



دانشگاه گیلان

۱۳۵۳-۱۹۷۴

مقدمه‌ای بر

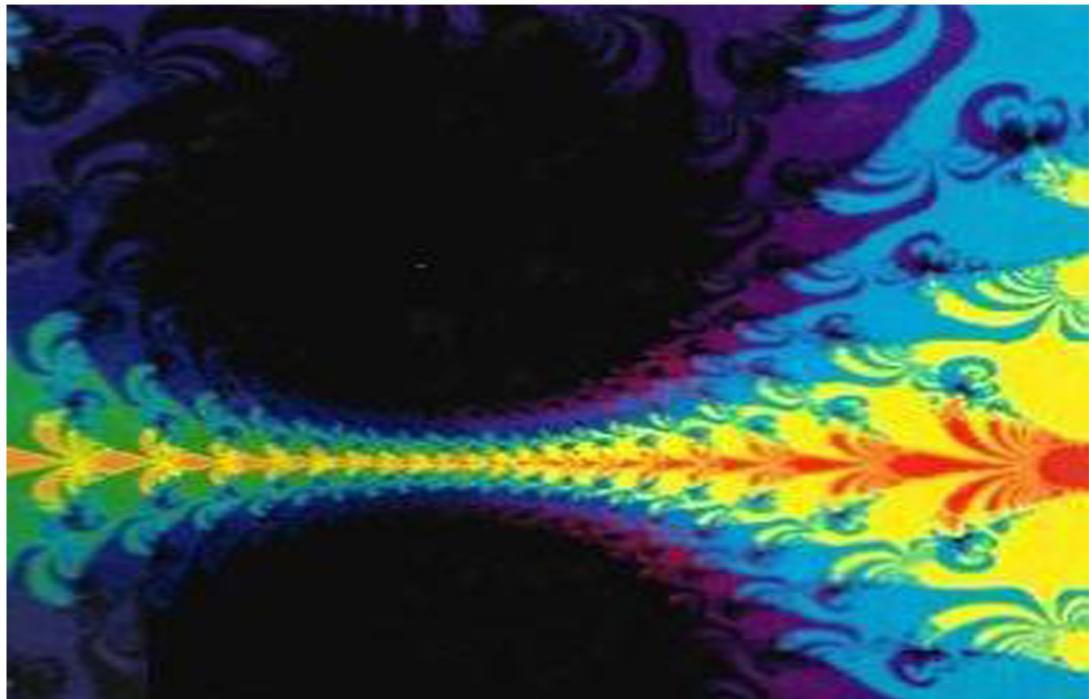
سیستم‌های دینامیکی آشوبناک

تألیف: رابرت ال. دونی

ترجمه: سانا ز لامعی استادیار دانشگاه گیلان

چاپ اول

اداره چاپ و انتشارات دانشگاه گیلان





مقدمه ای بر سیستم های دینامیکی آشوبناک

مؤلف

رابت دونی

مترجم

دکتر سانا ز لامعی

عضو هیات علمی دانشگاه گیلان

..

انتشارات دانشگاه گیلان

۱۳۹۷



دانشگاه گیلان

۱۳۵۳-۱۹۷۴

شابک: ۸-۱۶۶-۱۵۳-۶۰۰-۹۷۸

سخنasaه: دوپی، رایرت ال. ۱۹۶۸ م° Devancy, Robert L

عنوان و نام پدیدآور: مقدمه ای بر سیستم های دینامیکی آشوبناک / نویسنده رایرت دوپی؛ مترجم ساناز لامعی؛ ویراستار علمی مرضیه شمس یوسفی

مشخصات نشر: رشت: دانشگاه گیلان، انتشارات، ۱۳۹۷.

مشخصات ظاهری: ۳۶۸:

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۱۵۳-۱۶۶-۴

وضیعت فهرستنیسی: نیپا

یادداشت: عنوان اصلی: An introduction to chaotic dynamical systems

موضوع: رفتار آشوبناک در سیستم ها

موضوع: chaotic behavior in systems

موضوع: نظریه های غیر خطی

Nonlinear theories

موضوع: شناسه افزوده

شناسه افزوده: لامعی، ساناز، ۱۳۵۸، مترجم

شناسه افزوده: شمس یوسفی، مرضیه، ۱۳۵۹ -، ویراستار

شناسه افزوده: دانشگاه گیلان، انتشارات

ردہ بندی کنگره: Q۱۷۲۲/۵

ردہ بندی دیوبی: ۱۳۹۷/۴۵۷ ر

ردہ بندی دیوبی: ۸۵۷/۰۰۳

شماره کتابشناسی ملی: ۴۹۷۵۰۶

اداره چاپ و انتشارات دانشگاه گیلان

مقدمه ای بر سیستم های دینامیکی آشوبناک

نام کتاب

رایرت دوپی

نویسنده

دکتر ساناز لامعی

متجم

دکتر مرضیه شمس یوسفی

ویراستار علمی

هوشمنگ سپهری

ویراستار ادبی

اول ۱۳۹۷

نوبت چاپ

انتشارات دانشگاه گیلان

ناشر

۱۰۰ جلد

شمارگان

۳۰۰۰۰ ریال

قیمت

* هر گونه چاپ و تکثیر فقط در اختیار انتشارات دانشگاه گیلان است.*

فهرست مطالب

چ	پیش‌گفتار نویسنده
ز	پیش‌گفتار مترجم
۱	۱ دینامیک یک بعدی
۲	۱.۱ مثالهایی از سیستم‌های دینامیکی
۷	۲.۱ مقدماتی از حسابان
۱۷	۳.۱ تعاریف اولیه
۲۴	۴.۱ هذلولوی بودن
۳۲	۵.۱ یک مثال: خانواده نگاشتهای درجه دو
۴۱	۶.۱ دینامیک نمادین
۴۵	۷.۱ تزویج توبیولوژیکی
۵۰	۸.۱ آشوب
۵۵	۹.۱ پایداری ساختاری
۶۳	۱۰.۱ قضیه شارکوفسکی
۷۲	۱۱.۱ مشتق شوارتسی
۸۴	۱۲.۱ نظریه انشعاب
۹۸	۱۳.۱ نگاه دیگری به تناوب
۱۰۷	۱۴.۱ نگاشتهای روی دایره
۱۲۰	۱۵.۱ دیفیومورفیسمهای مورس-اسمیل
۱۲۸	۱۶.۱ نقاط هموکلینیک و انشعابها

۱۳۷.....	۱۷.۱ مسیر دوره-دو برابر ساز به آشوب	۲
۱۴۸.....	۱۸.۱ نظریه آمیختگی	
۱۵۷.....	۱۹.۱ شجره‌نامه نقاط متناوب نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای	
۱۶۹.....	دینامیک ابعاد بالاتر	۲
۱۷۰.....	۱.۲ پیش‌نیازهایی از آنالیز مختلط و حسابان	
۱۸۳.....	۲.۲ دینامیک نگاشتهای خطی: ابعاد دو و سه	
۱۹۲.....	۳.۲ نگاشت نعل اسب	
۲۰۱.....	۴.۲ خودریختی‌های هذلولی روی چنبه	
۲۱۴.....	۵.۲ ریابندها	
۲۲۸.....	۶.۲ قضیه خمینه پایدار و ناپایدار	
۲۴۷.....	۷.۲ نتایج سرتاسری و مجموعه‌های هذلولی	
۲۵۶.....	۸.۲ انشعاب هاف	
۲۶۸.....	۹.۲ نگاشت هنون	
۲۷۹.....	دینامیک توابع تحلیلی	۳
۲۸۰.....	۱.۳ پیش‌نیازهایی از آنالیز مختلط	
۲۸۷.....	۲.۳ ملاقات دوباره با نگاشتهای درجه دوم	
۳۰۱.....	۳.۳ خانواده‌های نرمال و نقاط استثنایی	
۳۰۵.....	۴.۳ نقاط متناوب	
۳۱۲.....	۵.۳ مجموعه جولیا	
۳۱۸.....	۶.۳ هندسه مجموعه‌های جولیا	
۳۲۱.....	۷.۳ نقاط متناوب خنثی	
۳۴۳.....	۸.۳ مجموعه مندلبروت	
۳۵۰.....	۹.۳ یک مثال: توابع متعالی	
۳۶۲.....	واژه‌نامه فارسی و نمایه	

پیش‌گفتار نویسنده

مطالعه سیستم‌های دینامیکی غیرخطی در سالهای اخیر^۱ به صورت گستردگای موردنویجه قرار گرفته است. دانشمندان از هر زمینه علمی به قدرت و زیبایی تکنیک‌های کیفی و هندسی که در این دوره گسترش یافت پی بردند. مهم‌تر از آن اینکه آنها توانستند این تکنیک‌ها را در بعضی از مسائل غیرخطی مهم در فیزیک، شیمی، بوم‌شناسی و اقتصاد به کار گیرند. این نتایج واقعاً مهیج هستند: رفتار سیستم‌هایی که از نقطه نظر محاسبات تحلیلی کاملاً غیرقابل کنترل به نظر می‌رسیدند، اکنون با دیدگاه هندسی یا کیفی بسیار ساده‌تر درک می‌شوند. رفتار آشوبناک و تصادفی جوابهای سیستم‌های قطعی، اکنون به عنوان یک ویژگی ذاتی در بسیاری از سیستم‌های غیرخطی شناخته شده و نظریه هندسی که در سالهای گذشته گسترش یافته است، به خوبی در این مسائل به کار می‌رود.

نظریه مدرن سیستم‌های دینامیکی دارای تاریخچه نسبتاً کوتاهی است. این نظریه با پوانکاره^۲ شروع شد. وی انقلابی در مطالعه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با معرفی تکنیک‌های کیفی از هندسه و توبولوژی به جای استفاده از روش‌های تحلیلی سخت برای بحث روی خواص سرتاسری جوابهای این سیستم‌ها به‌پا کرد. برای پوانکاره، فهم سرتاسری رفتار پیچیده همه جوابهای سیستم بسیار مهم‌تر از رفتار موضعی یک جواب دقیق از دیدگاه تحلیلی بود. در همان ابتدای قرن بیستم دیدگاه پوانکاره توسط بیرون‌خود^۳ گسترش یافت. بیرون‌خود متوجه اهمیت مطالعه نگاشتها شد و از دینامیک گستته به عنوان ابزاری برای فهم دینامیک پیچیده‌ای که از معادلات دیفرانسیل پدید می‌آید، استفاده کرد.

