آن $X(t)$ نشان‌دهنده تغییرات قیمت در کوتاه مدت و $Y(t)$ بیانگر سطح قیمت تعادل است. همچنین پارامترهای ثابت مثبت μ, κ, σ و ξ به ترتیب ضرایب بازگشت به میانگین و تلاطم‌های فرایند تغییرات کوتاه مدت قیمت و فرایند قیمت تعادل هستند. $W_1(t)$ و $W_2(t)$ نیز دو حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ هستند.

الف) یک الگوریتم شبیه‌سازی برای مدل‌سازی قیمت نقدی کالا تحت دینامیک (۳-۱۷) ارائه دهید. ب) نشان دهید

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\ln S(t)] &= e^{-\kappa t}x + y + \mu t, \\ V[\ln S(t)] &= (1 - e^{-\kappa t})\frac{\sigma^2}{\kappa} + \xi^2 t + 2(1 - e^{-\kappa t})\frac{\rho\xi\sigma}{\kappa}. \end{aligned}$$

۵- (شبیه‌سازی قیمت نقدی نفت) فرض کنید $S(t)$ قیمت نقدی نفت در لحظه t باشد. در این صورت دینامیک دو عامله برای قیمت نقدی نفت به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} dS(t) = (Z(t) - X(t))S(t)dt + \sigma S(t)dW_1(t), \\ dX(t) = -\kappa X(t)dt + \xi dW_2(t), \\ dZ(t) = \theta(\lambda - Z(t))dt + \eta dW_3(t), \end{cases} \quad (۳-۱۸)$$

که در آن $\sigma, \kappa, \xi, \theta, \lambda$ و η پارامترهای ثابت مثبت هستند. همچنین $W_1(t)$ ، $W_2(t)$ و $W_3(t)$ سه حرکت براونی همبسته هستند به‌طوری که ضریب همبستگی $W_1(t)$ و $W_2(t)$ برابر $\rho_{۱۲}$ ، ضریب همبستگی $W_1(t)$ و $W_3(t)$ برابر $\rho_{۱۳}$ و ضریب همبستگی $W_2(t)$ و $W_3(t)$ برابر $\rho_{۲۳}$ است.

ابتدا با استفاده از روش اویلر، دستگاه (۳-۱۸) را گسسته سازی کرده و سپس با ارائه یک الگوریتم، قیمت نقدی نفت را تحت دینامیک (۳-۱۸) شبیه سازی کنید.

۶- (شبیه سازی قیمت نقدی الکتریسیته توسط مدل رژیم-سوئیچینگ) فرض کنید $S(t)$ قیمت نقدی الکتریسیته باشد. در این صورت $S(t)$ تحت مدل رژیم-سوئیچینگ دو حالت به صورت زیر توصیف می شود

$$dS(t) = (\alpha(Z(t)) - \beta(Z(t))S(t))dt + \sigma(Z(t))|S(t)|^{\gamma(Z(t))}dW(t), \quad (3-19)$$

که در آن $W(t)$ حرکت براونی و پارامترهای α, β, σ و γ وابسته به زنجیر مارکف پنهان دو حالت $Z(t)$ هستند.

ابتدا با استفاده از روش اویلر معادله دیفرانسیل تصادفی (۳-۱۹) را گسسته سازی کرده و سپس با ارائه یک الگوریتم، قیمت نقدی الکتریسیته را تحت دینامیک (۳-۱۹) شبیه سازی کنید.

۷- (شبیه سازی قیمت نقدی الکتریسیته توسط مدل سه-عامله) فرض کنید $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند قیمت نقدی الکتریسیته باشد که به صورت تابع نمایی این سه مؤلفه تشکیل شده است: (الف) تابع متناوب و قطعی f که به عنوان تابع فصلی شناخته می شود، (ب) فرایند حرکت براونی رانش شده X که قیمت های متعادل را در نظر می گیرد و (ج) فرایند پرش Y که پیک های موجود در قیمت نقدی الکتریسیته را لحاظ می کند. تحت این ساختار، قیمت نقدی الکتریسیته توسط معادلات دیفرانسیل تصادفی زیر توصیف می شود

$$\begin{cases} S(t) = f(t)e^{X(t)+Y(t)} \\ f(t) = a + bt + c \sin\left(\frac{2\pi(t-d)}{365}\right) \\ dX(t) = \alpha dt + \sigma dW(t) \\ dY(t) = -\beta Y(t^-) + J(t)dN(t) \end{cases} \quad (3-20)$$

که در آن $W := \{W(t)\}_{t \in [0, T]}$ حرکت براونی، $N := \{N(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند پواسن با شدت λ و J اندازه پرش است که از توزیع لگ-نرمال پیروی می کند. همچنین α, σ پارامترهای ثابت مثبت و a, b, c, d پارامترهای ثابت هستند. با فرض اینکه W, N و J مستقل هستند، بر اساس یک الگوریتم شبیه سازی، قیمت نقدی الکتریسیته را تحت دینامیک (۳-۲۰) مدل سازی کنید.

۸- (شبیه‌سازی قیمت سهام توسط مدل هستون مجهز به عامل پرش) فرض کنید $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ و $\{V(t)\}_{t \in [0, T]}$ به ترتیب بیانگر فرایند قیمت سهام و فرایند تلاطم باشند. در این صورت $S(t)$ تحت مدل هستون-پرش به صورت زیر بیان می‌شود

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = (r - \lambda m)dt + \sqrt{V(t)}dW_1(t) + (e^J - 1)dN(t) \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t) \end{cases} \quad (۲۱-۳)$$

که در آن $W_1 := \{W_1(t)\}_{t \in [0, T]}$ و $W_2 := \{W_2(t)\}_{t \in [0, T]}$ دو فرایند حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. $N := \{N(t)\}_{t \in [0, T]}$ فرایند پواسن با شدت λ و J اندازه پرش است. همچنین m میانگین فراوانی پرش است، یعنی $m = \mathbb{E}[e^J - 1]$. با فرض اینکه اندازه پرش دارای توزیع نمایی است و فرایندهای W_1, W_2, N و J مستقل هستند، قیمت سهام را تحت دینامیک (۲۱-۳) با ارائه یک الگوریتم شبیه‌سازی کنید.

فصل ۴

شبیه‌سازی قیمت اختیار

همان‌طور که در فصل اول اشاره شد، روش شبیه‌سازی مونت-کارلو یک روش کارآمد برای محاسبه انتگرال‌های پیچیده و مسائلی مانند محاسبه امید ریاضی است که جواب دقیق آن‌ها را نمی‌توان به‌دست آورد. از آنجایی که ارزش هر اختیار بر اساس امید ریاضی تابع بازده آن مشخص می‌شود، روش‌های شبیه‌سازی مونت-کارلو را می‌توان برای قیمت‌گذاری اختیار به کار گرفت. استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو به خصوص برای اختیاراتی که جواب دقیق آن‌ها را نمی‌توان به‌دست آورد می‌تواند بسیار سودمند باشد. اختیارات آسیایی حسابی یکی از این اختیارات است که فرم بسته آن وجود ندارد.

فرض کنید $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول افراز $\delta := t_i - t_{i-1}$ باشد. در این صورت ارزش اختیار آسیایی حسابی با ارزیابی امید ریاضی زیر به‌دست می‌آید

$$\mathbb{E}[e^{-rT} \max(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0)], \quad i = 1, \dots, n, \quad (1-4)$$

که در آن r نرخ بهره بدون ریسک، T زمان سررسید، K قیمت توافقی و $S(t_i)$ قیمت سهام در لحظه t_i است که توسط فرم گسسته‌شده مدل حرکت براونی هندسی زیر هدایت می‌شود

$$S(t_i) = S(t_{i-1}) + rS(t_{i-1})\delta + \sigma S(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i, \quad (2-4)$$

به‌طوری که $\sigma > 0$ تلاطم بازار و $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد است. بنابراین $S(t_i)$ دارای توزیع نرمال با میانگین $S(t_{i-1}) + rS(t_{i-1})\delta$ و واریانس

$\delta(t_{i-1})S^2\sigma^2$ است. از طرفی مجموع متغیرهای تصادفی نرمال، یک متغیر تصادفی را بیان می کند که تابع توزیع آن نامعلوم است. بنابراین جواب امید ریاضی (۴-۱) برای به دست آوردن ارزش اختیار آسیایی حسابی به صورت دقیق ناممکن خواهد بود.

با توجه به مطالب بیان شده در خصوص اهمیت روش شبیه سازی مونت-کارلو در قیمت گذاری اختیارات، در این فصل تحت مدل حرکت براونی هندسی گسسته شده (۴-۲)، ارزش اختیارات اروپایی و آسیایی را با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو به دست می آوریم. همچنین برای افزایش کارایی این روش از شبیه سازی، تکنیک های کاهش واریانس متغیرهای متضاد، متغیرهای متضاد تعمیم یافته و متغیر کنترلی را برای قیمت گذاری این نوع از اختیارات مورد مطالعه قرار می دهیم.

۴-۱ روش شبیه سازی مونت-کارلو در قیمت گذاری اختیار

در این بخش با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو به قیمت گذاری اختیارات اروپایی و آسیایی از نوع خرید می پردازیم. قبل از پرداختن به این بحث، نحوه قیمت گذاری اختیارات از نوع خرید یا فروش را به طور کلی ارائه می دهیم. ذکر این نکته لازم است که در تمام این فصل قیمت گذاری اختیار روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ انجام می شود که در آن Ω فضای نمونه ای، $\mathcal{F}$ اطلاعات بازار و $\mathbb{Q}$ اندازه احتمال ریسک خنثی است.

تعریف ۴-۱. اختیار قراردادی است بین فرد واگذارکننده (فروشنده اختیار) و فردی که حق خرید یا فروش دارایی تعهد شده (خریدار اختیار) را دارد. در واقع اختیار نوعی ورق مشتقه است که به دارنده آن حق خرید یا فروش دارایی خاص را در زمان مشخص از آینده (زمان سررسید) با قیمت توافقی مشخص می دهد. در صورتی که فرد بر اساس اختیاری که نزد خود دارد اقدام به خرید دارایی تعهد شده کند به آن اختیار خرید و در صورتی که اقدام به فروش این دارایی کند به آن اختیار فروش گویند. فرض کنید $\{t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[t_0, T]$ باشد. همچنین فرض کنید $S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)$ قیمت های سهام در $n+1$ روز معاملاتی باشند که در بازه زمانی $[t_0, T]$ گزارش شده اند. در این صورت با فرض اینکه T زمان سررسید، K قیمت توافقی، r نرخ بهره بدون ریسک، g یک تابع اندازه پذیر و $\mathbb{E}$ امید ریاضی تحت اندازه احتمال ریسک خنثی باشد، قیمت اختیارات خرید و فروش به ترتیب در حالت کلی به صورت زیر بیان می شوند

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[e^{-rT} \max\left(g(S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)) - K, 0\right)\right], \\ & \mathbb{E}\left[e^{-rT} \max\left(K - g(S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)), 0\right)\right]. \end{aligned}$$

در بخش‌های بعدی بیان می‌کنیم، تابع g که در ریاضی مالی از آن به عنوان تابع بازده اختیار یاد می‌شود، برای اختیارات خرید از نوع اروپایی، آسیایی حسابی و آسیایی هندسی به ترتیب توسط روابط زیر بیان می‌شوند

$$\begin{aligned} g(S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)) &= S(t_n) = S(T), \\ g(S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i), \\ g(S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)) &= \left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

۴-۱-۱ قیمت‌گذاری اختیار اروپایی

فرض کنید $S(T)$ قیمت سهام در زمان سررسید $T > 0$ ، نرخ بهره بدون ریسک و $K > 0$ قیمت توافقی باشد. در این صورت قیمت اختیار خرید اروپایی در زمان $t = 0$ ، به صورت زیر به دست می‌آید

$$C(r, T, K) = e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0)]. \quad (۳-۴)$$