ترکیب تکنیک‌های هندسی و توبولوژیکی حاصل از این دوره باعث شد که به تدریج ریاضی‌دانان از مطالعه خود سیستم‌های دینامیکی و مطالعه ساختارهای هندسی زمینه آن فاصله بگیرند. خمینه‌ها، یعنی "قضاهای حالت" طبیعی سیستم‌های دینامیکی، به‌نوبه خود مورد مطالعه گرفتند. گرایش‌هایی مانند توبولوژی دیفرانسیل و توبولوژی جبری متولد و شکوفا شدند. پیشرفت‌های سریع در این گرایشها،

^۱ این کتاب در سال ۱۹۸۵ تجدیدچاپ شده است.

Poincaré^۲

Birkhoff^۳

تکنیکهای جدید و متنوعی برای حمله هندسی به مسائل به دست ریاضی دانان داد. در همین حال، خود سیستم‌های دینامیکی تقریباً رونق خود را از دست داد؛ به جز در اتحاد جماهیر شوروی که ریاضی دانانی چون لیاپانوف^۴، پونتریاگین^۵، آندرونوف^۶ و غیره مطالعه سیستم‌های دینامیکی را از دیدگاه‌های مختلف مورد مطالعه قرار دادند.

این روند در حدود سال ۱۹۶۰ تحت تأثیر موثر^۷ و اسمیل^۸ در ایالات متحده، پیشوتو^۹ در برزیل و کلموگروف^{۱۰}، آرنولد^{۱۱} و سینایی^{۱۲} در اتحاد جماهیر شوروی تغییر کرد. تکنیکهای توپولوژی دیفرانسیل به اسمیل، پیشوتو و رهروان آنها امکان درک رفتار آشوبناک دسته بزرگی از سیستم‌های دینامیکی را داد که سیستم‌های هذلولوی یا اصل A نام گرفتند. ترکیب هندسه و آنالیز پیشرفتة به کلموگروف، آرنولد و موذر اجازه داد که نظریه KAM معروف خود را پیش ببرند. نظریه ارگودیک هموار، دینامیک توپولوژی، مکانیک همیلتونی و نظریه کیفی معادلات دیفرانسیل معمولی همگی به نوبه خود به عنوان تخصص‌هایی توسعه یافتدند.

اکنون سیستم‌های دینامیکی از ترکیب جذابیت و تکنیکهایی از بسیاری از رشته‌ها بهره‌مند شده است. فیزیک دانانی همچون فایگن باوم^{۱۳} علاقه به سیستم‌های دینامیکی در ابعاد پایین را احیاء کرد. پیشرفت‌های سریع در زیست‌شناسی و اقتصاد ریاضی، گروه‌های متفاوتی از دانشمندان را به این گرایش کشانده است. کشف سیستم‌های آشوبناک پایدار همانند سیستم لورنتز^{۱۴} در هواشناسی دانشمندان را متلاعده کرد که علاوه بر نقاط تعادلی پایدار و دایره‌های حدی، تعداد بسیار بیشتری از رفتارهای دینامیکی وجود دارد. به عنوان کم‌اهمیت‌ترین دستاورد، گرافیک کامپیوتروی نشان داده است که دینامیک سیستم‌های ساده چقدر می‌تواند زیبا و جذاب باشد.

همه این پیشرفت‌ها، نظریه سیستم‌های دینامیکی را به شاخه‌ای جذاب و مهم از ریاضی و مورد علاقه دانشمندانی در رشته‌های مختلف تبدیل کرده است. متأسفانه به دلیل اینکه بسیاری از تحقیقات معاصر پیش‌زمینه‌ای در شاخه‌های پیشرفت‌های چون توپولوژی دیفرانسیل، توپولوژی جبری و هندسه دیفرانسیل دارد، معرفی این شاخه، نیازمند این است که دانشجویان، با برخی از این گرایشها آشنایی داشته باشند؛ ولی اعتقاد ما بر این است که اجزای سیستم‌های دینامیکی را می‌توان بدون بعضی از پیش‌زمینه‌ای مانند نظریه خمینه‌های مشتق‌پذیر، آنالیز پیشرفت و غیره نیز معرفی کرد.

Liapounov^۴
Pontryagin^۵
Andronov^۶
Moser^۷
Smale^۸
Peixoto^۹
Kolmogorov^{۱۰}
Arnol'd^{۱۱}
Sinai^{۱۲}
Feigenbaum^{۱۳}
Lorenz^{۱۴}

سیستم‌های دینامیکی روی فضاهای ساده مانند خط حقیقی یا صفحه، همه رفتارهای جالب و آشوبناک را که در خمینه‌های کلی تریخ می‌دهد به نمایش می‌گذارد. بدون نیاز به پیش‌نیازهای غیرضروری، می‌توان ایده‌های اصلی این شاخه را برای دانشجویان سالهای آخر کارشناسی و همچنین دانشجویان تحصیلات تکمیلی و محققان سایر رشته‌ها ارائه داد. این، هدف اصلی این کتاب است.

در قرن اخیر، شاخه سیستم‌های دینامیکی و به‌ویژه مطالعه سیستم‌های آشوبناک، پیشرفت زیادی کرده است. با وجود اینکه این گرایش هنوز نسبتاً جوان است هیچ شکی نیست که این شاخه مبدل به یکی از گرایشهای مهم بین رشته‌های مختلف علوم شده است. امیدواریم که این کتاب، هیجانی برای جلب افراد به گرایش سیستم‌های دینامیکی ایجاد کند.

یادداشتی برای خواننده

این کتاب قبل از هر چیزیک کتاب ریاضی است و بنابراین ما در سراسر آن، روی جنبه ریاضی نظریه سیستم‌های دینامیکی گستره تأکید می‌کنیم و نه روی کاربردهای زیاد و متنوع آن. این کتاب در آغاز از یک سطح ساده‌تر شروع شده و در ادامه نیز به آگاهی بیشتری از ریاضی نسبت به آنچه که یک مهندس یا فیزیکدان می‌داند نیاز ندارد. مطالعه کامل هرسه فصل این کتاب برای دانشجویانی که اطلاعاتی از حسابان پیشرفتنه و جبرخطی دارند امکان‌پذیر است و البته داشتن میزان خوبی مهارت ریاضی هم مفید است.

فصل اول، یعنی دینامیک یک بعدی، طولانی‌ترین فصل است. به اعتقاد نویسنده، تقریباً همه ایده‌ها و تکنیکهای مهم دینامیک غیرخطی، روی خط حقیقی یا دایره قابل بیان است. بنابراین با کاستن از پیچیدگیهای توپولوژیکی و روابط جبری موردنبیاز، از این مطلب بهره می‌بریم. به‌ویژه تنها پیش‌نیازهای این فصل، پیش‌زمینه‌ای در درس حسابان است. (البته یک یا دو بار از ضرب یک ماتریس 2×2 در بخش ۱۴.۱ استفاده می‌کنیم و همچنین قضیه تابع ضمنی برای دو متغیر را در بخش ۱۲.۱ به کار می‌بریم که استثناء هستند). فقط با استفاده از این ابزار، موضوعات مهمی مانند پایداری ساختاری، تزویج توپولوژیکی، نگاشت تغییرجا، نقاط هموکلینیک و نظریه انشعاب را معرفی می‌کنیم. برای تأکید روی این نکته که آشوب در ساده‌ترین سیستم‌ها رخ می‌دهد، ما بیشتر تحلیل مان را در این بخش روی یک مدل ساده یعنی نگاشت درجه دو که با $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ نمایش داده می‌شود انجام می‌دهیم. خوبی این نگاشت این است که ساده‌ترین نگاشت غیرخطی است که تقریباً همه مفاهیمی را که می‌خواهیم معرفی کنیم به نمایش می‌گذارد. برخی از مفاهیم توپولوژیکی موردنبیاز مانند مجموعه چگال و مجموعه کانتور با جزئیات توضیح داده خواهند شد.

فصل دوم در مورد سیستم‌های دینامیکی با ابعاد بالاتر است. با توجه به اینکه بسیاری از

پیش‌نیازها در فصل اول معرفی شدند، بحث روی نگاشتهای درجه دو همچون نگاشت نعل اسب اسمیل، خودریختی‌های هذلولوی چنبره و سیم‌لوله نسبتاً ساده به نظر می‌رسد. در این فصل فرض شده است که دانشجو کمی با حساب چند بعدی و جبرخطی، شامل مفاهیم مقادیر ویژه و بردار ویژه ماتریس‌های 3×3 آشنایی دارد. یکی از تفاوت‌های اساسی دینامیک یک‌بعدی و ابعاد بالاتر در این است که امکان انقباض و انبساط هم‌زمان برای دینامیک ابعاد بالاتر وجود دارد و به تفصیل در برهان قضیه خمینه‌های پایداری‌بیان می‌شود. این فصل را با تعداد زیادی تمرین، که روی نگاشت مهم هنون در صفحه تمرکز یافته، به پایان می‌بریم. این بخش خلاصه‌ای از بسیاری از موضوعات قبلی است و می‌توان آن را به عنوان یک پروژه "پایان‌ترم" برای خواننده در نظر گرفت.

به فصل آخر می‌توان به عنوان "مباحث ویژه" نگاه کرد که در آن به اطلاعاتی از آنالیز مخلوط نیاز است. در این فصل نگاشتهای تحلیلی مخلوط و به ویژه ساختار مجموعه جولیایی چند جمله‌ای‌ها را بیان می‌کنیم که دیدگاه کامل‌تری در مورد دینامیک نگاشتهایی مانند نگاشت درجه دو، که در فصل اول توجه زیادی به آن شد، به دست می‌دهد.

پیش‌نیازهای هر فصل در همان فصل گنجانده شده است ولی به مفاهیم پایه‌ای سیستم‌های دینامیکی که در فصل اول معرفی می‌شود نیاز است. از این‌رو قضیه‌ها، شکل‌ها و غیره در هر بخش به ترتیب و بدون ارجاع به شماره فصل، شماره‌گذاری شده‌اند تا ارجاعی که بین فصلها وجود دارد باعث سردگمی نشود.

مطلوب متنوعی در این کتاب گنجانده شده است. ما سعی کرده‌ایم که مفاهیم مختلفی از دینامیک را در ساده‌ترین شکل در فصل اول بیان کنیم و پس از آن مرحله به مرحله به این مفاهیم بازگشته و به تظریف آنها می‌پردازیم. یکی از این مطالب، نظریه انشعاب است. ما ابتدایی‌ترین نوع انشعاب یعنی انشعاب زینی-گرهای و دوره-دو برابر ساز را در فصل اول معرفی می‌کنیم. پس از آن در همین فصل به نقاط انباشتگی چنین انشعاباتی بعد از بسط مفهوم نقاط هموکلینیک می‌پردازیم. در فصل دو، به نظریه انشعاب برای بحث روی انشعاب هاف بازمی‌گردیم. درنهایت در فصل آخر، به کاوش انواع انشعاباتی که در دینامیک تحلیلی رخ می‌دهد، همانند مبحث جنبه‌های سرتاسری انشعاب زینی-گرهای می‌پردازیم.

یک موضوع مشابه دیگر دینامیک نمادین است. ما به دینامیک نمادین به عنوان ابزاری نگاه می‌کنیم که سیستم‌های دینامیکی پیچیده را به سیستم‌های کاملاً متفاوتی تبدیل می‌کند که تحلیل آنها بسیار ساده‌تر است. دینامیک نمادین ابتدا در فصل اول هنگام بحث بر روی نگاشت درجه دو ظاهر می‌شود. واضح است که ابتدایی‌ترین شکل برای پدیده‌ای که در نگاشت نعل اسب اسمیل اتفاق می‌افتد در بعد یک بوده و کاملاً از این موضوع استفاده می‌کنیم. پس از آن، دینامیک نمادین از طریق مثال دیگری از نگاشتهای درجه دو، به زیرتغییرجاهای از نوع متناهی گسترش پیدا می‌کند و درنهایت مفهوم افزار مارکوف و نگاشت حد وارون در فصل دوم معرفی می‌شوند.

مثالهای زیادی در این کتاب موجودند. معمولاً از این مثالها به عنوان سیستم‌های دینامیکی خاص برای انگیزه دادن برای معرفی مفاهیم جدید استفاده می‌کنیم. در حقیقت، معمولاً حالت عمومی و کلی را قریانی تمرکز روی سیستم‌های خاص یا دسته‌ای از سیستم‌ها می‌کنیم. بسیاری از نتایج این کتاب به شکلی بیان می‌شوند که بسیار نزدیک به حالت کلی هستند. ما معتقدیم که حالتهای کلی تر بهتر است به کتابهای پیشرفته‌تری که به ریاضی عمیق‌تری نیاز دارد واگذار شود.

بسیاری از مطالبی که محققان، آن را سیستم‌های دینامیکی می‌دانند به صورت عمدی از این کتاب کنار گذاشته شده است. برای مثال سیستم‌های دینامیکی پیوسته و معادلات دیفرانسیل را به هیچ‌وجه بررسی نمی‌کنیم. چند دلیل برای این کار داریم. ابتدا، همان‌طورکه مشخص است محاسبات معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی خاص تقریباً ناممکن است. دوم اینکه مطالعه معادلات دیفرانسیل نیازمند پیش‌نیازهای بیشتری برای دانشجویان، نسبت به آنچه در فصل اول آمده موردنیاز است. به جای آن به حالتی می‌پردازیم که در آن، پدیده‌های دینامیکی حالت پیوسته، در حالت گسسته نیز اتفاق بیفتند و بنابراین آنها را بسیار ساده‌تر بررسی می‌کنیم و ابتدا از مطالعه نگاشتها شروع می‌کنیم. در حال حاضر کتابهای زیادی، سیستم‌های دینامیکی پیوسته را با شرح و بسط توصیف می‌کنند. امیدواریم که این کتاب مقدمه‌ای مناسب برای مواجه شدن با کتابهای پیشرفته‌تر باشد.

مطلوب دیگری که حذف شده است، نظریه ارگودیک است. به نظریه اندازه فراتر از یک کتاب مقدماتی است. البته ممکن است گفته شود که نظریه اندازه لزوماً پیشرفته‌تر از آنالیز مختلط موردنیاز فصل سوم نیست. با این حال تصور می‌کنیم که فهم رهیافت توپولوژیکی که در سرتاسر این کتاب درنظر گرفته شده، است برای دانشجویان غیرتحصیلات تکمیلی راحت‌تر است. بدون هیچ شکی از بهترین گزینه‌ها برای ادامه این کتاب، نظریه ارگودیک و همچنین معادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند.

در این کتاب از پیشنهادات و نظرات افراد زیادی استفاده شده است. لازم است از کلارک رابینسون^{۱۵}، گویدو ساندری^{۱۶}، هاروی کینس^{۱۷}، فیل بویلند^{۱۸}، پل بلنچارد^{۱۹}، دیک هال^{۲۰} و ادوود دونی^{۲۱} برای نظرات ارزنده درمورد نحوه بخش‌بندی کتاب تشکر کنم. ریچارد میلمن^{۲۲}، کریس گل^{۲۳} و استیو بترسن^{۲۴} همه متن را خوانده و پیشنهاداتی درمورد متن و سازماندهی کتاب (و تصحیح

Clark Robinson^{۱۵}
Guido Sandri^{۱۶}
Harvey Keynes^{۱۷}
Phil Boyland^{۱۸}
Paul Blanchard^{۱۹}
Dick Hall^{۲۰}
Edwood Devaney^{۲۱}
Richard Millman^{۲۲}
Chris Golé^{۲۳}
Steve Batterson^{۲۴}

برهانها) ارائه دادند. درنهایت این کتاب با نظرات و تشویق‌های فیل هولمز^{۲۵} کامل شد و بسیاری از تجربیات وی را دربر دارد.

این کتاب با نرم‌افزار *TEx* در دانشگاه بوستون توسط تام اوران^{۲۶} تایپ شده است. تایپ تقریباً کامل و شکلی که تام به کتاب داد تولید کتاب را ساده‌تر کرد. همچنین از کریس میبری^{۲۷} برای طراحی شکل‌ها تشکر می‌کنم. درنهایت تشکر ویرهای از ریک میکستر^{۲۸} و کارمندان او در بنجامین-کامینگز^{۲۹} برای حمایت ارزشمندانه در طول این پروژه دارم.

روبرت ال. دوئنی^{۳۰}

بوستون

آوریل ۱۹۸۵

Phil Holmes^{۲۵}
Tom Orowan^{۲۶}
Chris Mayberry^{۲۷}
Rick Mixter^{۲۸}
Benjamin-Cummings^{۲۹}
Robert L. Devaney^{۳۰}

پیش‌گفتار مترجم

سیستم‌های دینامیکی یکی از شاخه‌های ریاضی است که به صورت محض یا کاربردی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. رابرت دوئنی از ریاضی دانانی است که کتابهایی با نشر روان در این گرایش تألیف کرده است. از جمله این کتابها، کتاب An Introduction to Chaotic Dynamics منتشر شده است. این کتاب، برخی از مفاهیم اصلی سیستم‌های دینامیکی را با مثالهای مختلف به صورت ساده بیان می‌کند که برای علاقه‌مندان به این گرایش منبع مناسبی است.

در سیستم‌های دینامیکی، کتابهایی به زبان فارسی تألیف یا ترجمه شده‌اند ولی بنا به دلایلی، برخی از این کتابها پس از اتمام نسخه‌های موجود، تجدیدچاپ نشده‌اند و علاقه‌مندان به این گرایش با کمبود کتاب مرجع مواجه هستند. بنابراین بر آن شدیدم که پس از ترجمه کتاب حاضر، آن را به صورت الکترونیکی منتشر نماییم تا به راحتی قابل دسترسی باشد. شکلهای رنگی این کتاب، از صفحه ۲۹۰ تا صفحه ۲۹۶ با نرم‌افزار Ultra Fractal رسم شده‌اند. سایر شکلها از کتاب اصلی اسکن شده‌اند.

از جناب آقای دکتر احمدی دستجردی و سرکار خانم دکتر مرضیه شمس برای ویراستاری علمی و از جناب آقای دکتر رشیدی برای ویراستار ادبی این کتاب کمال تشکر را دارم. از سرکار خانم مهندس سارا لامعی که تایپ متن کتاب را با نرم‌افزار فارسی تک انجام دادند سپاسگزارم.

ساناز لامعی
تابستان ۱۳۹۶

فصل ۱

دینامیک یک بعدی

هدف فصل اول، معرفی تکنیکهای اساسی نظریه سیستم‌های دینامیکی به ساده‌ترین شکل ممکن است. ازین‌رو، همه سیستم‌های دینامیکی که با آن مواجه می‌شویم یک‌بعدی بوده و روی خط حقیقی و یا روی دایره واحد در صفحه رخ می‌دهند. با داشتن پیش‌زمینهٔ خوبی در حسابان می‌توان قسمت عمده‌ای از این فصل را مطالعه کرد.

دوازده بخش اول این فصل، قسمت مرکزی نظریه سیستم‌های دینامیکی هستند و در آنها مباحثی همچون هذلولوی بودن، دینامیک نمادین، تزویج توبولوژیکی، پایداری ساختاری و آشوب معرفی می‌شوند. اینها پیش‌زمینهٔ اصلی برای مباحث بعدی هستند. درحقیقت، دو فصل آخر کتاب را می‌توان به عنوان گسترش و تظریف موارد ارائه شده در بخش‌های مقدماتی درنظر گرفت.

کار عمده این فصل این است که بینیم رفتار آشوبناک یک سیستم دینامیکی به چه معنی است. این کار را با ارائه مثالهایی انجام می‌دهیم. بنابراین بیشترین توجه‌مان معطوف به خانواده خاصی از مثالها، یعنی خانواده توابع درجه دو $(x - 1)F_\mu(x) = \mu x$ است. سپس با استفاده از قضیه شارکوفسکی و مشتق شوارتسی نشان می‌دهیم که نتایجی که مخصوص توابع درجه دو به نظر می‌رسند، برای دسته‌های گوناگون و بزرگی از سیستم‌های دینامیکی برقرارند.