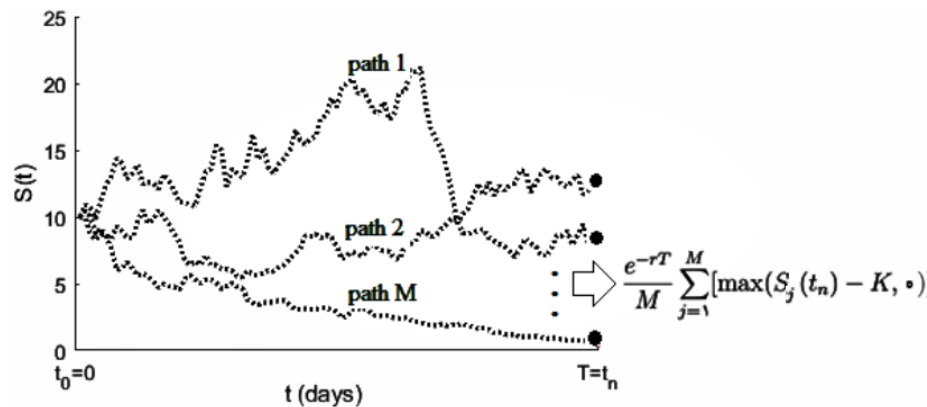
فرض کنید M تعداد شبیه‌سازی مونت-کارلو و $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta > 0$ باشد. فرض کنید $S_j(t_0), S_j(t_1), \dots, S_j(t_n)$ قیمت‌های سهام متناظر با مسیر j ام در بازه زمانی $[0, T]$ باشد، که توسط مدل تصادفی حرکت براونی هندسی هدایت می‌شود. در این صورت با استفاده از روش گسسته‌سازی اولر برای هر $j = 1, \dots, M$ و داریم

$$S_j(t_i) = S_j(t_{i-1}) + rS_j(t_{i-1})\delta + \sigma S_j(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{ij}, \quad S_j(t_0) = s > 0, \quad (۴-۴)$$

که در آن r و σ مقادیر ثابتی هستند که به ترتیب نرخ بهره بدون ریسک و تلاطم بازار را نشان می‌دهند. همچنین $Z_{1j}, \dots, Z_{nj}$ برای هر $j = 1, \dots, M$ یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال استاندارد است. با توجه به اینکه $t_n = T$ ، برآورد ارزش اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو به صورت زیر به دست می‌آید

$$C^{MC}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M [\max(S_j(t_n) - K, 0)]. \quad (۵-۴)$$

شکل (۱-۴) نحوه محاسبه قیمت اختیار خرید اروپایی را بر اساس روش شبیه سازی مونت-کارلو از طریق پیاده سازی M مسیر از قیمت سهام نشان می دهد. همان طور که از این شکل مشاهده می شود، ابتدا بازده تنزیل یافته اختیار خرید اروپایی متناظر با مسیر j ام ($1 \leq j \leq M$) از قیمت سهام به صورت $e^{-rT} \max(S_j(T) - K, 0)$ محاسبه می شود. سپس میانگین بازده های تنزیل یافته به عنوان قیمت اختیار خرید اروپایی در نظر گرفته می شود.



شکل ۱-۴: قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی با نمایش مسیرهای مختلف سهام.

الگوریتم ۱.۴: قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو

- ۱- قرار بده $\frac{T}{n}$ به $dt = t_{i+1} - t_i$ و $S(1, :) = s$ و $S = \text{zeros}(n, M)$.
 - ۲- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۳ تا ۶ را انجام بده.
 - ۳- برای $i = 2, \dots, n$ دستورات ۴ تا ۵ را انجام بده.
 - ۴- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = \text{randn}$ تولید کن.
 - ۵- قیمت سهام متناظر با مسیر j ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن
- $$S(i, j) = S(i-1, j) + S(i-1, j) * r * dt + S(i-1, j) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z.$$
- ۶- بازده تنزیل یافته اختیار خرید اروپایی متناظر با مسیر j ام از قیمت سهام را توسط دستور زیر محاسبه کن

$$pay(j) = \exp(-r * T) * \max(S(n, j) - K, 0).$$

۷- قیمت اختیار خرید اروپایی را به عنوان میانگین بازده تنزیل‌یافته این اختیار توسط دستور $mean(pay)$ چاپ کن.

○ در خط ۱ الگوریتم، یک ماتریس $n \times M$ تولید شده است، به‌طوری که درایه‌های مربوط به سطر اول این ماتریس قیمت اولیه سهام (یک مقدار ثابت) است. توجه دارید که هر ستون از این ماتریس بیانگر یک مسیر از قیمت سهام با n نقطه گسسته است که بر اساس گام ۵ محاسبه می‌شود. در واقع مقدار M به عنوان تعداد شبیه‌سازی مونت-کارلو برای برآورد قیمت اختیار در نظر گرفته می‌شود.

۴-۱-۲ قیمت‌گذاری اختیار آسیایی

اختیار آسیایی در سال ۱۹۸۷ برای قیمت‌گذاری اختیارهای صادر شده روی میانگین قیمت قراردادهای نفت خام توسط دفتر بانک‌داری تراست^۱ توکیو معرفی شد. با توجه به نحوه تعریف میانگین‌ها، اختیارهای آسیایی را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد: میانگین حسابی آسیایی و میانگین هندسی آسیایی. از آنجایی که لگاریتم قیمت سهام به صورت نرمال توزیع می‌شود، میانگین هندسی این قیمت‌ها نیز دارای توزیع نرمال است. در نتیجه می‌توان یک فرم بسته برای ارزش اختیار آسیایی هندسی به‌دست آورد. برای اختیارهای آسیایی حسابی، از آنجایی که جمع چند متغیر تصادفی لگ-نرمال از هیچ توزیعی پیروی نمی‌کند، نمی‌توان یک فرم بسته برای آن به‌دست آورد. با این حال با استفاده از الگوریتم‌های عددی می‌توان مقدار آن را به صورت تقریبی محاسبه نمود. یکی از روش‌های مناسب برای برآورد قیمت اختیار آسیایی حسابی، روش شبیه‌سازی مونت-کارلو است. مزیت استفاده از الگوریتم‌های مبتنی بر شبیه‌سازی مونت-کارلو این است که با افزایش تعداد شبیه‌سازی‌ها، تقریب‌های بهتری برای قیمت اختیار آسیایی حسابی حاصل می‌شود.

فرض کنید $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه‌ی $[0, T]$ با طول گام $\delta > 0$ باشد. در این صورت بازده تنزیل‌یافته اختیارات خرید آسیایی حسابی و آسیایی هندسی با

¹Trust

قیمت توافقی K و زمان سررسید T به ترتیب به صورت زیر در نظر گرفته می شوند

$$e^{-rT} \max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0 \right),$$

$$e^{-rT} \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right).$$

بنابراین با توجه به تعریف (۱-۴)، قیمت اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی با نرخ بهره r را به ترتیب به صورت زیر می توان محاسبه کرد

$$C^A(r, T, K) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0 \right) \right],$$

$$C^G(r, T, K) = e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right].$$

تحت مدل حرکت براونی هندسی گسسته شده (۴-۴)، قیمت اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی را با استفاده از روش شبیه سازی مونت-کارلو به صورت زیر می توان برآورد کرد

$$C^{A-MC}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_j(t_i) - K, 0 \right) \right], \quad (۶-۴)$$

$$C^{G-MC}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[\max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right]. \quad (۷-۴)$$

الگوریتم ۲.۴: قیمت گذاری اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی با روش شبیه سازی مونت-کارلو

۱- قرار بده $\frac{T}{n}$ ، $dt = t_{i+1} - t_i$ و $S(1, :) = s$ و $S = \text{zeros}(n, M)$.

۲- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۳ تا ۶ را انجام بده.

۳- برای $i = 2, \dots, n$ دستورات ۴ تا ۵ را انجام بده.

۴- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = \text{randn}$ تولید کن.

۵- قیمت سهام متناظر با مسیر j ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن

$$S(i, j) = S(i-1, j) + S(i-1, j) * r * dt + S(i-1, j) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z.$$

۶- بازده تنزیل یافته اختیار آسیایی هندسی و حسابی متناظر با مسیر j ام از قیمت سهام را به ترتیب توسط دستورات زیر محاسبه کن

$$\begin{aligned} \text{pay}_g(j) &= \exp(-r * T) * \max((\text{prod}(S(:, j))) \wedge (1/n) - K, 0), \\ \text{pay}_a(j) &= \exp(-r * T) * \max(\text{mean}(S(:, j)) - K, 0). \end{aligned}$$

۷- قیمت اختیارات آسیایی هندسی و آسیایی حسابی را به عنوان میانگین بازده تنزیل یافته این اختیارات به ترتیب توسط دستورات $\text{mean}(\text{pay}_g)$ و $\text{mean}(\text{pay}_a)$ چاپ کن.

در جدول (۴-۱) ارزش اختیارات خرید اروپایی، آسیایی هندسی و آسیایی حسابی که توسط روش شبیه‌سازی مونت-کارلو به دست آمده‌اند را می‌توانیم مشاهده کنیم. در این جدول همچنین انحراف معیار برآوردگر مونت-کارلو مربوط به قیمت هر اختیار آورده شده است. در اینجا و در ادامه این فصل پارامترهایی که برای ارزیابی قیمت اختیارات در نظر گرفته شده‌اند همان پارامترهای برآورد شده بر اساس داده‌های قیمت سهام شرکت مایکروسافت از ۲۰ اوت ۲۰۲۱ تا ۱۰ اوت ۲۰۲۲ هستند که در فصل سوم به صورت زیر برآورد شدند

$$\begin{aligned} r &= -0.0306, \sigma = 0.0897, \\ T &= 1, s = 304/36, K = 300, n = 50, M = 5000. \end{aligned}$$

جدول ۴-۱: انحراف معیار و قیمت اختیارات خرید اروپایی، آسیایی حسابی و آسیایی هندسی با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو.

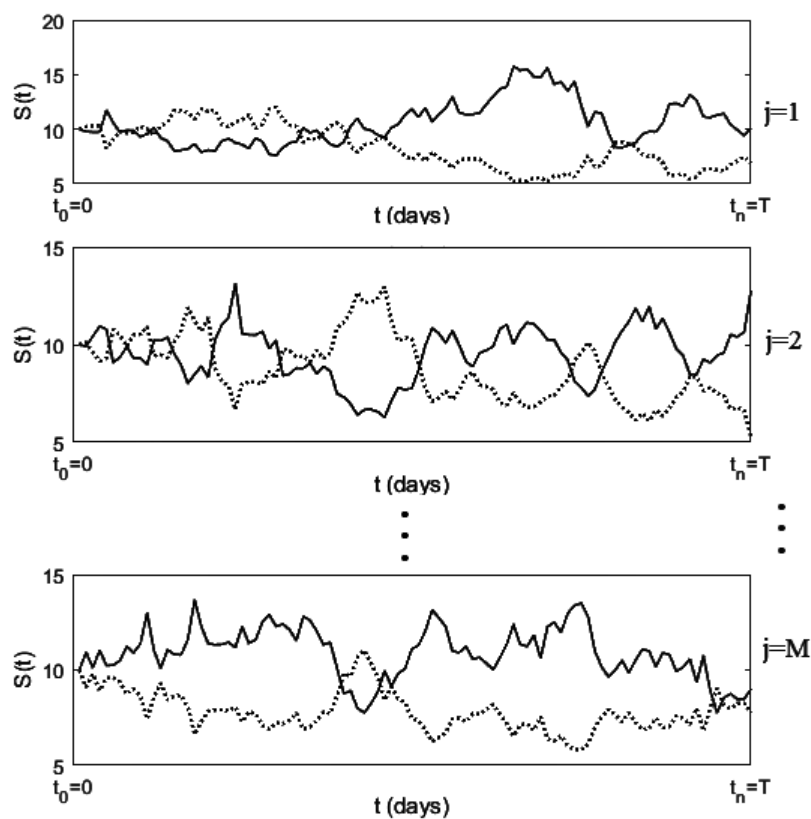
Option type	Value	Standard deviation
European	8.7701	15.0581
Geometric Asian	6.2977	9.5505
Arithmetic Asian	6.3847	9.6559

۴-۲ روش‌های کاهش واریانس در قیمت‌گذاری اختیار

در این بخش با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو از طریق پیاده‌سازی روش‌های کاهش واریانس منغیرهای متضاد، متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته و متغیر کنترلی به قیمت‌گذاری اختیارات خرید اروپایی، آسیایی حسابی و آسیایی هندسی تحت مدل حرکت براونی هندسی می‌پردازیم.