چهار بخش بعدی این فصل به موضوعات تکنیکی‌تری می‌پردازد. اگرچه مفاهیم معرفی شده (زیرتغییرجاها) از نوع متناهی، توابع مورس-اسمیل، عدد چرخشی و انشعاب هموکلینیک) در ادامه از اهمیت برخوردارند. سه بخش آخر درمورد نظریه آمیختگی و مسیر دوره-دو برابر شونده به آشوب باید به عنوان مباحث خاص، مورد توجه قرار گیرند و از آنها در ادامه استفاده نمی‌شود. اگرچه برای خواننده علاقه‌مند به کارهایی که روی گذر به دینامیکهای آشوبناک انجام شده است، این بخشها به عنوان مقدمه‌ای برای بسیاری از موضوعات در این زمینه است.

۱ مثالهایی از سیستم‌های دینامیکی

این بخش کوتاه صرفاً بر آن است که انگیزه‌ای برای بخشهای بعدی ایجاد کند. قصد ما ارائه دو مثال ساده از سیستم‌های دینامیکی است. این مثالها نشان می‌دهند که چگونه سیستم‌های دینامیکی در "جهان واقعی" رخ می‌دهند و چگونه برخی از پدیده‌های بسیار ساده در طبیعت به سیستم‌های دینامیکی پیچیده‌ای منجر می‌شوند.

ابتدا، یک سیستم دینامیکی چیست؟ جواب بسیار ساده است: عدد کاملاً دلخواهی را در یک ماشین حساب مهندسی وارد کنید. یکی از کلیدهای تابعی آن را بارها و بارها فشار دهید. این روند تکرار، مثالی از یک سیستم دینامیکی گستته است. مثلاً اگر کلید "exp" را پشت سر هم برای داده اولیه x فشار دهیم، دنباله اعداد

$$x, e^x, e^{e^x}, e^{e^{e^x}}, \dots$$

را محاسبه کرده‌ایم. در واقع، در حال تکرار تابع نمایی هستیم. اگر این عمل بارها و بارها انجام شود، دیده می‌شود که هر انتخاب مقدار اولیه x ، به سرعت منجر به پیغام "سرریز" در ماشین حساب می‌شود؛ بدین معنی که تکرارهای متوالی $\exp(x)$ به ∞ میل می‌کند. در حقیقت اصلی‌ترین سوالی که از این پس پرسیده می‌شود این است که برای تابع داده شده f و مقدار اولیه x_0 ، درنهایت چه اتفاقی برای دنباله تکرارهای

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

می‌افتد.

به عنوان مثالی دیگر، $\sin(x)$ را در نظر بگیرید. با چندین بار فشار دادن کلید ماشین حساب می‌توان خواننده را متقادع کرد که هر مقدار اولیه x_0 ، به دنباله‌ای از تکرارها که به صفر میل می‌کند ختم می‌شود. به طور مشابه برای $\cos(x)$ ، هر x_0 دنباله‌ای به دست می‌دهد که نسبتاً سریع به ۰.۷۳۹۰۸... (بر حسب رادیان، یا $\dots ۹۹۹۸۴\circ$ بر حسب درجه) همگراست. ممکن است خواننده گمان کند که تکرارهای یک تابع با مقدار اولیه داده شده، همیشه به دنباله‌ای که به یک حد ثابت (مثل x_0 یا هر حد یکتاپی) همگراست، منجر می‌شود. ولی در واقع این طور نیست. توابع بسیار ساده و حتی ساده‌ترین توابع درجه دو روی خط اعداد حقیقی، تحت تکرار به نتایج عجیب و غیرقابل پیش‌بینی منجر می‌شوند. برای مثال، یک کامپیوتر یا ماشین حساب را برنامه‌ریزی کنید تا تکرارهای تابع ساده $f(x) = 4x(1-x)$ را محاسبه کند. به تصادف عددی بین ۰ و ۱ را انتخاب کرده و نتایج تکرار را مشاهده کنید. بسته به اینکه مقدار اولیه داده شده چه عددی باشد رفتارهای متفاوت و مهیجی دیده می‌شود. گاهی اوقات مقادیر تکرار می‌شوند ولی در سایر مواقع این طور نیست و اغلب

بدون پیروی از الگویی خاص در داخل بازه یکه سرگردان هستند. حال پارامتر را از 4 به 3.839 تغییر دهید یعنی، تکرارهای تابع $(x - 1)^{-f(x)} = 3.839$ را حساب کنید. برای هر داده دلخواه بین 0 و 1 ، تکرارهای این نقطه در نهایت به یک دور روی سه عدد $0.149888\ldots$ ، $0.489172\ldots$ و $0.959299\ldots$ تبدیل می‌شود. دونکته قابل بیان است. مثال اول اثر طبیعی آشوب یا غیرقابل پیش‌بینی بودن را نشان می‌دهد که یکی از موضوعات اصلی این کتاب است. برخلاف پیچیدگی این تابع، خواهیم دید که چطور می‌توان این غیرقابل پیش‌بینی بودن را تحلیل کرد. دوم، آشوب در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی رخ می‌دهد. دومین مثال بالا که در مقایسه با اولی ساده‌تر به نظر می‌آید نیز شامل مجموعه‌ای از نقاط ابتدایی و اولیه x است که رفتار غیرقابل پیش‌بینی همچون مثال اول دارند. اگرچه به علت "گرد کردن" یا خطای تجربی، در نگاه اول تصادفی بودن دیده نمی‌شود. با این وجود، چنانچه در آینده می‌بینیم این مسئله تأثیر مهمی روی سیستم دارد که با بیشتر شدن دقت محاسبات، این تأثیر هم بیشتر می‌شود.

باید دقت کنیم که علاوه بر سیستم‌های دینامیکی حاصل از تکرار توابع، انواع بسیار زیاد دیگری نیز وجود دارند. به عنوان مثال، معادلات دیفرانسیل، مثالهایی از سیستم‌های دینامیکی پیوسته هستند که در مقابل سیستم‌های گستته قرار می‌گیرند. در این کتاب به هیچ وجه با این نوع سیستم‌ها کار نمی‌کنیم چون کار کردن با این سیستم‌ها پس از تسلط یافتن به رفتارهای اساسی سیستم‌های گستته، بسیار ساده است.

اکنون به ذکر چند مثال "کاربردی" می‌پردازیم. سیستم‌های دینامیکی در همه شاخه‌های علوم از معادلات دیفرانسیل مکانیک کلاسیک در فیزیک تا معادلات تفاضلی در ریاضیات مالی و بیولوژی اتفاق می‌افتد. ابتدا یک مدل ساده از جمعیت در بیولوژی را توضیح می‌دهیم که انگیزه‌ای برای موضوعات بیان شده در این فصل است.

زیست‌شناسانی که جمعیت را بررسی می‌کنند به رفتار جمعیتی یک گونه یا مجموعه‌ای از گونه‌ها در مدت زمان طولانی علاقه‌مند هستند. زیست‌شناسان با استفاده از مشاهدات خاص یا با استفاده از پارامترهای مشخص تجربی (از قبیل تعداد شکارچی‌ها، بدی آب و هوای دستری به غذا و غیره) یک مدل ریاضی ارائه می‌دهند که نوسان جمعیت را نشان می‌دهد. بسته به اینکه تغییرات جمعیت به صورت پیوسته یا گسسته در نظر گرفته شود، یعنی اندازه‌گیری جمعیت یک بار در سال یا یک بار در هر نسل صورت گرفته باشد، این مدل ممکن است به شکل یک معادله دیفرانسیل یا یک معادله تفاضلی بیان شود. در هریک از این دو حالت، زیست‌شناسان علاقه‌مند هستند که بدانند چه اتفاقی برای جمعیت اولیه با P_0 اتفاق می‌افتد. آیا با کذشت زمان، مقدار این جمعیت به صفر میل می‌کند یا به طور معادل گونه مورد نظر منقرض می‌شود؟ آیا جمعیت به اندازه دلخواه زیاد می‌شود یا به طور معادل، با ازدحام جمعیت مواجه می‌شود؟ یا اینکه جمعیت به طور منظم یا تصادفی نوسان می‌کند؟ بنابراین مسئله‌ای که این زیست‌شناسان با آن مواجهند یک سوال سیستم‌های دینامیکی نوعی است:

اگر جمعیت P_0 داده شده باشد، آیا می‌توان رفتار جمعیتی آن را در یک مدت طولانی پیش‌بینی کرد؟ انواعی از مدل‌های زیست‌شناسی ساده در درس‌های حسابان ارائه شده است. برای مثال معادله دیفرانسیل رشد یا زوال نمایی، معمولاً اولین معادله دیفرانسیلی است که به دانشجویان داده می‌شود. در این مدل فرض بر آن است که سرعت تغییرات جمعیت یک گونه، با جمعیت در یک زمان داده شده نسبت مستقیم دارد. این مثال، یک مثال کاملاً بدیهی است که در آن مسائلی از قبیل ازدحام جمعیت، سرعت مرگ و ... در نظر گرفته نشده است. در واقع، این مدل یک معادله دیفرانسیل ساده خاص تولید می‌کند که به راحتی حل می‌شود. اگر $P(t)$ جمعیت در زمان t باشد، مفروضات فوق به صورت

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

قابل بیان است. جواب این معادله دیفرانسیل به صورت $P(t) = P_0 e^{kt}$ است که $P_0 = P(0)$ جمعیت اولیه گونه مفروض است. در اینجا اگر ثابت جمعیت مثبت باشد و $t \rightarrow \infty$ ، آنگاه $P(t) \rightarrow \infty$ است. در آن مدل یک معادله دیفرانسیل با افرض گونه موردنظر است.

این روند، کاربردی از سیستم‌های دینامیکی را (در حالت بسیار ساده) در علم نشان می‌دهد. یک زیست‌دان جمعیت‌شناس، یک مدل ریاضی تنظیم می‌کند و از ریاضی دانان خواسته می‌شود که ایده‌ای برای رفتار جوابها برای مدت طولانی ارائه دهنده.

این مدل ساده را می‌توان با یک معادله تفاضلی نیز مطالعه کرد. فرض کنید $P_n = P_n$ جمعیت بعد از n نسل باشد که n عددی طبیعی است. ساده‌ترین قانون رشدی که بتوان در نظر گرفت این است که جمعیت در نسل بعدی نسبت مستقیم با جمعیت حال حاضر داشته باشد؛ یعنی

$$P_{n+1} = kP_n$$

که k یک عدد ثابت است. بنابراین

$$\begin{aligned} P_1 &= kP_0 \\ P_2 &= kP_1 = k^2 P_0 \\ P_3 &= kP_2 = k^3 P_0 \\ &\vdots \\ P_n &= kP_{n-1} = k^n P_0 \end{aligned}$$

که باز هم سرنوشت نهایی جمعیت به راحتی قابل پیش‌بینی است. اگر $1 < k < \infty$ ، آنگاه $P_n \rightarrow \infty$ و اگر $0 < k < 1$ ، آنگاه $P_n \rightarrow 0$.

برای استفاده‌های بعدی، این معادله تفاضلی را به عنوان یکتابع دوباره طرح‌ریزی می‌کنیم. فرض کنید $x = P_0$ و قرار دهید $f(x) = kx$. توجه کنید که در عبارات قبلی، $f(x) = P_1$ ، $f(f(x)) = P_2$ ، $f(f(f(x))) = P_3$ ، $f(f(f(x))) = k^2x = P_2$ و الی آخر. بنابراین به بیان دیگر، رفتار نهایی جمعیت، وابسته به رفتار مجانبی تکرارهای تابع f است.

در هریک از مدل‌های بالا، شرایط نسبتاً ایده‌آل است و به‌طور ذاتی فقط دو امکان وجود دارد. رشد بی‌حد یا انفراض. تجربه زیست‌شناسان نشان داده است که الگوهای بسیار پیچیده‌تری در طبیعت به وجود می‌آید. بنابراین زیست‌شناسان سعی می‌کنند که قیدها یا پارامترهایی را به مدل اضافه کنند تا مدل، بازتاب بهتری از واقعیت باشد. چنین رهیافتی در محاسبات به صورت درنظر گرفتن مقدار محدود کننده L برای جمعیت انجام می‌پذیرد. اگر $P(t)$ بیشتر از L باشد، جمعیت باید کمتر شود (به خاطر از دحام جمعیت، کمبود غذا و غیره). از طرف دیگر اگر $L < P(t)$ ، آنگاه فضای بیشتری برای گونه موجود است پس $P(t)$ باید بیشتر شود. ساده‌ترین مدل زیست‌شناسی که منجر به این رفتار شود، به صورت

$$\frac{dP}{dt} = kP(L - P)$$

است. توجه کنید که ما به سادگی فقط فاکتور $P - L$ را به مدل قبلی ضمیمه کردیم. فرض کنید $1 > k$ ، یعنی حالتی که در مدل قبل به رشد بی‌اندازه منجر می‌شد. در نظر داشته باشید که

$$1. \text{ اگر } \frac{dP}{dt} = 0, P = L$$

$$2. \text{ اگر } \frac{dP}{dt} < 0, P > L$$

$$3. \text{ اگر } \frac{dP}{dt} > 0, P < L.$$

بنابراین محاسبات ابتدایی نشان می‌دهند که این مدل مطابق انتظارمان عمل می‌کند. بسته به اینکه $P = L$ یا $P > L$ یا $P < L$ جمعیت ثابت می‌ماند، کم می‌شود یا زیاد می‌شود. در حقیقت می‌توان معادله دیفرانسیل بالا را جدا کردن متغیرها و انتگرال گرفتن از کسرهای جزئی حل کرد. بنابراین

$$P(t) = \frac{LP_0e^{Lkt}}{L - P_0 + P_0e^{Lkt}}.$$

با استفاده از این فرمول می‌توان جوابهای سیستم را به دست آورد. اگرچه این مدل بیشتر از مدل رشد نمایی با واقعیت تطابق دارد ولی هنوز هیچ رفتار دوری یا نوسانی در جمعیت را توصیف نمی‌کند. ممکن است به سادگی تصور شود که معادله دیفرانسیل متناظر با مدل توصیف کننده جمله اخیر، رفتار مشابهی دارد. در واقع، بسیار شگفت‌انگیز است که معادله

دیفرانسیل معادل با مدل اخیر به یکی از سیستم‌های دینامیکی بسیار پیچیده‌ای که بتوان تصور کرد منجر می‌شود. تا کنون دینامیک این سیستم به طور کامل شناخته نشده است. همچنین این سیستم، بسیاری از مشکلات موجود در سیستم‌های با ابعاد بالاتر را نمایش می‌دهد و به این دلیل به عنوان یکی از اساسی‌ترین سیستم‌های دینامیکی غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. در طول این فصل دوباره به این مثال بر می‌گردیم چون منبع غنی از مثال‌های شهودی را در اختیار ما می‌گذاریم.

مدلمنان را کمی ساده‌تر می‌کنیم. فرض کنید $L = kx$ مقدار قید باشد. در حال حاضر روی جمعیت تمرکز نمی‌کنیم بلکه بیشتر روی درصد جمعیت بحث می‌کنیم. P_n بیانگر درصد جمعیت موجود در نسل n است. بنابراین فرض می‌شود که جمعیت در معادله دیفرانسیل

$$P_{n+1} = kP_n(1 - P_n)$$

صدق می‌کند که k یک ثابت مثبت است. همچون گذشته، $x = P_\circ$ و $f(x) = kx(1 - x)$ معادله درجه دو در نظر گرفته شده در قبل است. داریم

$$\begin{aligned} P_1 &= f(x) \\ P_2 &= f(f(x)) \\ P_3 &= f(f(f(x))), \end{aligned}$$

والی آخر. بنابراین برای تعیین سرنوشت جمعیت برای ثابت داده شده k ، باید رفتار مجانبی تابع $(1 - x)kx$ را تعیین کنیم. این تابع، تابع لجستیک بوده و دینامیک آن مورد تحقیق ریاضی دانان معاصر است. در فصلهای بعدی ما فقط پیچیدگی و مشکلاتی را که از این مثال ساده ناشی می‌شود توضیح می‌دهیم.

مثال دیگری از سیستم دینامیکی که کاربرد عملی دارد روش نیوتون برای یافتن جوابهای یک چندجمله‌ای است. فرض کنید

$$Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

یک چندجمله‌ای باشد. در حالت کلی تجزیه کردن Q هنگامی که درجه Q بالا باشد غیرممکن است. با این وجود، معمولاً در عمل، یافتن ریشه‌ای از Q اهمیت دارد. یک روش برای انجام این عمل، روش بازگشتی کلاسیک نیوتون است. فرض کنید x_\circ یک عدد حقیقی باشد. روابط بازگشتی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_\circ - \frac{Q(x_\circ)}{Q'(x_\circ)} \\ x_2 &= x_1 - \frac{Q(x_1)}{Q'(x_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ x_n &= x_{n-1} - \frac{Q(x_{n-1})}{Q'(x_{n-1})}. \end{aligned}$$

از حسابان می‌دانیم که برای بیشتر انتخابهای مقدار اولیه x_0 ، دنبالهٔ مقادیر x_1, x_2, \dots به یکی از ریشه‌های Q میل می‌کند. برای چند جمله‌ای داده شده Q ، مدل نیوتن یک سیستم دینامیکی تعیین می‌کند. فرض کنید

$$N(x) = x - \frac{Q(x)}{Q'(x)}.$$

تا وقی که $Q' \neq 0$ ، این تابع خوش‌تعریف است. همانند مدل جمعیت، مدل نیوتن نیز قابل تبدیل به تکرارهای N است. دوباره سوال مشابهی وجود دارد: برای x داده شده، محاسبه تکرارهای متوالی بزرگ‌تر از N در x به چه چیزی منجر می‌شود؟ یادآوری می‌کیم که روش نیوتن همیشه همگرا نیست. برای مقدار اولیه خاص x_0 ، روش تکرار به یک ریشه از Q همگرا نمی‌شود. ساختار مجموعه‌ای که تکرارهای N در آن همگرا نیست، بسیار جالب است (به‌ویژه در صفحه مختلط) و به رفتارهای غیرقابل پیش‌بینی همچون تابع لجستیک منجر می‌شود. ما این موضوع را در فصل ۳ بررسی می‌کیم.

۲ مقدماتی از حسابان

در این بخش شماری از موضوعات مقدماتی (و نه خیلی مقدماتی) از حسابان یک‌متغیره و چندمتغیره را یادآوری می‌کنیم. در ادامه به بعضی از نمادگذاریها از توابع‌لوژی عمومی نیاز داریم که آنها را نیز در اینجا گنجانده‌ایم. ابتدا چند نماد را قرارداد می‌کنیم. \mathbb{R} نمایانگر اعداد حقیقی است. بازه‌های I یا J همیشه بیانگر بازه‌های بسته در \mathbb{R} هستند، یعنی تمام نقاطی چون x که برای دو عدد حقیقی a و b در $b \leq x \leq a$ صدق می‌کنند. \mathbb{R}^2 نمایانگر صفحه دکارتی است.

فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow f$: یک تابع باشد. مشتق f' را در x با $(f'(x))$ و مشتق دوم را با $(f''(x))$ و مشتقات بالاتر را با $(f^{(r)}(x))$ نشان می‌دهیم. گوییم تابع f روی I از رده C^r است هرگاه $f^{(r)}(x)$ برای هر $x \in I$ موجود و پیوسته باشد. یک تابع، هموار نامیده می‌شود هرگاه از رده C^1 باشد. تابع $f(x)$ از هرگاه همه مشتقات آن موجود و پیوسته باشند. در این کتاب، تابع به معنی تابع C^∞ است؛ گاهی اوقات در مثالها توابعی به کار می‌بریم که پیوسته هستند ولی مشتق‌پذیر نیستند، ولی عموماً وقتی کلمه تابع را به کار می‌بریم منظورمان تابع C^∞ است.