۱-۲-۴ قیمت گذاری اختیار با روش متغیرهای متضاد

همان طور که در فصل اول مطالعه کردیم، روش متغیرهای متضاد یکی از روش های کاهش واریانس است که از طریق ایجاد همبستگی منفی بین جفت تکرار از روش شبیه سازی مونت-کارلو پیاده سازی می شود. در این بخش با استفاده از روش متغیرهای متضاد و تولید M جفت بردار n تایی از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد که ضریب همبستگی دوبه دوی آنها منفی است به پیاده سازی M جفت مسیر تصادفی از قیمت سهام می پردازیم. استفاده از $2M$ مسیر تصادفی تولید شده از قیمت سهام که ضریب همبستگی دوبه دوی آنها در هر تکرار از شبیه سازی مونت-کارلو منفی است، باعث می شود واریانس برآوردگر مربوط به قیمت گذاری اختیار کاهش یابد.



شکل ۲-۴: M جفت مسیر از قیمت سهام که ضریب همبستگی هر جفت مسیر، منفی یک است.

در شکل (۴-۲)، M جفت مسیر از قیمت سهام که همبستگی هر جفت از آن‌ها برابر منفی یک است نشان داده شده است. کلید اصلی این روش آن است که متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z که برای تولید یک مسیر از قیمت سهام در لحظه t_i به کار گرفته می‌شود، برای جفت متناظر با آن مسیر نیز در لحظه t_i ، متغیر تصادفی نرمال استاندارد $-Z$ مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه همبستگی Z و $-Z$ منفی یک است، همبستگی هر جفت مسیر از قیمت سهام در لحظه t_i نیز منفی یک خواهد بود. در این بخش با استفاده از این ایده و با استفاده از روش متغیرهای متضاد، اختیارات اروپایی و آسیایی را قیمت‌گذاری کرده و الگوریتم مربوط به هر یک را ارائه می‌دهیم.

۴-۲-۱-۱ قیمت‌گذاری اختیار اروپایی با روش متغیرهای متضاد

می‌دانیم اگر Z متغیر تصادفی نرمال استاندارد باشد، آنگاه $Corr[Z, -Z] = -1$. در این صورت برای هر $j = 1, \dots, M$ و $i = 1, \dots, n$ ، با استفاده از روش گسسته‌سازی اوایلر تحت مدل حرکت براونی هندسی می‌توان نوشت

$$\begin{cases} S_1(t_i) = S_1(t_{i-1}) + rS_1(t_{i-1})\delta + \sigma S_1(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{i1}, \\ \bar{S}_1(t_i) = \bar{S}_1(t_{i-1}) + r\bar{S}_1(t_{i-1})\delta - \sigma \bar{S}_1(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{i1}, \\ S_2(t_i) = S_2(t_{i-1}) + rS_2(t_{i-1})\delta + \sigma S_2(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{i2}, \\ \bar{S}_2(t_i) = \bar{S}_2(t_{i-1}) + r\bar{S}_2(t_{i-1})\delta - \sigma \bar{S}_2(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{i2}, \\ \vdots \\ S_M(t_i) = S_M(t_{i-1}) + rS_M(t_{i-1})\delta + \sigma S_M(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{iM}, \\ \bar{S}_M(t_i) = \bar{S}_M(t_{i-1}) + r\bar{S}_M(t_{i-1})\delta - \sigma \bar{S}_M(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{iM}, \end{cases} \quad (۴-۸)$$

که در آن $Z_{1j}, \dots, Z_{nj}$ برای هر $j = 1, \dots, M$ ، نمونه تصادفی از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد است. برای هر $j = 1, \dots, M$ ، قرار می‌دهیم

$$S_j = (S_j(t_0), S_j(t_1), \dots, S_j(t_n)), \quad \bar{S}_j = (\bar{S}_j(t_0), \bar{S}_j(t_1), \dots, \bar{S}_j(t_n)).$$

در این صورت همبستگی مسیرهای تولید شده توسط S_j و $\bar{S}_j$ برابر منفی یک است. توجه کنید که برای هر $j \neq j' \in \{1, \dots, M\}$ ، مسیرهای S_j و $S_{j'}$ مستقل از هم تولید می‌شوند.

بنابراین با توجه به روش متغیرهای متضاد که در فصل اول آن را مطالعه کردیم، امید ریاضی $e^{-rT}\mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0)]$ را به عنوان قیمت اختیار خرید اروپایی در لحظه $t = 0$ می‌توانیم

به صورت زیر برآورد کنیم

$$C^{AV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M [\max(S_j(t_n) - K, 0) + \max(\bar{S}_j(t_n) - K, 0)]. \quad (9-4)$$

توجه کنید که بنا به قضیه (۱-۱) در فصل اول، برآوردگر $C^{AV}(r, T, K)$ یک برآوردگر نااریب و واریانس آن همواره کوچکتر از واریانس برآوردگر مونت-کارلو برای قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی است. به عبارتی دیگر $V[C^{AV}(r, T, K)] < V[C^{MC}(r, T, K)]$.

الگوریتم ۳.۴: قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش متغیرهای متضاد

- ۱- قرار بده $\frac{T}{n}$ ، $dt = t_{i+1} - t_i$ ، $S = \text{zeros}(n, M)$ و $X = S$ و $S(1, :) = s$.
- ۲- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۳ تا ۶ را انجام بده.
- ۳- برای $i = 2, \dots, n$ دستورات ۴ تا ۵ را انجام بده.
- ۴- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = \text{randn}$ تولید کن.
- ۵- یک جفت قیمت سهام همبسته (همبستگی منفی)، متناظر با مسیر j ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن

$$\begin{aligned} S(i, j) &= S(i-1, j) + S(i-1, j) * r * dt \\ &\quad + S(i-1, j) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z, \\ X(i, j) &= X(i-1, j) + X(i-1, j) * r * dt \\ &\quad - X(i-1, j) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z. \end{aligned}$$

- ۶- بازده تنزیل یافته اختیار خرید اروپایی متناظر با جفت مسیر j ام از قیمت سهام را توسط دستور زیر محاسبه کن

$$\begin{aligned} \text{pay}(j) &= 0.5 * \exp(-r * T) * (\max(S(n, j) - K, 0) \\ &\quad + \max(X(n, j) - K, 0)). \end{aligned}$$

- ۷- قیمت اختیار خرید اروپایی را به عنوان میانگین بازده تنزیل یافته این اختیار توسط دستور $\text{mean}(\text{pay})$ چاپ کن.

۲-۱-۲-۴ قیمت‌گذاری اختیار آسیایی با روش متغیرهای متضاد

در این بخش می‌خواهیم با استفاده از روش متغیرهای متضاد و تولید M جفت مسیر تصادفی از قیمت سهام بر اساس دستگاه (۴-۸)، واریانس برآوردگر مربوط به قیمت اختیار آسیایی حسابی و هندسی را کاهش دهیم. با توجه به این حقیقت که برای هر $i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, M$ ، جفت متغیرهای تصادفی $(S_j(t_i), \bar{S}_j(t_i))$ در دستگاه (۴-۸) همبستگی منفی دارند، بر اساس M شبیه‌سازی مونت-کارلو می‌توانیم این هدف را به صورت زیر به سرانجام برسانیم.

فرض کنید M تعداد شبیه‌سازی مونت-کارلو و $\{t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta > 0$ باشد. می‌دانیم قیمت اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی در لحظه $t = 0$ با زمان سررسید T ، قیمت توافقی K و نرخ بهره r می‌توانند به ترتیب توسط روابط $\mathbb{E}[e^{-rT} \max((\prod_{i=1}^n S(t_i))^{1/n} - K, 0)]$ و $\mathbb{E}[e^{-rT} \max(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0)]$ محاسبه شوند. بنابراین با استفاده از روش متغیرهای متضاد، برآورد قیمت اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی را به ترتیب به صورت زیر می‌توانیم به‌دست آوریم

$$C^{A-AV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[\max\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_j(t_i) - K, 0\right) + \max\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{S}_j(t_i) - K, 0\right) \right], \quad (10-4)$$

$$C^{G-AV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left[\max\left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i)\right)^{1/n} - K, 0\right) + \max\left(\left(\prod_{i=1}^n \bar{S}_j(t_i)\right)^{1/n} - K, 0\right) \right]. \quad (11-4)$$

توجه کنید که بنا به قضیه (۱-۱) در فصل اول، برآوردگرهای (۴-۱۰) و (۴-۱۱) ناریب هستند و واریانس آن‌ها کوچکتر از واریانس حاصل شده توسط برآوردگر مونت-کارلو است.

الگوریتم ۴.۴: قیمت‌گذاری اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی با روش متغیرهای متضاد

۱- قرار بده $dt = t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n}$ ، $S = \text{zeros}(n, M)$ و $S(1, :) = s$ ، $X = S$

۲- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۳ تا ۶ را انجام بده.

۳- برای $i = 2, \dots, n$ دستورات ۴ تا ۵ را انجام بده.

۴- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = \text{randn}$ تولید کن.

۵- یک جفت قیمت سهام همبسته (همبستگی منفی)، متناظر با مسیر j ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن

$$\begin{aligned} S(i, j) &= S(i-1, j) + S(i-1, j) * r * dt \\ &\quad + S(i-1, j) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z, \\ X(i, j) &= X(i-1, j) + X(i-1, j) * r * dt \\ &\quad - X(i-1, j) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z. \end{aligned}$$

۶- بازده تنزیل یافته اختیارات آسیایی هندسی و حساسی متناظر با جفت j ام از قیمت سهام را به ترتیب توسط دستورات زیر محاسبه کن

$$\begin{aligned} \text{pay_g}(j) &= \circ/\delta * \exp(-r * T) * (\max((\text{prod}(S(:, j))) \wedge (1/n) - K, \circ) \\ &\quad + \max((\text{prod}(X(:, j))) \wedge (1/n) - K, \circ)), \\ \text{pay_a}(j) &= \circ/\delta * \exp(-r * T) * (\max(\text{mean}(S(:, j)) - K, \circ,) \\ &\quad + \max(\text{mean}(X(:, j)) - K, \circ)). \end{aligned}$$

۷- قیمت اختیارات آسیایی هندسی و آسیایی حساسی را به عنوان میانگین بازده تنزیل یافته این اختیارات به ترتیب توسط دستورات $\text{mean}(\text{pay_g})$ و $\text{mean}(\text{pay_a})$ چاپ کن.

جدول ۴-۲: انحراف معیار (STD) و قیمت (Value) به دست آمده از اختیارات خرید اروپایی، آسیایی حساسی و آسیایی هندسی توسط روش شبیه سازی مونت-کارلو (MC) و متغیرهای متضاد (AV).

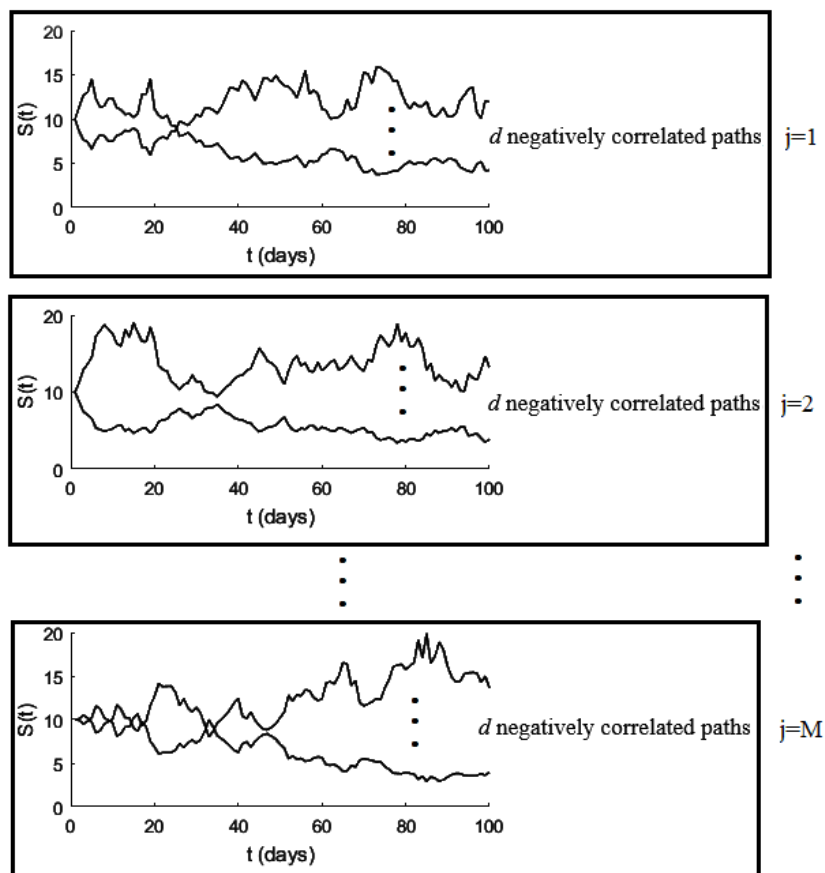
Option type	Value		STD	
	AV	MC	AV	MC
European	8.7493	8.7701	8.8021	15.0581
Geometric Asian	6.1166	6.2977	4.9714	9.5505
Arithmetic Asian	6.2015	6.3847	5.0185	9.6559

در جدول (۴-۲) قیمت اختیارات خرید اروپایی، آسیایی هندسی و آسیایی حساسی توسط روش مونت-کارلو و متغیرهای متضاد گزارش شده است. همان طور که از این جدول مشاهده می کنیم،

انحراف معیار (جذر واریانس) برآوردگر متغیرهای متضاد برای انواع اختیار نسبت به انحراف معیار برآوردگر مونت-کارلو کاهش یافته است. از طرفی می‌دانیم که خطای آماری روش شبیه‌سازی مونت-کارلو برابر $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ است، که در آن σ انحراف معیار برآوردگر و M تعداد شبیه‌سازی‌های روش مونت-کارلو را بیان می‌کند. بنابراین به جای افزایش تعداد شبیه‌سازی‌ها که هزینه محاسباتی بالاتری را به دنبال دارد، می‌توانیم با همان تعداد تکرار شبیه‌سازی، روش متغیرهای متضاد را که باعث کم شدن خطای شبیه‌سازی می‌شود، به کار بگیریم.

۴-۲-۲ قیمت‌گذاری اختیار با روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته

روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته یکی دیگر از روش‌های کاهش واریانس است که در آن برای هر تکرار از شبیه‌سازی مونت-کارلو، d متغیر تصادفی با ضریب همبستگی منفی را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که در فصل اول ثابت شد، با افزایش d (تعداد متغیرهای متضاد)، کاهش واریانس بیشتری خواهیم داشت. در این بخش با استفاده از روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته و تولید $M \times d$ بردار n تایی از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد که در هر تکرار از شبیه‌سازی مونت-کارلو، ضریب همبستگی d تای آن‌ها منفی است، به پیاده‌سازی $M \times d$ مسیر تصادفی از قیمت سهام می‌پردازیم. در واقع روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته حالت کلی‌تری از روش متغیرهای متضاد است. در روش متغیرهای متضاد در هر تکرار از شبیه‌سازی مونت-کارلو دو مسیر با ضریب همبستگی منفی تولید می‌کنیم اما در روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته این مقدار را به d واحد در هر تکرار از شبیه‌سازی مونت-کارلو افزایش می‌دهیم. استفاده از $M \times d$ مسیر تصادفی تولید شده از قیمت سهام که همبستگی d تای آن‌ها در هر تکرار از شبیه‌سازی مونت-کارلو منفی است، منجر به کاهش واریانس برآوردگر قیمت‌گذاری اختیار می‌شود. در شکل (۴-۳)، $M \times d$ مسیر از قیمت سهام که همبستگی d مسیر از آن‌ها در هر تکرار از شبیه‌سازی مونت-کارلو منفی است، نشان داده شده است. کلید اصلی این روش آن است که متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z_1 که برای تولید یک مسیر از قیمت سهام در لحظه t_i به کار گرفته می‌شود، برای $d - 1$ مسیر بعدی نیز متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد $Z_2, \dots, Z_d$ را در لحظه t_i مورد استفاده قرار دهیم، به‌طوری که ضریب همبستگی این متغیرهای تصادفی منفی است. در این صورت با توجه به اینکه متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد $Z_1, \dots, Z_d$ دو به دو دارای ضریب همبستگی منفی هستند، ضریب همبستگی d قیمت سهام برای یک تکرار مشخص از شبیه‌سازی مونت-کارلو در لحظه t_i منفی خواهد بود. در این بخش با استفاده از این ایده و توسط روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته، اختیارات اروپایی و آسیایی را قیمت‌گذاری کرده و الگوریتم‌های مربوطه را ارائه می‌دهیم.



شکل ۳-۴: $M \times d$ مسیر از قیمت سهام که در هر پنجره تمام d مسیرها همبستگی منفی دارند.

۱-۲-۲-۴ قیمت‌گذاری اختیار اروپایی با روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته

فرض کنید M تعداد شبیه‌سازی و $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه‌ی $[0, T]$ با طول گام $\delta > 0$ باشد. در این صورت برای هر $j = 1, \dots, M$ و $i = 1, \dots, n$ با استفاده از روش گسسته‌سازی اویلر تحت مدل حرکت براونی هندسی می‌توان $d \times M$ مسیر از

قیمت سهام به صورت زیر تولید کرد

$$\begin{cases} S_{11}(t_i) = S_{11}(t_{i-1}) + rS_{11}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{11}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(11)}, \\ S_{21}(t_i) = S_{21}(t_{i-1}) + rS_{21}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{21}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(21)}, \\ \vdots \\ S_{d1}(t_i) = S_{d1}(t_{i-1}) + rS_{d1}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{d1}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(d1)}, \\ S_{12}(t_i) = S_{12}(t_{i-1}) + rS_{12}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{12}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(12)}, \\ S_{22}(t_i) = S_{22}(t_{i-1}) + rS_{22}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{22}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(22)}, \\ \vdots \\ S_{d2}(t_i) = S_{d2}(t_{i-1}) + rS_{d2}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{d2}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(d2)}, \\ \vdots \\ S_{1M}(t_i) = S_{1M}(t_{i-1}) + rS_{1M}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{1M}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(1M)}, \\ S_{2M}(t_i) = S_{2M}(t_{i-1}) + rS_{2M}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{2M}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(2M)}, \\ \vdots \\ S_{dM}(t_i) = S_{dM}(t_{i-1}) + rS_{dM}(t_{i-1})\delta + \sigma S_{dM}(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_i^{(dM)}, \end{cases} \quad (12-4)$$

که در آن برای هر $h = 1, \dots, d$ و $j = 1, \dots, M$ ، $Z_1^{(hj)}, \dots, Z_n^{(hj)}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد است که در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} Cov[Z_i^{(hj)}, Z_\ell^{(hj)}] &= 0, \quad i \neq \ell \in \{1, \dots, n\}, h \in \{1, \dots, d\}, j \in \{1, \dots, M\} \\ Cov[Z_i^{(hj)}, Z_i^{(\ell j)}] &< 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}, h \neq \ell \in \{1, \dots, d\}, j \in \{1, \dots, M\} \\ Cov[Z_i^{(hj)}, Z_i^{(\ell k)}] &= 0, \quad i \in \{1, \dots, n\}, h, \ell \in \{1, \dots, d\}, k \neq j \in \{1, \dots, M\} \end{aligned}$$

برای $h = 1, \dots, d$ و $j = 1, \dots, M$ قرار می‌دهیم $S_{hj} = (S_{hj}(t_0), \dots, S_{hj}(t_n))$ در این صورت برای هر $h \neq h' \in \{1, \dots, d\}$ همبستگی مسیرهای تولید شده توسط S_{hj} و $S_{h'j}$ منفی است. توجه کنید که برای هر $j \neq j' \in \{1, \dots, M\}$ مسیرهای S_{hj} و $S_{hj'}$ مستقل از هم تولید می‌شوند.

بنابراین با توجه به روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته که در فصل اول آن را مطالعه کردیم، برآورد قیمت اختیار خرید اروپایی در لحظه $t = 0$ به صورت زیر خواهد بود

$$C^{dAV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{dM} \sum_{j=1}^M \sum_{h=1}^d [\max(S_{hj}(t_n) - K, 0)]. \quad (13-4)$$

بنا به قضیه (۲-۱) فصل اول، برآوردگر $C^{dAV}(r, T, K)$ که بر اساس d متغیر متضاد حاصل شده است، یک برآوردگر ناریب و واریانس آن همواره کوچکتر از واریانس به دست آمده توسط برآوردگری است که از $d-1$ مسیر متضاد حاصل می شود. به عبارت دیگر همواره داریم $V[C^{dAV}(r, T, K)] < V[C^{(d-1)AV}(r, T, K)]$. شایان ذکر است که برای $d = 1$ روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته به روش مونت-کارلو استاندارد و برای $d = 2$ به روش متغیرهای متضاد تبدیل می شود.

الگوریتم ۵.۴: قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی توسط روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته

- ۱- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۲ تا ۸ را انجام بده.
- ۲- قرار بده $S(1, :) = s$ و $S = \text{zeros}(n, d)$, $dt = t_{i+1} - t_i = \frac{T}{n}$
- ۳- یک ماتریس $(n-1) \times d$ از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد به نام Z را چنان تولید کن که برای هر $i, i' = 1, \dots, n-1$ ($i \neq i'$) و $h, h' = 1, \dots, d$ ($h \neq h'$) داشته باشیم، $Cov[Z(i', h), Z(i, h)] = 0$ و $Cov[Z(i, h), Z(i, h')] < 0$.
- ۴- برای $h = 1, \dots, d$ دستورات ۵ تا ۷ را انجام بده.
- ۵- برای $i = 2, \dots, n$ دستور ۶ را انجام بده.
- ۶- قیمت سهام متناظر با مسیر h ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن

$$S(i, h) = S(i-1, h) + S(i-1, h) * r * dt + S(i-1, h) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z(i, h).$$

- ۷- بازده تنزیل یافته اختیار خرید اروپایی متناظر با مسیر k ام از قیمت سهام را توسط دستور زیر محاسبه کن

$$\text{pay_d}(h) = \exp(-r * T) * \max(S(n, h) - K, 0).$$

- ۸- قرار بده $\text{pay}(j) = \text{mean}(\text{pay_d})$
- ۹- قیمت اختیار خرید اروپایی را توسط دستور $\text{mean}(\text{pay})$ چاپ کن.

۲-۲-۲-۴ قیمت‌گذاری اختیار آسیایی با روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته

در این بخش می‌خواهیم با استفاده از روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته و تولید $M \times d$ مسیر تصادفی از قیمت سهام بر اساس دستگاه (۴-۱۲)، واریانس برآوردگر مربوط به قیمت اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی را کاهش دهیم. با توجه به این حقیقت که برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ و $j \in \{1, \dots, M\}$ متغیر تصادفی $S_{1j}(t_i), \dots, S_{dj}(t_i)$ در دستگاه (۴-۱۲) همبستگی منفی دارند، بر اساس $M \times d$ شبیه‌سازی مونت-کارلو می‌توانیم این هدف را به صورت زیر به سرانجام برسانیم.