رده‌های دیگری از توابع موجود است که معمولاً در حسابان مطالعه می‌شوند. برای مثال، اغلب با توابع تحلیلی (یعنی، توابعی که سری توانی آنها به خودشان همگراست) مواجه می‌شویم. این دسته از توابع برای اهداف ما در این فصل از دیدگاه زیر بسیار صلب به نظر می‌رسند. ما به دنبال این هستیم که بتوانیم تغییری کوچک یا اختلالی از تابع دریک بازه خاص ایجاد کنیم بدون اینکه تابع در کل دامنه‌اش تغییر کند. این کار را با تابع برآمدگی انجام می‌دهیم که در تمرینها معرفی می‌شوند. اگر خودمان را به تابع تحلیلی محدود کنیم، انجام این تغییرات کوچک غیرممکن است چون تغییر کوچکی در هریک از ضرایب سری توانی تابع، روی رفتار تابع در کل دامنه‌اش تأثیر می‌گذارد. در فصل سه، هنگامی که درمورد سیستم‌های دینامیکی تحلیلی مختلط بحث می‌کنیم، توجه‌مان را به طور خاص به این دسته از توابع معطوف می‌کنیم.

دسته‌های خاصی از توابع موجودند که مکرر پیش می‌آیند. تابع $f(x)$ خطی است هرگاه برای یک مقدار ثابت a داشته باشیم $f(x) = ax + b$ ؛ آفین است هرگاه $f(x) = ax$ ؛ $f(x) = |x|$ قطعه قطعه خطی است هرگاه $f(x)$ روی دسته‌ای از بازه‌ها آفین باشد. برای مثال، $f(x) = \sin x$ روی هریک از آنها خطی است و این "قطعات" اعداد حقیقی مثبت و منفی هستند که $f(x)$ روی هریک از آنها خطی است.

تعریف ۱.۲ تابع $f(x)$ یک به یک است در صورتی که اگر $y \neq x$ ، آنگاه $f(y) \neq f(x)$.

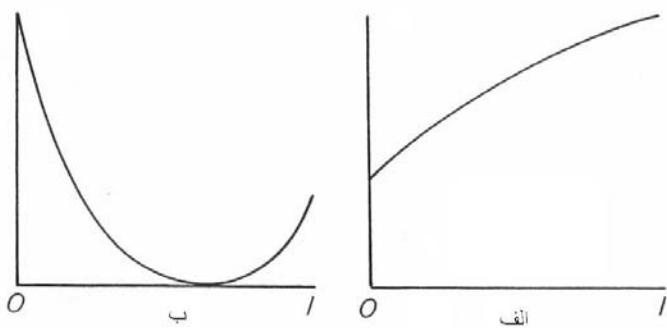
به وضوح تابع صعودی یا نزولی، تنها انواع تابع یک به یک پیوسته از یک متغیر حقیقی هستند. اگر $J \rightarrow I$: یک به یک باشد، آنگاه می‌توان وارون f را با نماد f^{-1} نمایش داده و با قانون $y = f(x)$ اگر و تنها اگر $x = f^{-1}(y)$ تعریف کرد. برای مثال، اگر $f(x) = x^3$ ، آنگاه $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ و اگر $f(x) = \tan(x)$ ، آنگاه $f^{-1}(x) = \arctan(x)$. در اینجا $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: g و g^{-1} : $\mathbb{R} \rightarrow (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ بنابراین.

تعریف ۲.۲ فرض کنید I و J دو بازه بوده و $J \rightarrow I$: f . تابع f پوشاست هرگاه برای هر y در J ، x در I موجود باشد به طوری که $y = f(x)$. شکل ۱.۲ را بینید.

تعریف ۳.۲ فرض کنید $J \rightarrow I$: f . تابع $f(x)$ یک همسان‌ریختی است هرگاه $f(x)$ یک به یک، پوشایی و پیوسته بوده و $f^{-1}(x)$ نیز پیوسته باشد.

برای مثال، $\tan(x)$ یک همسان‌ریختی بین $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و \mathbb{R} است. بنابراین می‌گوییم بازه باز $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ همسان‌ریخت با \mathbb{R} است.

تعریف ۴.۲ فرض کنید $J \rightarrow I$: f . تابع $f(x)$ یک C^r -دیفیومورفیسم است هرگاه $f(x)$ یک C^r -همسان‌ریختی بوده و $f^{-1}(x)$ نیز C^r باشد.



شکل ۱.۲. در الف $f(x)$ روی $[۰, ۱]$ یک به یک است و در ب $(f(x))'$ روی $[۰, ۱]$ پوشاست.

برای مثال، به سادگی دیده می‌شود که $\tan(x)$ یک C^∞ -دیفیومورفیسم از $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ به \mathbb{R} است در حالی که $f(x) = x^3$ همسان ریختنی‌ای است که دیفیومورفیسم نیست چون $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ و $(f^{-1})'(0)$ موجود نیست.

در فصل‌های بعد خواهیم دید که دیفیومورفیسم‌ها روی محور حقیقی، دینامیک بسیار ساده‌ای دارند. بنابراین در این فصل ابتداء توابع وارون ناپذیر را در نظر می‌گیریم. در ابعاد بالاتر دیفیومورفیسم‌ها بسیار جالب‌تر می‌شوند و بنابراین از دیدگاه نظریه سیستم‌های دینامیکی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند.

ترکیب دو تابع را با $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ نمایش می‌دهیم. در ادامه، ترکیبات f با خودش را در نظر می‌گیریم و این تابع را با $f^n(x) = f \circ \dots \circ f(x)$ نشان می‌دهیم که نماینده n بار ترکیب f با خودش است. توجه کنید که به معنی $f^n(x)$ به توان n نیست و ما f^n را هرگز به این مفهوم به کار نخواهیم برد. همچنین به معنای مشتق n ‌ام هم نیست چون آن را با $(f^{(n)}(x))$ نشان می‌دهیم. اگر f^{-1} موجود باشد، آنگاه می‌نویسیم $(f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1})(x) = f^{-n}(x)$.

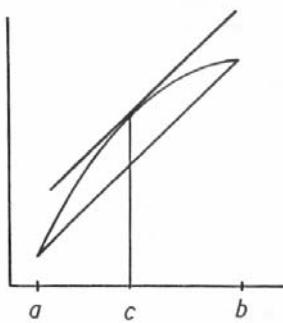
شاید مهم‌ترین قسمتی از حسابان که از آن استفاده می‌کنیم قاعده زنجیری باشد:

تعریف ۵.۲ اگر f و g دو تابع باشند، آنگاه

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

به ویره، اگر $h(x) = f^n(x)$

$$h'(x) = f'(f^{n-1}(x)) \cdot f'(f^{n-2}(x)) \cdot \dots \cdot f'(x).$$



شکل ۲.۲. قضیه مقدار میانگین.

قضیه مقدار میانگین یکی دیگر از قضایای مهم حسابان است:

قضیه ۶.۲ فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع C^1 باشد. در این صورت $c \in [a, b]$ موجود است به طوری که

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

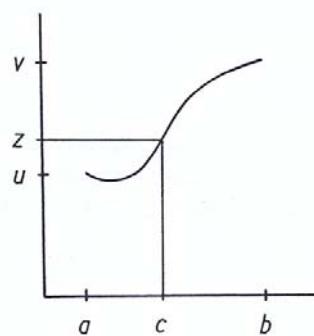
شکل ۲.۲ مضمون قضیه مقدار میانگین را نشان می‌دهد. سومین قضیه مهم از حسابان قضیه مقدار میانی است:

قضیه ۷.۲ فرض کنید $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد. فرض کنید $f(a) = u$ و $f(b) = v$. در این صورت برای هر z بین u و v ، عددی c وجود دارد که $a \leq c \leq b$ باشد و $f(c) = z$.

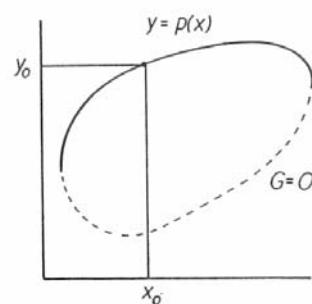
یکی از قضیه‌های مجرد و به‌ظاهر غیرقابل استفاده در حسابان چندمتغیره، قضیه تابع ضمنی است. اکثر دانشجویان مبتدی هنگامی که اولین بار با این قضیه در آنالیز مواجه می‌شوند ارزش این قضیه قدرتمند را نمی‌دانند. امیدواریم که نتایج هندسی در نظریه انشعاب که در آینده با آن مواجه می‌شویم تصوراً اشتباه در مورد غیرمفید بودن این قضیه را برطرف کند.

قضیه ۸.۲ فرض کنید $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ یک تابع C^1 باشد (یعنی، هر دو مشتق جزئی G موجود و پیوسته باشند). علاوه بر آن، فرض کنید

$$G(x_0, y_0) = 0. \quad .1$$



شکل ۳.۲. قضیه مقدار میانی.



شکل ۴.۲. قضیه تابع ضمنی.

$$\cdot \frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 . \quad ۲$$

آنگاه بازه‌های بازی چون I حول x_0 و J حول y_0 و تابعی C^1 چون $p : I \rightarrow J$ موجودند به طوری که

$$p(x_0) = y_0 ; \quad ۱$$

$$G(x, p(x)) = 0, \quad x \in I . \quad ۲$$

به جای بیان برهان قضیه تابع ضمنی، چند مثال برای دیدن چگونگی استفاده از آن ارائه می‌دهیم.
اگرچه این مثالها بهوضوح ساختگی هستند ولی همان‌طورکه در آینده می‌بینیم عمومیت دارند.

مثال ۹.۲ فرض کنید $G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. بهوضوح خطوط نراز G ، دوازیر هستند و D دایره یکه در صفحه را مشخص می‌کند.

فرض کنید $G(x_0, y_0) = 0$ و $y_0 > 0$; یعنی، (x_0, y_0) نقطه‌ای روی نیم‌دایره بالاًی یا پایینی است. از این‌رو،

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0.$$

بنابراین می‌توان از قضیه تابع ضمنی استفاده کرد. نتیجه، تابعی چون $p(x)$ است که برای همه x ‌های نزدیک به x_0 در $0 < y < p(x)$ صدق می‌کند. $p(x)$ چیست؟ در این حالت می‌توانیم $p(x)$ را به طور دقیق بسازیم. به روشنی، $p(x) = \sqrt{1 - x^2}$ که به جز در $x \neq \pm 1$ وقتی $y = 0$ است. برای $|x| < 1$ ، قضیه تابع ضمنی تضمین می‌کند که $G(x, \sqrt{1 - x^2}) = 0$. اگر $y < 0$ ، آنگاه باید $G(x, -\sqrt{1 - x^2}) = 0$ را انتخاب کنیم.