فرض کنید M تعداد شبیه‌سازی مونت-کارلو و $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta > 0$ باشد. می‌دانیم قیمت اختیارات آسیایی حسابی و آسیایی هندسی در لحظه $t = 0$ و با زمان سررسید T ، می‌توانند به ترتیب از چپ به راست توسط امید ریاضی‌های زیر محاسبه شوند

$$e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0 \right) \right], \quad e^{-rT} \mathbb{E} \left[\max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right].$$

بنابراین با استفاده از روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته، برآورد قیمت این اختیارات را در لحظه $t = 0$ به ترتیب به صورت زیر می‌توان به دست آورد

$$C^{A-dAV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{dM} \sum_{j=1}^M \sum_{h=1}^d \left[\max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{hj}(t_i) - K, 0 \right\} \right], \quad (۴-۱۴)$$

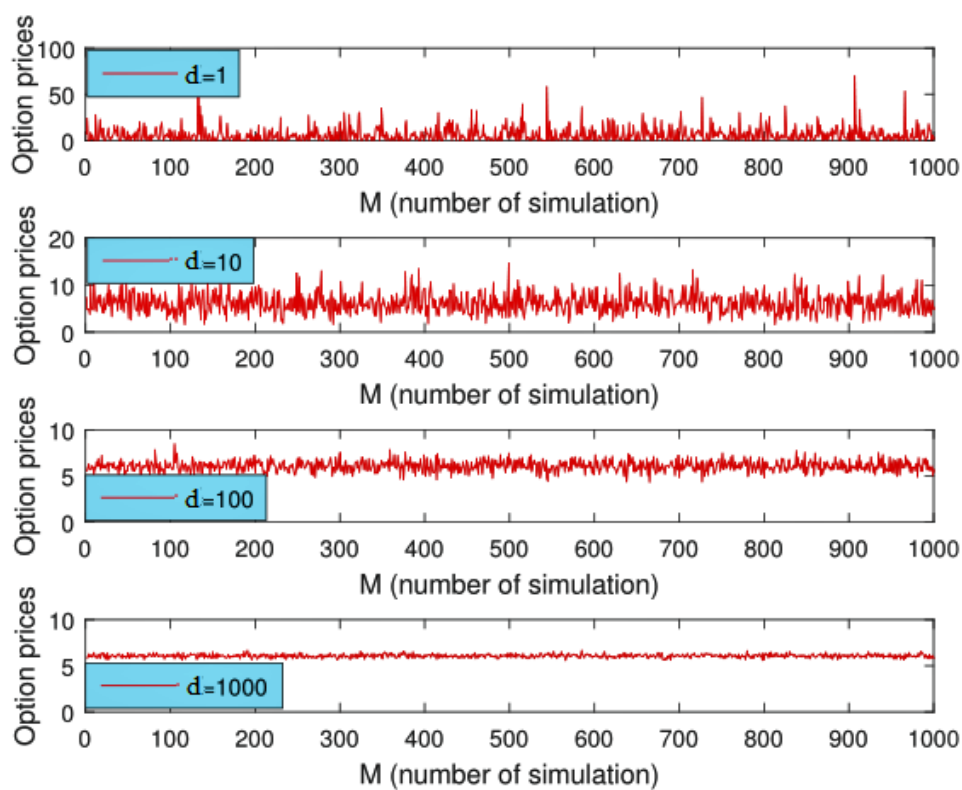
$$C^{G-dAV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{dM} \sum_{j=1}^M \sum_{h=1}^d \left[\max \left\{ \left(\prod_{i=1}^n S_{hj}(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right\} \right]. \quad (۴-۱۵)$$

توجه کنید که بنا به قضیه (۱-۲) فصل اول، برآوردگرهای (۴-۱۴) و (۴-۱۵) ناریب و واریانس آن‌ها همواره کوچکتر از واریانس به دست آمده توسط برآوردیابی است که از $d - 1$ مسیر متضاد حاصل می‌شود، به عبارتی دیگر داریم

$$V[C^{A-dAV}(r, T, K)] < V[C^{A-(d-1)AV}(r, T, K)], \\ V[C^{G-dAV}(r, T, K)] < V[C^{G-(d-1)AV}(r, T, K)].$$

جدول ۴-۳: انحراف معیار (STD) و قیمت (Value) به دست آمده از اختیارات خرید اروپایی، آسیایی حسابی و آسیایی هندسی توسط روش شبیه سازی مونت-کارلو (MC)، متغیرهای متضاد (AV) و متغیرهای متضاد تعمیم یافته (dAV) با $d = ۴۸$.

Option type	Value			STD		
	dAV	AV	MC	dAV	AV	MC
European	8.6414	8.7493	8.7701	1.7997	8.8021	15.0581
Geometric Asian	6.1321	6.1166	6.2977	1.0894	4.9714	9.5505
Arithmetic Asian	6.2180	6.2015	6.3847	1.1007	5.0185	9.6559



شکل ۴-۴: ارزش اختیار آسیایی حسابی توسط روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته با مقادیر مختلف d .

در شکل (۴-۴) ارزش اختیار آسیایی حسابی توسط روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته با مقادیر

مختلف d گزارش شده است. همان‌طور که از این شکل مشخص است با افزایش d ، تلاطم برآوردگر متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته کم می‌شود. به عبارتی دیگر زمانی که d افزایش می‌یابد، واریانس برآوردگر متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته بر اساس تعداد شبیه‌سازی‌ها کاهش می‌یابد و این نشان می‌دهد با افزایش d ، پراکندگی قیمت اختیار آسیایی حسابی حول خط میانگین (قیمت دقیق اختیار آسیایی حسابی) کم می‌شود. همان‌طور که از این شکل و جدول (۳-۴) مشخص است انحراف معیار برآوردگر متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته با افزایش تعداد مسیرهای متضاد از قیمت سهام (d)، به طور چشمگیری برای انواع اختیارات نسبت به انحراف معیار برآوردگرهای مونت-کارلو و متغیرهای متضاد استاندارد کاهش می‌یابد.

الگوریتم ۶.۴: قیمت‌گذاری اختیار آسیایی با استفاده از روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته

- ۱- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۲ تا ۷ را انجام بده.
- ۲- قرار بده $dt = \frac{T}{n} - t_i = t_{i+1} - t_i$ و $S(1, :) = s$ و $S = \text{zeros}(n, d)$.
- ۳- یک ماتریس $(n-1) \times d$ از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد به نام Z را چنان تولید کن که برای هر $i, i' = 1, \dots, n-1$ ($i \neq i'$) و $h, h' = 1, \dots, d$ ($h \neq h'$) داشته باشیم،
 $Cov[Z(i', h), Z(i, h)] = 0$ و $Cov[Z(i, h), Z(i, h')] < 0$.
- ۴- برای $h = 1, \dots, d$ دستورات ۵ تا ۷ را انجام بده.
- ۵- قیمت سهام متناظر با مسیر h ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i برای $i = 2, \dots, n$ به صورت زیر شبیه‌سازی کن

$$S(i, h) = S(i-1, h) + S(i-1, h) * r * dt + S(i-1, h) * \sigma * \text{sqrt}(dt) * Z(i, h).$$

- ۶- بازده تنزیل‌یافته اختیارات آسیایی هندسی و آسیایی حسابی متناظر با مسیر k ام از قیمت سهام را به ترتیب توسط دستورات زیر محاسبه کن

$$\text{pay_g_d}(h) = \exp(-r * T) * (\max((\text{prod}(S(:, h))) \wedge (1/n) - K, 0)),$$

$$\text{pay_a_d}(h) = \exp(-r * T) * (\max(\text{mean}(S(:, h)) - K, 0)).$$

- ۷- قرار بده $\text{pay_a}(j) = \text{mean}(\text{pay_a_d})$ و $\text{pay_g}(j) = \text{mean}(\text{pay_g_d})$.
- ۸- قیمت اختیارات آسیایی هندسی و حسابی را به ترتیب توسط دستورات $\text{mean}(\text{pay_g})$ و $\text{mean}(\text{pay_a})$ چاپ کن.

۳-۲-۴ قیمت گذاری اختیار با روش متغیر کنترلی

روش متغیر کنترلی یکی از روش های کاهش واریانس است که برای برآورد امید ریاضی یک مسئله خاص، از یک متغیر تصادفی تحت عنوان متغیر کنترلی با مقدار امید ریاضی معلوم بهره می گیرد. اگر بتوانیم چنین متغیر تصادفی با مقدار مورد انتظار مشخص بیابیم، که با برآورد مسئله مورد نظر همبستگی قابل قبولی دارد، آنگاه به وسیله آن می توانیم واریانس برآوردگر خود را کاهش دهیم. در این بخش با استفاده از این روش به قیمت گذاری اختیارات اروپایی و آسیایی پرداخته و الگوریتم مربوط به هر یک را بیان می کنیم.

۱-۳-۲-۴ قیمت گذاری اختیار اروپایی با روش متغیر کنترلی

می خواهیم مقدار $e^{-rT} \mathbb{E}[\max(S(T) - K, 0)]$ که مربوط به قیمت اختیار خرید اروپایی است را با روش متغیر کنترلی برآورد کنیم. برای انجام این کار بر اساس بخش ۳-۲-۱ در فصل اول یک برآوردگر به صورت $X + c(Y - \mu_Y)$ در نظر می گیریم، که در آن X بازده تنزیل یافته اختیار خرید اروپایی، یعنی $X = e^{-rT} \max(S(T) - K, 0)$ است. توجه کنید که مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی X به عنوان قیمت اختیار خرید اروپایی در نظر گرفته می شود. همچنین Y و μ_Y به ترتیب متغیر کنترلی و مقدار مورد انتظار آن است. در این بخش Y را به عنوان بازده تنزیل یافته اختیار آسیایی هندسی در نظر می گیریم که جواب صریح آن به عنوان ارزش اختیار آسیایی هندسی توسط قضیه (۱-۴) به دست می آید. پارامتر c نیز مقداری است که با توجه به رابطه (۱-۱۶) در فصل اول، به صورت $Cov[X, Y]/V[Y]$ محاسبه می شود. در ادامه تحت مدل حرکت براونی هندسی به قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش متغیر کنترلی می پردازیم.

فرض کنید M تعداد شبیه سازی و $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه $[0, T]$ با طول گام $\delta > 0$ باشد. در این صورت برای هر $j = 1, \dots, M$ و $i = 1, \dots, n$ با استفاده از روش گسسته سازی اویلر تحت مدل حرکت براونی هندسی می توان نوشت

$$S_j(t_i) = S_j(t_{i-1}) + rS_j(t_{i-1})\delta + \sigma S_j(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{ij}, \quad \sigma > 0, \quad (16-4)$$

که در آن $Z_{1j}, \dots, Z_{nj}$ برای هر $j = 1, \dots, M$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد است که به صورت مستقل از هم توزیع شده اند. در این صورت با توجه به اینکه $t_n = T$ ، برآورد قیمت اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش متغیر کنترلی به صورت زیر به دست می آید

$$C^{CV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M [\max(S_j(t_n) - K, 0) - c(\Theta_j - \mu^{geo})]. \quad (17-4)$$

در رابطه فوق، Θ_j یک متغیر کنترلی است، که در اینجا آن را بازده اختیار آسیایی هندسی در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم

$$\Theta_j = \max \left[\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right].$$

μ^{geo} مقدار مورد انتظار بازده اختیار آسیایی هندسی است که فرم بسته آن با استفاده از قضیه (۴-۱) محاسبه می‌شود. همچنین ثابت C به صورت زیر به دست می‌آید

$$C = \frac{Cov \left[\max \left(S(t_n) - K, 0 \right), \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right]}{V \left[\max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right]}.$$

از آنجایی که جواب دقیق صورت و مخرج کسر بالا را نمی‌توان به دست آورد، برآورد آن‌ها را با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت-کارلو به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & Cov \left[\max \left(S(t_n) - K, 0 \right), \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right] \\ & \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\max \left(S_j(t_n) - K, 0 \right) \times \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right] \\ & - \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \max \left(S_j(t_n) - K, 0 \right) \right] \times \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right], \end{aligned} \quad (۱۸-۴)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} & V \left[\max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right] \\ & \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(\max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right)^2 \\ & - \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, 0 \right) \right)^2. \end{aligned} \quad (۱۹-۴)$$

بنا به قضیه (۳-۱) فصل اول، برآوردگر $C^{CV}(r, T, K)$ یک برآوردگر ناریب و واریانس آن همواره کوچکتر از واریانس به دست آمده توسط برآوردگر مونت-کارلو برای قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی در رابطه (۵-۴) است، به عبارتی دیگر همواره داریم $V[C^{CV}(r, T, K)] < V[C^{MC}(r, T, K)]$.

قضیه ۴-۱. اگر $S(t)$ قیمت سهام در لحظه $0 \leq t \leq T$ با زمان سررسید T نرخ بهره r و تلاطم σ باشد، در این صورت ارزش اختیار آسیایی هندسی در لحظه $t = 0$ تحت مدل حرکت براونی هندسی (۴-۱۶) به صورت زیر است

$$\mu^{geo} = S(0)e^{-rT+r^*T^*}\mathcal{N}(d_+) - e^{-rT}K\mathcal{N}(d_-), \quad (20-4)$$

که در آن K قیمت توافقی، $T^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$ و

$$d_- = \frac{1}{\sigma^* \sqrt{T^*}} \left[\log \frac{S(0)}{K} + (r^* - \frac{1}{2} \sigma^{*2}) T^* \right], \quad d_+ = d_- + \sigma^* \sqrt{T^*},$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{n^2 T^*} \sum_{i=1}^n (2i-1) t_{n+1-i}, \quad r^* = r - \frac{1}{2} (\sigma^2 - \sigma^{*2}).$$

همچنین $\mathcal{N}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}y^2} dy$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد است.

اثبات. با توجه به اینکه قیمت سهام در لحظه t ، تحت مدل حرکت براونی هندسی به صورت زیر بیان می شود

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right\},$$

داریم

$$\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} = S(0) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \right) + \frac{\sigma}{n} \sum_{i=1}^n W(t_i) \right\}.$$

از طرفی با استفاده از استقرا به راحتی می توان نشان داد

$$\sum_{i=1}^n W(t_i) \sim \mathcal{N} \left(0, \sum_{i=1}^n (2i-1) t_{n+1-i} \right).$$

بنابراین

$$\left(\prod_{i=1}^n S(t_i)\right)^{1/n} = S(\circ) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T^* + \sigma^* W(T^*) \right\}, \quad (21-4)$$

که در آن

$$T^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{n} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (2i-1)t_{n+1-i}}{T^*}}.$$

برای استفاده از فرمول بلک-شولز، عبارت (۲۱-۴) را به صورت مدل حرکت براونی هندسی زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \left(\prod_{i=1}^n S(t_i)\right)^{1/n} &= S(\circ) \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^{*2} - \frac{1}{2}\sigma^{*2}\right)T^* + \sigma^* W(T^*) \right\} \\ &= S(\circ) \exp \left\{ \left(r^* - \frac{1}{2}\sigma^{*2}\right)T^* + \sigma^* W(T^*) \right\}, \end{aligned}$$

$$r^* = r - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^{*2}$$

که در آن r^* به جای r ، σ^* به جای σ و T^* به جای T در قضیه بلک-شولز (۵-۲) نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

الگوریتم ۷.۴: قیمت‌گذاری اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش متغیر کنترلی

- ۱- قرار بده $dt = t_i - t_{i-1} = \frac{T}{n}$ ، $dt = [dt : dt : T]$ ، $ts = t(n : -1 : 1)$ و $I = [1 : 1 : n]$ و $S(1, :) = s$ ، $S = \text{zeros}(n, M)$
- ۲- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۳ تا ۶ را انجام بده.
- ۳- برای $i = 2, \dots, n$ دستورات ۴ تا ۵ را انجام بده.
- ۴- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = \text{randn}$ تولید کن.
- ۵- قیمت سهام متناظر با مسیر j ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i به صورت زیر شبیه‌سازی کن

$$S(i, j) = S(i-1, j) + r * S(i-1, j) * dt + \sigma * S(i-1, j) * \text{sqrt}(dt) * Z.$$

۶- بازده تنزیل یافته اختیارات خرید اروپایی و آسیایی هندسی را به ترتیب به صورت زیر محاسبه کن

$$\begin{aligned} \text{pay}(j) &= \exp(-r * T) * \max(S(n, j) - K, 0), \\ \text{pay}_g(j) &= \exp(-r * T) * \max((\text{prod}(S(:, j))) \wedge (1/n) - K, 0). \end{aligned}$$

۷- قرار بده

$$\begin{aligned} c &= \frac{\text{mean}(\text{pay} * \text{pay}_g) - \text{mean}(\text{pay}) * \text{mean}(\text{pay}_g)}{\text{mean}(\text{pay}_g \wedge 2) - (\text{mean}(\text{pay}_g))^2}, \\ Ts &= \text{mean}(t), \\ \gamma &= \frac{\sigma}{n \wedge 2 * Ts} * \text{sum}((2 * I - 1) * ts), \quad R = r - \frac{1}{2}(\sigma \wedge 2 - \gamma \wedge 2), \\ d1 &= \frac{1}{\gamma \sqrt{Ts}} * \left(\log \frac{s}{K} + (R - \frac{1}{2} \gamma \wedge 2) * Ts \right), \\ d2 &= d1 + \gamma * \sqrt{Ts}. \end{aligned}$$

۸- قیمت دقیق اختیار آسیایی هندسی را به صورت زیر محاسبه کن

$$V = \exp(-r * T) * (\exp(R * Ts) * s * \text{normcdf}(d2) - K * \text{normcdf}(d1)).$$

۹- قیمت اختیار خرید اروپایی را توسط دستور $\text{mean}(\text{pay} - c * (\text{pay}_g - V))$ چاپ کن.

۲-۳-۲-۴ قیمت گذاری اختیار آسیایی با روش متغیر کنترلی

در این بخش با استفاده از روش متغیر کنترلی، مقدار $e^{-rT} \mathbb{E}[\max(\sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0)]$ که مربوط به قیمت اختیار آسیایی حساسی است را برآورد می کنیم. برای انجام این کار یک برآوردگر به صورت $X + c(Y - \mu_Y)$ در نظر بگیرید، که در آن X بازده تنزیل یافته اختیار آسیایی حساسی است. به عبارت دیگر $X = e^{-rT} \max(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0)$ و مقدار امید ریاضی آن به عنوان قیمت اختیار آسیایی حساسی در نظر گرفته می شود. برای قیمت گذاری اختیار از نوع آسیایی حساسی، Y و μ^{geo} را به ترتیب به عنوان بازده تنزیل یافته اختیار آسیایی هندسی و مقدار مورد انتظار آن در نظر بگیرید. جواب دقیق μ^{geo} به عنوان ارزش اختیار آسیایی هندسی توسط قضیه (۱-۴) به دست می آید. c ثابتی است که مقدار آن با توجه به رابطه (۱۶-۱) در فصل اول، به صورت $Cov[X, Y]/V[Y]$ محاسبه می شود. حال با توجه به مطالب بیان شده، در ادامه تحت

مدل حرکت براونی هندسی به قیمت‌گذاری اختیار آسیایی حسابی با استفاده از روش متغیر کنترلی می‌پردازیم.

فرض کنید M تعداد شبیه‌سازی و $\{t_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T\}$ یک افراز از بازه‌ی $[0, T]$ با طول گام $\delta > 0$ باشد. در این صورت برای هر $j = 1, \dots, M$ و $i = 1, \dots, n$ با استفاده از روش گسسته‌سازی اوپلر تحت مدل حرکت براونی هندسی داریم

$$S_j(t_i) = S_j(t_{i-1}) + rS_j(t_{i-1})\delta + \sigma S_j(t_{i-1})\sqrt{\delta}Z_{ij}, \quad \sigma > 0,$$

که در آن برای هر $j = 1, \dots, M$ ، $Z_{1j}, \dots, Z_{nj}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد است که به صورت مستقل از هم توزیع شده‌اند. در این صورت با استفاده از روش متغیر کنترلی، قیمت اختیار آسیایی حسابی را به صورت زیر می‌توان به دست آورد

$$C^{A-CV}(r, T, K) = \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M [\max(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_j(t_i) - K, 0) - c(\Theta_j - \mu^{geo})],$$

که در آن Θ_j متغیر کنترلی است و در اینجا آن را بازده اختیار آسیایی هندسی در نظر می‌گیریم. μ^{geo} نیز مقدار مورد انتظار بازده تنزیل‌یافته اختیار آسیایی هندسی است که فرم بسته آن توسط قضیه (۴-۱) به دست می‌آید. همچنین ثابت c به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$c = \frac{Cov\left[\max\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, 0\right), \max\left((\prod_{i=1}^n S(t_i))^{1/n} - K, 0\right)\right]}{V\left[\max\left((\prod_{i=1}^n S(t_i))^{1/n} - K, 0\right)\right]}.$$

از آنجایی که کسر بالا را به طور صریح نمی‌توان محاسبه نمود، برآورد صورت و مخرج آن را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$V\left[\max\left(S(t_n) - K, 0\right)\right] \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(\max\left(S_j(t_n) - K, 0\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \max\left(S_j(t_n) - K, 0\right)\right)^2,$$

$$\begin{aligned}
& Cov \left[\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S(t_i) - K, \circ \right), \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S(t_i) \right)^{1/n} - K, \circ \right) \right] \\
& \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left[\max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_j(t_i) - K, \circ \right) \times \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, \circ \right) \right] \\
& - \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \max \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_j(t_i) - K, \circ \right) \right] \\
& \times \left[\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \max \left(\left(\prod_{i=1}^n S_j(t_i) \right)^{1/n} - K, \circ \right) \right].
\end{aligned}$$

توجه کنید که بنا به قضیه (۳-۱) فصل اول، برآوردگر $C^{A-CV}(r, T, K)$ ناریب و واریانس آن همواره کوچکتر از واریانس به دست آمده توسط برآوردگر مونت-کارلو برای قیمت گذاری اختیار آسیایی حسابی در رابطه (۷-۴) است. به عبارتی دیگر داریم

$$V[C^{A-CV}(r, T, K)] < V[C^{A-MC}(r, T, K)].$$

الگوریتم ۸.۴: قیمت گذاری اختیار آسیایی با استفاده از روش متغیر کنترلی

- ۱- قرار بده $\frac{T}{n}$ ، $dt = t_i - t_{i-1} = \frac{T}{n}$ ، $S(1, :) = s$ ، $S = \text{zeros}(n, M)$ ،
- ۲- برای $j = 1, \dots, M$ دستورات ۳ تا ۶ را انجام بده.
- ۳- برای $i = 2, \dots, n$ دستورات ۴ تا ۵ را انجام بده.
- ۴- متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z را توسط دستور $Z = \text{randn}$ تولید کن.
- ۵- قیمت سهام متناظر با مسیر j ام را تحت مدل حرکت براونی هندسی در لحظه t_i به صورت زیر شبیه سازی کن

$$S(i, j) = S(i-1, j) + r * S(i-1, j) * dt + \sigma * S(i-1, j) * \text{sqrt}(dt) * Z.$$

- ۶- بازده تنزیل یافته اختیار آسیایی حسابی را به صورت زیر محاسبه کن

$$\text{pay}_a(j) = \exp(-r * T) * \max(\text{mean}(S(:, j)) - K, \circ).$$

۷- بر اساس گام ۸ از الگوریتم ۷.۴، V را به عنوان قیمت دقیق اختیار آسیایی هندسی محاسبه کن.
۸ - قرار بده

$$c = \frac{\text{mean}(\text{pay}_a * \text{pay}_g) - \text{mean}(\text{pay}_a) * \text{mean}(\text{pay}_g)}{\text{mean}(\text{pay}_g \wedge 2) - (\text{mean}(\text{pay}_g))^2}.$$

۹- قیمت اختیار خرید اروپایی را توسط دستور $\text{mean}(\text{pay}_a - c * (\text{pay}_g - V))$ چاپ کن.

جدول ۴-۴: انحراف معیار (STD) و قیمت (Value) به دست آمده از اختیارات خرید اروپایی و آسیایی حسابی توسط روش شبیه‌سازی مونت-کارلو (MC)، متغیرهای متضاد (AV)، متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته (dAV) با $d = 5024$ و متغیر کنترلی (CV).

Option type	Value				STD			
	CV	dAV	AV	MC	CV	dAV	AV	MC
European	8.49	8.62	8.74	8.77	8.25	0.16	8.80	15.05
Arithmetic Asian	6.05	6.20	6.20	6.38	0.15	0.10	5.01	9.65

۳-۴ تمرینات فصل چهارم

۱- فرض کنید $\{S(t)\}$ فرایند قیمت سهام و $\{V(t)\}$ فرایند تلاطم باشد. قیمت سهام را تحت مدل هستون به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + S(t)\sqrt{V(t)}dW_1(t) \\ dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \sigma\sqrt{V(t)}dW_2(t) \end{cases}$$

که در آن $W_1(t)$ و $W_2(t)$ دو حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. بعلاوه r نرخ بهره و پارامترهای ثابت مثبت κ ، θ و σ به ترتیب بیانگر سرعت بازگشت به میانگین، سطح بازگشت به میانگین و تلاطم برای تلاطم هستند.