مهم است که بدانیم در عمل، معمولاً نمی‌توان تابع $p(x)$ را به این صورت که ما اینجا انجام دادیم، به دست آورد. با این وجود، قضیه تابع ضمنی وجود آن را (خواه بتوانیم آن را به صورت دقیق پیدا کنیم یا نه) تضمین می‌کند و این دقیقاً چیزی است که لازم داریم.

مثال ۱۰.۲ نگاشت ۱۰.۲ در $G(x, y) = x^5 y^4 - xy^5 - yx^2$ و $G(1, 1) = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(1, 1) = -2$$

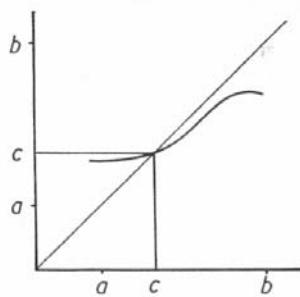
صدق می‌کند. بنابراین تابعی چون $p(x)$ روی بازه‌ای حول $x = 1$ موجود است و در $0 < y < p(x)$ صدق می‌کند. اگرچه حل $G(x, y) = 0$ بر حسب $y = p(x)$ غیرممکن است.

نقاط ثابت برای توابع، نقاطی چون $x = f(x)$ هستند. این نقاط نقش برجسته‌ای در نظریه سیستم‌های دینامیکی دارند. کاربرد ساده زیر از قضیه مقدار میانی، معیار بسیار مهمی برای وجود یک نقطه ثابت ارائه می‌دهد. شکل ۵.۲ را ببینید.

قضیه ۱۱.۲ فرض کنید $I = [a, b]$ یک بازه و $f : I \rightarrow I$ تابع پیوسته‌ای باشد. آنگاه f حداقل یک نقطه ثابت در I دارد.

برهان: قرار دهید $x = f(x) - g(x)$. در این صورت، $(x, g(x))$ روی I پیوسته است. فرض کنید $a < b$ و $f(b) < g(b)$ (در غیراین صورت یکی از نقاط a یا b نقطه ثابت است). بنابراین $f(a) > g(a) > g(b)$ و درنتیجه طبق قضیه مقدار میانی نقطه‌ای چون c بین a و b هست که $f(c) = g(c) = c$. بنابراین $f(c) = c$ و حکم ثابت می‌شود. \square

این قضیه حالت خاصی از قضیه کلی‌تری است که قضیه نقطه ثابت براوئر نامیده می‌شود که شرایط کافی مشابهی برای وجود نقطه ثابت در ابعاد بالاتر ارائه می‌دهد. اگر تابع، مشتق پذیر هم باشد می‌توان نتایج بهتری نیز گرفت. نتیجه زیر حالت خاصی از قضیه نگاشت انقباض است.

شکل ۵.۲. $f: I \rightarrow I$ دارای حداقل یک نقطه ثابت است.

قضیه ۱۲.۲ فرض کنید $I \rightarrow I : f$ تعریف شده باشد و برای همه x ها در I ، $|f'(x)| < 1$ در این صورت یک نقطه ثابت یکتا برای f در I وجود دارد. علاوه بر آن، برای همه $x, y \in I$ که $x \neq y$ داریم

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

برهان. قضیه ۱۱.۲، وجود حداقل یک نقطه ثابت را برای f تضمین می‌کند. بنابراین فرض می‌کنیم x و y که $x \neq y$ دو نقطه ثابت برای f باشند. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، c ای بین a و b هست به طوری که

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1.$$

ولی این، با فرضمان که برای همه c ها در I ، $|f'(c)| < 1$ در تناقض است. بنابراین $y = x$. برای اثبات دومین ادعا در این قضیه، دوباره از قضیه مقدار میانگین برای نشان دادن اینکه برای هر $x \neq y$ که $x, y \in I$

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)||y - x| < |y - x|$$

استفاده می‌کیم و حکم اثبات می‌شود. \square

این بخش را با چند تعریف از تپیکلوزی عمومی به پایان می‌رسانیم. معمولاً، این مباحث فراتر از حوزه دروس حسابان هستند. بیشتر آنها ساده‌ترین حالت را روی محور اعداد حقیقی دارند و این همان چیزی است که ما با آن سروکار داریم.

تعریف ۱۳.۲ فرض کنید $S \subset \mathbb{R}$. یک نقطه حدی برای S است هرگاه دنباله‌ای از نقاط چون $x_n \in S$ موجود باشد که به x همگرا شود. یک مجموعه بسته است هرگاه شامل همه نقاط حدی اش باشد.

به روشنی بازه‌های بسته به شکل $x \leq b \leq a$ ، مجموعه‌های بسته هستند. اجتماع هر تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته، مجموعه‌ای بسته است. ولی همان‌گونه که در مثال بعدی نشان می‌دهیم اجتماع نامتناهی از مجموعه‌های بسته لزوماً بسته نیست.

مثال ۱۴.۲ فرض کنید $I_n = [\frac{1}{n}, 1]$. در این صورت

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = (0, 1]$$

بسته نیست چون \circ که نقطه حدی S است در S قرار نگرفته است.

اشتراک مجموعه‌های بسته، مجموعه‌های بسته هستند (طبق تعریف، مجموعه تهی نیز یک مجموعه بسته است). علاوه‌بر آن، هرگاه به ازای n ای، I_n بازه‌ای بسته، ناتهی و کران‌دار بوده و $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ، آنگاه $I_{n+1} \subset I_n$ مجموعه‌ای بسته و ناتهی است. نکته مهم مسلماً، ناتهی بودن است.

تعریف ۱۵.۲ فرض کنید $S \subset \mathbb{R}$. مجموعه S یک مجموعه باز است هرگاه برای هر $x \in S$ ، $\epsilon > 0$ موجود باشد به طوری که همه نقاط t در بازه $x + \epsilon < t < x - \epsilon$ مشمول در S باشند.

واضح است که متمم یک مجموعه بسته، یک مجموعه باز است و برعکس. برخلاف مجموعه بسته، اجتماع نامتناهی از مجموعه‌های باز، مجموعه‌های باز در \mathbb{R} هستند. اگرچه اشتراک نامتناهی از بازه‌های باز، مجموعه‌های باز نیستند. برای مثال اگر $J_n = \left(0, -\frac{1}{n}\right)$ باشد، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} J_n = \{0\}$ ، که بسته است.

برای هر مجموعه S ، بستار S را با \overline{S} نشان می‌دهیم. مجموعه \overline{S} شامل همه نقاط S و همه نقاط حدی S است. برای مثال اگر S باز باز $(0, 1)$ باشد، آنگاه \overline{S} بازه بسته $[0, 1]$ است. به روشنی، اگر S بسته باشد، آنگاه $\overline{S} = S$.

تعریف ۱۶.۲ زیرمجموعه U از S در S چگال است هرگاه $\overline{U} = S$.

برای مثال هر مجموعه باز S در بستارش \overline{S} چگال است. مثال جالب‌تر، مجموعه اعداد گویای \mathbb{Q} است که در \mathbb{R} چگال است. به طور مشابه اعداد گنگ نیز در \mathbb{R} چگالند. تأکید می‌کنیم تصویر نشود که مجموعه‌های چگال لزوماً مجموعه‌های بزرگی هستند. حتی مجموعه‌های باز و چگال هم ممکن است از نظر کل طولشان، بسیار کوچک باشند. در اینجا مثالی در بازه یکه $1 \leq x \leq 0$ ارائه می‌دهیم.

از آنجا که اعداد گویا، یک مجموعه شمارا در I هستند. می‌توانیم آنها را با ترتیبی کنارهم قرار دهیم.
یک چنین ترتیبی به صورت

$$\dots, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \dots$$

است. حال فرض کنید $\epsilon > 0$ عدد کوچکی باشد. بازه‌ای به طول ϵ^n حول n امین عدد گویا را در این فهرست در نظر بگیرید. اجتماع همه این بازه‌ها یک مجموعه باز در I است و از آنجا که شامل همه اعداد گویا در I است، در این بازه چگال است. البته کل طول این مجموعه بسیار کوچک است. این طول به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n = \frac{\epsilon}{1-\epsilon}$$

به دست می‌آید. این مثال به وضوح تفاوت رهیافت توپولوژیکی به سیستم‌های دینامیکی که از این پس از آن استفاده می‌کنیم و رهیافت نظریه اندازه را مشخص می‌کند. از دیدگاه توپولوژیکی، یک زیرمجموعه باز و چگال، "بزرگ" است. ولی این مجموعه‌ها ممکن است از دیدگاه نظریه اندازه، یعنی، از نظر طول بزرگ باشند یا نباشند.

تمرین.

۱. کدام‌یک از توابع زیر در دامنه تعریف خود یک‌به‌یک، پوشان، همسان‌ریختی یا دیفیومorfیسم هستند؟

الف. $f(x) = x^{\frac{5}{3}}$

ب. $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$

ج. $f(x) = 3x + 5$

د. $f(x) = e^x$

ه. $f(x) = \frac{1}{x}$

و. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

۲. کدام‌یک از زیرمجموعه‌های زیر از \mathbb{R} ، بسته، باز، یا نه بسته و نه باز هستند؟

الف. $\{x \mid x \text{ یک عدد صحیح است}\}$

ب. $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ یک عدد گویاست :

ج. $\{x \mid x = \frac{1}{n}\}$ یک عدد طبیعی است و :

د. $\{x \mid \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$

ه. $\{x \mid x \sin(\frac{1}{x}) = 0\}$

و. $\{x \mid \sin(\frac{1}{x}) > 0\}$

۳. نشان دهید مجموعه اعداد گویا از نوع $\frac{p}{q^n}$ که $p, n \in \mathbb{Z}$ در \mathbb{R} چگال است.

هدف چند تمرین بعدی ساختن توابع خاصی است که در آینده هنگامی که تابعی را کمی دچار اختلال کنیم یا تغییر کوچکی در آن ایجاد کنیم استفاده می‌شوند. این توابع، "تابع برآمدگی" نامیده می‌شوند. قرار دهید

$$B(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2) & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

۴. نمودار $B(x)$ را رسم کنید.

۵. نشان دهید $B'(0) = 0$.