الف) یک الگوریتم برای قیمت‌گذاری اختیار آسیایی حسابی بر اساس روش متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته بنویسید.

ب) برای قیمت‌گذاری اختیار آسیایی حسابی تحت مدل هستون ابتدا یک متغیر کنترلی مناسب ارائه

داده و سپس الگوریتم مربوط به قیمت گذاری این اختیار را بر اساس روش متغیر کنترلی بنویسید.

۲- فرض کنید $\{S(t)\}$ فرایند قیمت سهام، $\{V_1(t)\}$ فرایند تلاطم اول و $\{V_2(t)\}$ فرایند تلاطم دوم باشد. قیمت سهام را تحت مدل هستون مضاعف به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} dS(t) = rS(t)dt + S(t)\sqrt{V_1(t)}dW_1(t) + S(t)\sqrt{V_2(t)}dW_2(t) \\ dV_1(t) = \kappa_1(\theta_1 - V_1(t))dt + \sigma_1\sqrt{V_1(t)}dB_1(t) \\ dV_2(t) = \kappa_2(\theta_2 - V_2(t))dt + \sigma_2\sqrt{V_2(t)}dB_2(t) \end{cases}$$

که در آن $W_1(t)$ ، $W_2(t)$ ، $B_1(t)$ و $B_2(t)$ چهار حرکت براونی هستند، به طوری که

$$\begin{aligned} dW_1(t)dB_1(t) &= \rho_1 dt, \quad \rho_1 \in (-1, 1), \\ dW_2(t)dB_2(t) &= \rho_2 dt, \quad \rho_2 \in (-1, 1), \\ dW_1(t)dW_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

همچنین r نرخ بهره و پارامترهای ثابت مثبت κ_1 (κ_2)، θ_1 (θ_2) و σ_1 (σ_2) به ترتیب بیانگر سرعت بازگشت به میانگین، سطح بازگشت به میانگین و تلاطم برای تلاطم متناظر با فرایند تلاطم اول (دوم) هستند.

الف) یک الگوریتم برای قیمت گذاری اختیار فروش اروپایی بر اساس روش شبیه سازی مونت-کارلو استاندارد بنویسید.

ب) یک الگوریتم قیمت گذاری برای اختیار خرید اروپایی بر اساس روش متغیرهای متضاد بنویسید.
ج) ابتدا یک متغیر کنترلی مناسب تعریف کرده و سپس یک الگوریتم برای قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی با استفاده از روش متغیر کنترلی بنویسید.

۳- قیمت سهام را تحت مدل حرکت براونی هندسی رژیم-سوئیچینگ به صورت زیر در نظر بگیرید

$$dS(t) = r(Z(t))S(t)dt + \sigma(Z(t))S(t)dW(t).$$

که در آن پارامترهای r و σ وابسته به زنجیر مارکف پنهان دو حالت $Z(t)$ هستند. برای قیمت گذاری اختیار آسیایی حسابی، یک الگوریتم بر اساس روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته ارائه دهید.

۴- (اختیار اسپارک اسپرد) یک کلاس مهم از اوراق مشتقه، اختیارهای به اصطلاح اسپارک اسپرد

است. این گونه مشتقات روی قراردادهای آتی الکتریسیته و گاز صادر می‌شود. یک نمونه بارز می‌تواند یک اختیار فروش اروپایی روی قیمت‌های آتی دو انرژی باشد، که در آن معاملات قراردادهای آتی دارای دوره تحویل یک ماهه یا سه ماهه هستند. چنین اختیاراتی برای مدیریت ریسک نیروگاه‌های دارای سوخت گاز مورد استفاده قرار می‌گیرند و این امکان را به صاحب کارخانه می‌دهد تا حرکات نامطلوب در قیمت الکتریسیته و گاز را پوشش ریسک دهند. این اختیارات محبوبیت بالایی دارند و تا حد قابل توجهی در بازار فرابورس معامله می‌شوند. همچنین اختیار اسپارک اسپرد می‌تواند برای ارزیابی اختیارهای واقعی نیروگاه‌های دارای سوخت گاز استفاده شود. دینامیک قرارداد آتی الکتریسیته و گاز را با دوره تحویل $[T_1, T_2]$ به ترتیب به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} dF^{EL}(t, T_1, T_2) &= \sigma^{EL} F^{EL}(t, T_1, T_2) dW(t), \\ dF^{GA}(t, T_1, T_2) &= \sigma^{GA} F^{GA}(t, T_1, T_2) dB(t), \end{aligned}$$

که در آن $W(t)$ و $B(t)$ دو حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. همچنین پارامترهای مثبت σ^{EL} و σ^{GA} به ترتیب تلاطم قیمت نقدی در بازارهای الکتریسیته و گاز را بیان می‌کنند. دو دینامیک بالا برای قراردادهای آتی الکتریسیته و گاز از ساده‌ترین مدل‌های تصادفی برای قراردادهای آتی انرژی هستند که به فرمول بلک-۷۶ معروف‌اند. ارزش تنزیل‌یافته اختیار اسپارک اسپرد در زمان $t = 0$ به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$e^{-rT} \mathbb{E}[\max(F^{EL}(T, T_1, T_2) - h_R F^{GA}(T, T_1, T_2) - K, 0)],$$

که در آن T زمان سررسید است به‌طوری که $T_1 \leq T < T_2$. همچنین h_R پارامتر مربوط به گرما، r نرخ بهره و K قیمت توافقی است. بر اساس روش متغیر کنترلی و با در نظر گرفتن متغیر کنترلی به عنوان اختیار آسیایی هندسی، الگوریتم مربوط به قیمت‌گذاری اختیار اسپارک اسپرد را ارائه دهید.

۵- معادله دیفرانسیل تصادفی مرتون را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\frac{dS(t)}{S(t^-)} = rdt + \sigma dW(t) + (Y_t - 1)dN(t),$$

که در آن $N = \{N(t)\}_{t \geq 0}$ فرایند پواسن، $W = \{W(t)\}_{t \geq 0}$ حرکت براونی و $Y(t)$ اندازه پرش در لحظه t است که از توزیع لگ-نرمال پیروی می‌کند. با فرض اینکه $N(t)$ ، $W(t)$ و $Y(t)$

مستقل هستند، یک الگوریتم برای قیمت گذاری اختیارات خرید و فروش اروپایی بر اساس روش مونت-کارلو استاندارد تحت مدل دیفرانسیل تصادفی مرتون ارائه دهید.

۶- فرض کنید $\{S(t)\}$ فرایند سهام، $\{V(t)\}$ فرایند تلاطم و $\{R(t)\}$ فرایند نرخ بهره در لحظه t باشد. در این صورت $S(t)$ تحت مدل هستون-CIR-پرش به صورت زیر بیان می شود

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{S(t)} = (R(t) - \lambda m)dt + \sqrt{V(t)}dW_1(t) + (e^J - 1)dN(t) \\ dV(t) = \kappa_1(\theta_1 - V(t))dt + \sigma_1\sqrt{V(t)}dW_2(t) \\ dR(t) = \kappa_2(\theta_2 - R(t))dt + \sigma_2\sqrt{R(t)}dW_3(t) \end{cases}$$

که در آن $W_1 := \{W_1(t)\}_{t \geq 0}$ ، $W_2 := \{W_2(t)\}_{t \geq 0}$ و $W_3 := \{W_3(t)\}_{t \geq 0}$ سه حرکت براونی هستند به طوری که

$$\begin{aligned} dW_1(t)dW_2(t) &= \rho_1 dt, \quad \rho_1 \in (-1, 1), \\ dW_1(t)dW_3(t) &= \rho_2 dt, \quad \rho_2 \in (-1, 1), \\ dW_2(t)dW_3(t) &= 0. \end{aligned}$$

همچنین $N := \{N(t)\}_{t \geq 0}$ فرایند پواسن با شدت λ و J اندازه پرش است. پارامتر m نیز میانگین فراوانی پرش است، یعنی $m = \mathbb{E}[e^J - 1]$. با فرض اینکه اندازه پرش دارای توزیع نمایی و فرایندهای W_1 ، W_2 ، W_3 و N مستقل هستند، یک الگوریتم بر اساس روش شبیه سازی مونت-کارلو برای قیمت گذاری اختیار آسیایی حسابی تحت مدل هستون-CIR-پرش ارائه دهید.

۷- فرض کنید $S(t)$ فرایند قیمت سهام و $V(t)$ فرایند تلاطم باشد. قیمت سهام را تحت مدل رژیم-سوئیچینگ هستون به صورت زیر در نظر بگیرید

$$\begin{cases} dS(t) = r(Z(t))S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW_1(t), \\ dV(t) = \kappa(Z(t))(\theta(Z(t)) - V(t))dt + \sigma(Z(t))\sqrt{V(t)}dW_2(t), \end{cases}$$

که در آن $W_1(t)$ و $W_2(t)$ دو حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ و پارامترهای r ، κ ، θ و σ وابسته به زنجیر مارکوف پنهان دو حالت $Z(t)$ هستند. برای قیمت گذاری اختیار آسیایی حسابی، یک الگوریتم بر اساس روش متغیرهای متضاد تعمیم یافته ارائه دهید.

۸- اختیار سبد یکی از انواع اوراق مشتقه برای مجموعه‌ای از دارایی‌های تحت اختیار است، به‌طوری که بازده آن به صورت زیر بیان می‌شود

$$\max([c_1 S_1(T) + c_2 S_2(T) + \dots + c_d S_d(T)] - K, 0),$$

که در آن d تعداد دارایی‌ها و ثابت‌های c_i برای هر $i = 1, \dots, d$ ، تعداد سهام‌های مربوط به شرکت (بانک) i ام است. اختیار سبد معمولاً برای مجموعه‌ای از دارایی‌ها شامل سهام بانک‌ها یا ارزهای آسیایی به کار می‌رود.

فرض کنید $S_i(t)$ ها برای هر $i = 1, \dots, d$ ، به طور مستقل از حرکت براونی هندسی پیروی کنند، یعنی

$$S_i(t) = r_i S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t), \quad i = 1, \dots, d,$$

که در آن $W_1(t), \dots, W_d(t)$ حرکت‌های براونی مستقل از هم هستند. بر اساس روش متغیر کنترلی و با در نظر گرفتن اختیار آسیایی هندسی به عنوان متغیر کنترلی یک الگوریتم برای قیمت‌گذاری اختیار سبد ارائه دهید.

کتاب نامه

- [1] Christoffersen, P., Heston, S., & Jacobs, K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science*, 55(12): 1914-1932.
- [2] Cont, R., & Tankov, P. (2003). Financial modelling with jump processes. Chapman and Hall/CRC.
- [3] Cox, J. C., & Ross, S. A. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics*, 3(1-2): 145-166.
- [4] Elliott, R. J., Chan, L., & Siu, T. K. (2005). Option pricing and Esscher transform under regime switching. *Annals of Finance*, 1(4): 423-432.
- [5] Glasserman, P. (2003). Monte Carlo methods in financial engineering (Vol. 53). Springer Science & Business Media.
- [6] Hamilton, J. D. (2008). Regime switching models. The new Palgrave dictionary of economics (2nd edn.), Macmillan, London.
- [7] Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The review of financial studies*, 6(2): 327-343.
- [8] Mehrdoust, F. (2015). A new hybrid Monte Carlo simulation for

- Asian options pricing. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 85(3): 507-516.
- [9] Mehrdoust, F., Babaei, S., & Fallah, S. (2017). Efficient Monte Carlo option pricing under CEV model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 46(3): 2254-2266.
- [10] Mehrdoust, F., & Noorani, I. (2019). Pricing S&P500 barrier put option of American type under Heston-CIR model with regime-switching. *International Journal of Financial Engineering*, 6(2): 1950014.
- [11] Mehrdoust, F., Noorani, I., & Fallah, S. (2019). American option pricing under the Markov regime-switching Heston model. *Mathematical Reports*, 4(74): 781-806.
- [12] Mehrdoust, F., & Noorani, I. (2020). An efficient variance reduction-based simulation algorithm for pricing arithmetic Asian options. *Annals of Financial Economics*, 15(1): 2050001.
- [13] Mehrdoust, F., & Noorani, I. (2022). Valuation of spark-spread option written on electricity and gas forward contracts under two-factor models with non-Gaussian Lévy processes. *Computational Economics*, 61(2): 807-853.
- [14] Mehrdoust, F., & Noorani, I. (2021). Forward price and fitting of electricity Nord Pool market under regime-switching two-factor model. *Mathematics and Financial Economics*, 15: 501-543.
- [15] Mehrdoust, F., Noorani, I., & Hamdi, A. (2023). Two-factor Heston model equipped with regime-switching: American option pricing and model calibration by Levenberg-Marquardt optimization algorithm. *Mathematics and Computers in Simulation*, 204: 660-678.
- [16] Mehrdoust, F., & Noorani, I. (2023). Implied higher order moments in the Heston model: a case study of S& P500 index. *Decisions*

in *Economics and Finance*, 46(2): 477-504.

[17] Mehrdoust, F., Noorani, I., & Hamdi, A. (2021). Calibration of the double Heston model and an analytical formula in pricing American put option. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 392: 113422.

[18] Mehrdoust, F., Noorani, I., & Kanninen, J. (2024). Valuation of option price in commodity markets described by a Markov-switching model: A case study of WTI crude oil market. *Mathematics and Computers in Simulation*, 215: 228-269.

[19] Mehrdoust, F., Noorani, I., & Khavari, M. (2021). Efficient estimation of Markov-switching model with application in stock price classification. *Journal of Mathematics and Modeling in Finance*, 1(2): 111-130.

[20] Noorani, I., Mehrdoust, F., & Nasroallah, A. (2021). A generalized antithetic variates Monte-Carlo simulation method for pricing of Asian option in a Markov regime-switching model. *Mathematics and Computers in Simulation*, 181: 1-15.

[21] Nasroallah, A. (2008). K-Antithetic Variates in Monte Carlo Simulation, *Afrika Statistika*, 3(1): 144-155.

[22] Samimi, O., Mardani, Z., Sharafpour, S., & Mehrdoust, F. (2017). LSM algorithm for pricing American option under Heston-Hull-White's stochastic volatility model. *Computational Economics*, 50(2), 173-187.

[23] Shreve, S. (2004). Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models (Vol. 11). *Springer Science & Business Media*.

واژه‌نامه

A

Adapt	سازوار
American option	اختیار آمریکایی
Antithetic variate	متغیر متضاد
Arbitrage	آربیتراژ
Arithmetic Asian option	اختیار آسیایی حسابی
Asset	دارایی
Autoregressive model	مدل اتورگرسیو

B

Basket option	اختیار سبد
Biased	اریب
Black-Scholes formula	فرمول بلک-شولز
Binomial distribution	توزیع دو جمله‌ای
Bond	اوراق بهادار مشتقه
Brownian motion	حرکت براونی

C

Calibration	کالیبراسیون
Call option	اختیار خرید
Characteristic function	تابع مشخصه
Commodity market	بازار کالا

Complete market	بازار کامل
Confidence interval	بازه اطمینان
Control variate	متغیر کنترلی
Counting process	فرایند شمارشی
Correlation	همبستگی
Cumulative distribution function	تابع توزیع تجمعی
D	
Density function	تابع چگالی
Derivative securities	ورق مشتقه
Deterministic function	تابع قطعی
Diffusion	انتشار
Disjoint	ناسازگار
Discount factor	عامل تنزیل
Discretization	گسسته‌سازی
Double Heston model	مدل هستون مضاعف
Downturn	رکود
Drift	رانس
Dynamic	دینامیک
E	
Energy market	بازار انرژی
Equivalent martingale measure	اندازه مارتینگل معادل
Estimator	برآوردگر
European option	اختیار اروپایی
Event	پیشامد
Exchange	بورس
Expectation	امید ریاضی
F	
Filtration	پالایه
Financial mathematics	ریاضیات مالی
Forwards	پیمان آتی
Fourier transform	تبدیل فوریه

Futures قرارداد آتی

G

Generalized antithetic variate متغیر متضاد تعمیم‌یافته

Geometric Asian option اختیار آسیایی هندسی

Geometric Brownian motion حرکت براونی هندسی

Global minimum مینیمم سراسری

H

Hedging پوشش ریسک

Heston model مدل هستون

Heston regime-switching model مدل رژیم-سوئیچینگ هستون

Hidden data داده‌های پنهان

Hidden Markov chain زنجیر مارکف پنهان

Homogeneous Poisson process فرایند پواسن همگن

I

Implied volatility تلاطم ایجاب‌شده

Importance sampling نمونه‌گیری نقاط مهم

Incomplete market بازار ناکامل

Increment نمو

Independent مستقل

Index شاخص

Inflation تورم

Information اطلاعات

Initial price قیمت اولیه

In-sample در-نمونه

Interest rate نرخ بهره

Isometry ایزومتري

Ito representation نمایش ایتو

J

Jump-diffusion پرش-انتشار

K

Kurtosis کشیدگی

L

Strong law of large numbers قانون قوی اعداد بزرگ

Levy process فرایند لوی

M

Market بازار

Martingale مارتینگل

Martingale representation نمایش مارتینگل

Maturity time زمان سررسید

Maximum likelihood estimation برآورد ماکسیمم درست‌نمایی

Mean reversion level سطح بازگشت به میانگین

Measurable اندازه‌پذیر

Modeling مدل‌سازی

Moment generating function تابع مولد گشتاور

Money market account حساب بانکی

Monte-Carlo simulation شبیه‌سازی مونت-کارلو

N

Normal distribution توزیع نرمال

O

Optimization بهینه‌سازی

Option اختیار

Over-the-counter فرابورس

P

Payoff بازده

Portfolio پرتفوی

Prediction پیش‌بینی

Probability measure اندازه احتمال

Probability space فضای احتمال

Positive semi-definite matrices ماتریس نیمه معین مثبت

Put option اختیار فروش

R

Radon-Nikodym derivative	مشتق رادون-نیکودیم
Random path	مسیر تصادفی
Random sample	نمونه تصادفی
Random variable	متغیر تصادفی
Regime-switching model	مدل رژیم-سوئیچینگ
Risk management	مدیریت ریسک
Risk-neutral	ریسک-خنثی
S	
Sample	نمونه
Shifted exponential density	چگالی نمایی انتقال یافته
Simulation	شبیه‌سازی
Skewness	چولگی
Spark spread option	اختیار اسپارک اسپرد
Speed of reversion	سرعت بازگشت به میانگین
Spike	پیک قیمت
Spot price	قیمت آنی
Standard deviation	انحراف معیار
State-space representation	نمایش حالت-فضا
State of Markov chain	حالت زنجیر مارکف
Stationary increments	نموهای مانا
Statistical error	خطای آماری
Stochastic differential equation	معادله دیفرانسیل تصادفی
Stochastic process	فرایند تصادفی
Stock	سهام
Strike price	قیمت توافقی
Supply and demand	عرضه و تقاضا
Symmetric	متقارن
T	
Trading	معامله کردن
U	
Unbiased	نازیب

V

Variable	متغیر
Variance	واریانس
Variance reduction	کاهش واریانس
Volatility	تلاطم

نمایه

آربیتراژ، ۸۲، ۸۵	توزیع نیم-نرمال، ۱۱۴
اعداد تصادفی، ۱-۲، ۳۵، ۱۱۴	تلاطم موضعی، ۱۱۸
انتگرال ایتو، ۴۵، ۴۷	تلاطم بازار، ۶۲، ۷۴، ۸۹
اندازه پرش، ۶۳، ۱۲۱-۱۲۰، ۱۵۲	تلاطم تصادفی، ۹۲
اندازه احتمال معادل، ۸۱	تابع توزیع، ۲، ۴، ۸، ۴۹، ۶۱
اندازه احتمال ریسک خنثی، ۸۵	تابع چگالی، ۹، ۱۶، ۲۱، ۳۹
اندازه احتمال مارتینگل، ۹۰	چولگی، ۶۰
اندازه پذیر، ۸۶	حرکت براونی استاندارد، ۵۶، ۷۴، ۱۰۲
اندازه ریسک خنثی، ۸۵	حرکت براونی هندسی، ۱۰۲
اختیار اروپایی، ۱۲۵	حالات اقتصادی، ۹۵
اختیار آسیایی، ۱۳۳	حساب بانکی، ۷۵، ۷۹
اختیار خرید، ۱۳۸	روش اوپلر، ۱۲۰
اختیار معامله، ۲، ۷۷-۷۶	روش میلشتین، ۱۱۸
بازار فرابورس، ۱۵۱	زنجیر مارکف، ۶۸-۶۵، ۷۲، ۷۴، ۹۲
بازارهای مالی، ۳۶	زنجیر مارکف پنهان، ۷۳-۷۲، ۱۵۰، ۱۵۲
برآوردگر، ۹، ۱۶، ۲۰	زمان سررسید، ۱۲۵-۱۲۳، ۱۲۸، ۱۳۹، ۱۴۴
پرتفوی، ۹۲	سرعت بازگشت به میانگین، ۵۹، ۹۲، ۱۰۶، ۱۱۸
پوشش ریسک، ۷۶	سازوار، ۳۹، ۴۳
تبدیل وارون، ۳۱	شبیه‌سازی مونت-کارلو استاندارد، ۲۸
توزیع نرمال، ۴۱، ۴۷، ۴۹	شبه مارتینگل، ۷۱، ۷۳

- صرفه ریسک، ۷۵
 فرایند پواسن، ۱۰۸-۱۱۱، ۱۲۱، ۱۵۱-۱۵۲
 فرایند پواسن مرکب، ۶۱-۶۲، ۱۰۹-۱۱۱
 فرایند پرش-انتشار مرتون، ۱۱۱-۱۱۲
 فرمول بلک-شولز، ۱۴۵
 فضای احتمال، ۷۲، ۸۲
 قدم زدن تصادفی، ۹۵-۹۷
 قیمت نقدی، ۱۱۸-۱۱۹
 قیمت توافقی، ۱۲۳-۱۲۵، ۱۲۸، ۱۴۴، ۱۵۱
 قضیه گیرسانف، ۸۵، ۸۷، ۹۰
 قضیه لوی، ۴۹، ۵۵، ۸۸
 قانون قوی اعداد بزرگ، ۶، ۷، ۱۵
 قرارداد آتی، ۱۱۸، ۱۵۱
 کاهش واریانس، ۱۵، ۱۳۰
 کشیدگی، ۶۰
 گسسته‌سازی ۱۰۶-۹۲، ۱۱۳، ۱۱۷
 لم ایتو، ۴۸
 مدل پرش-انتشار، ۱۰۸، ۱۱۱
 مدل رژیم-سوئیچینگ، ۱۱۵-۱۱۲، ۱۱۸
 مدل کاکس-اینگرسل-راس، ۵۲
 مدل هستون، ۵۹-۶۰
 مدل هستون مضاعف، ۱۵۰
 مدل وسیچک ۵۴-۵۱
 ماتریس احتمال انتقال ۶۷-۶۵، ۹۲
 ماتریس نرخ انتقال، ۷۰
 مارتینگلی، ۴۷
 مارتینگل نمایی، ۴۱
 مشتق رادون-نیکودیم، ۸۳-۸۲، ۸۶
 معادله دیفرانسیل تصادفی مرتون، ۱۵۱
 متغیر کنترلی، ۱۴۲
 متغیرهای متضاد، ۱۶
 متغیرهای متضاد تعمیم‌یافته، ۱۹
 نمایی انتقال یافته، ۳۱
 نمو زمانی، ۴۸
 نرخ بازده، ۵۶
 نرخ بهره بدون ریسک، ۷۶
 ناریب، ۴
 ناسازگار، ۳۸
 نمونه‌گیری نقاط مهم، ۲۸

University of Guilan Press

Modeling and Simulation of Financial Markets

By:

Farshid Mehrdoust, Ph. D.

Idin Noorani Sarabpour, Ph. D.