۶. با استقراء نشان دهید که به ازای هر $n \in \mathbb{N}$. نتیجه بگیرید که $B(x)$ یک تابع C^∞ است.

۷. تابع $B(x)$ را طوری تغییر دهید که به یک تابع $C(x)$ با خواص زیر تبدیل شود.

الف. اگر $x \leq 0$, $C(x) = 0$

ب. اگر $x \geq 1$, $C(x) = 1$

ج. اگر $0 < x < 1$, $C(x) = x$

۸. تابع $C(x)$ را طوری تغییر دهید که به تابع برآمدگی $D(x)$ چون C^∞ روی بازه $[a, b]$ تبدیل شود. یعنی، $D(x)$ دارای خواص زیر باشد.

الف. به ازای هر $a \leq x \leq b$, $D(x) = 1$

ب. برای $x < a$ و $x > b$ داشته باشیم $D(x) = 0$

ج. روی بازه‌های (α, a) و (b, β) ، $D'(x) \neq 0$.

۹. از یک تابع برآمدگی برای ساختن دیفیومورفیسم $[a, b] \rightarrow [c, d]$ با شرایط $f(b) = d$ و $f(a) = c$ ؛ $f'(a) = f'(b) = 1$ استفاده کنید.

۳ تعاریف اولیه

هدف اصلی نظریه سیستم‌های دینامیکی دریافت رفتار نهایی یا مجانبی یک روند تکرارشونده است. اگر این روند یک معادله دیفرانسیل باشد که متغیر مستقل آن زمان است، آنگاه این نظریه سعی می‌کند رفتار نهایی جوابهای معادله دیفرانسیل را در آینده دور ($t \rightarrow \infty$) یا در گذشته دور ($t \rightarrow -\infty$) پیش‌بینی کند. اگر روند، یک روند گسته همانند تکرارهای یک تابع باشد، آنگاه این نظریه سعی می‌کند رفتار نهایی نقاط $x, f(x), f^2(x), \dots$ و $f^n(x)$ را برای n های بزرگ دریابد. در واقع سیستم‌های دینامیکی، سوالی که تا حدی غیرریاضی است می‌پرسد: نقاط به کجا می‌روند و وقتی به آنجا رسیدند چه می‌کنند؟ در این فصل سعی می‌کنیم به این سوال حداقل به طور خاص برای ساده‌ترین رده از سیستم‌های دینامیکی یعنی توابع با یک متغیر حقیقی پاسخ دهیم. توابعی که سیستم‌های دینامیکی را مشخص می‌کنند "نگاشت" یا "تصویر کردن" نامیده می‌شوند. این اصطلاح به روند هندسی بردن یک نقطه به نقطه دیگر اشاره دارد. از آنجا که ما در ادامه بیشتر از هندسه استفاده می‌کنیم، همه این واژه‌های متراff را به کار می‌بریم.

تعریف ۱.۳ مدار پیشروی x ، مجموعه نقاط $x, f(x), f^2(x), \dots$ است و آن را با O^+ نشان می‌دهیم. اگر f همسان‌ریختی باشد، می‌توانیم کل مدار x ، یعنی $O(x)$ متشکل از نقاط $f^n(x)$ که $n \in \mathbb{Z}$ را تعریف کنیم. مدار پسروی x ، یعنی، O^- به صورت مجموعه نقاط $x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots$ تعريف می‌شود.

بنابراین هدف اصلی ما این است که همه مدارهای یک نگاشت را بشناسیم. مدارها و مدارهای پیشروی نقاط، حتی برای نگاشتهای خیلی سادهٔ غیرخطی می‌توانند بسیار پیچیده باشند. اگرچه مدارهایی هم وجود دارند که به شکل خاصی ساده‌اند و نقشی اساسی در کل سیستم ایفا می‌کنند.

تعریف ۲.۳ نقطه x یک نقطه ثابت برای f است هرگاه $f(x) = x$. نقطه x یک نقطه متناوب با تناوب n است هرگاه $f^n(x) = x$. کوچک‌ترین n مثبتی که برای آن $f^n(x) = x$ باشد تناوب اولیه x نامیده می‌شود. مجموعه نقاط متناوب با تناوب n (نه لزوماً با تناوب اولیه n) را با $\text{Per}_n(f)$ و مجموعه نقاط ثابت را با $\text{Fix}(f)$ نشان می‌دهیم. مجموعه همه تکرارهای یک نقطه متناوب یک مدار متناوب تشکیل می‌دهد.

نگاشت‌ها ممکن است نقاط ثابت زیادی داشته باشند. برای مثال، نگاشت همانی $\text{id}(x) = x$ همه نقاط \mathbb{R} را ثابت نگه می‌دارد، درحالی که نگاشت $f(x) = -x$ فقط مبداء مختصات را ثابت نگه می‌دارد و بقیه نقاط از تناوب ۲ هستند. این نوع سیستم‌های دینامیکی معمول نیستند؛ نگاشتهایی که در آنها مجموعه نقاط یک بازه، ثابت یا متناوب باشد به مفهومی که در آینده آن را دقیق معین می‌کنیم به ندرت اتفاق می‌افتد. اکثر سیستم‌های دینامیکی که ما با آنها مواجه می‌شویم دارای نقاط متناوب تنها هستند.

مثال ۳.۳ نگاشت $x^3 = f(x)$ دارای نقاط ثابت $1, 0$ و -1 بوده و هیچ نقطه متناوب دیگری ندارد. نگاشت $P(x) = x^{\frac{1}{3}}$ دارای نقاط ثابت $1^{\pm\sqrt[3]{5}}$ و نقاط متناوب 0 و -1 با تناوب ۲ است.

مثال ۴.۳ فرض کنید S^1 دایره واحد در صفحه باشد. هر نقطه از S^1 را با زاویه θ در مقیاس رادیان که به صورت استاندارد اندازه‌گیری می‌شود نشان می‌دهیم. بنابراین هر نقطه به‌وسیله زاویه‌ای به شکل $\theta + 2k\pi$ که k عددی صحیح است نمایش داده می‌شود. حال قرار می‌دهیم $f(\theta) = 2\theta$. (توجه کنید که روی دایره، $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$). بنابراین تابع خوش‌تعیف است). حال $f^n(\theta) = 2^n\theta$ درنتیجه θ دارای تناوب n است اگر و تنها اگر برای عدد صحیح k ، $2^n\theta = \theta + 2k\pi$ یعنی، اگر و تنها اگر برای عدد صحیح $2^n - k \leq 0$ داشته باشیم $\frac{2k\pi}{2^n} = \theta$. بنابراین نقاط با تناوب n برای f ، ریشه‌های $(1 - 2^n)^m$ هستند. درنتیجه مجموعه نقاط متناوب در S^1 چگال هستند. تمرین ۱۰ را ببینید.

تعریف ۵.۳ نقطه x نهایتاً متناوب با تناوب n است، اگر x متناوب نباشد ولی $0 > m$ موجود باشد به طوری که برای همه $i \geq m$ داشته باشیم $f^{n+i}(x) = f^i(x)$. به این معنی که $f^i(x)$ برای m متناوب است.

مثال ۶.۳ فرض کنید $x^2 = f(x)$. در این صورت $1 = f(1)$ نقطه ثابت است درحالی که نقطه -1 با توجه به $1 = f(-1)$ نهایتاً ثابت است.

مثال ۷.۳ فرض کنید $f(\theta) = 2\theta$ روی دایره تعیف شده باشد. توجه کنید که $0 = f(0)$ نقطه ثابت است. اگر $\frac{2k\pi}{2^n} = \theta$ ، آنگاه $f^n(\theta) = 2k\pi$ نهایتاً ثابت است. نتیجه می‌شود که نقاط نهایتاً ثابت نیز در S^1 چگال هستند. تمرین ۱۱ را ببینید.

توجه کنید که نقاط نهایتاً متناوب نمی‌توانند برای یک نگاشت همسان‌ریختی رخ دهند.

تعریف ۸.۳ فرض کنید نقطه p دارای تناوب n باشد. نقطه x پیشرو مجانبی به نقطه p است هرگاه $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{in}(x) = p$. مجموعه پایدار p که آن را با $W^s(p)$ نشان می‌دهیم، شامل تمام نقاط پیشرو مجانبی به نقطه p است.

اگر p یک نقطه غیرمتناوب باشد، نقاط پیش رو مجانبی را به صورت $\rightarrow |f^i(x) - f^i(p)| \rightarrow \infty$ هنگامی که i تعریف می کنیم. همچنین، اگر f وارون پذیر باشد، نقاط پسرو مجانبی را می توانیم با قرار دادن $\infty \rightarrow i$ در تعریف بالا در نظر بگیریم. مجموعه نقاط نهایتاً پسرو به p ، مجموعه ناپایدار p نامیده می شود و آن را با $(p)W^u$ نشان می دهیم.

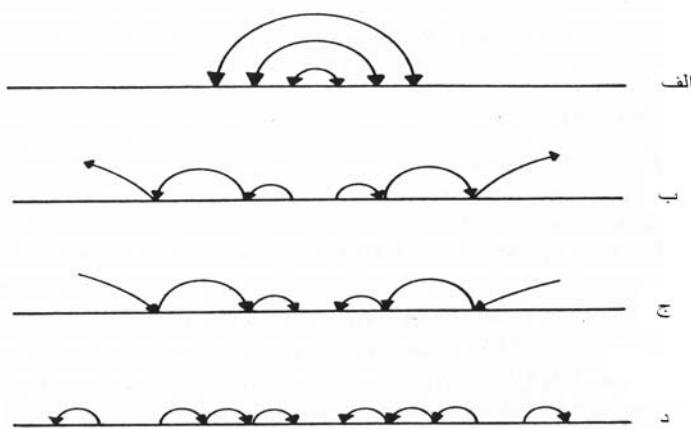
مثال ۹.۳ فرض کنید $x = f(x)$. در این صورت $(\circ)W^s$ ، بازه باز $1 < x < 1$ است. مجموعه $(1)W^u$ قسمت مثبت محور حقیقی است، در حالی که $(-1)W^u$ قسمت منفی محور حقیقی است.

تعریف ۱۰.۳ نقطه x یک نقطه بحرانی f است هرگاه $f'(x) = 0$. نقطه بحرانی، یک نقطه ناتبهگون است هرگاه $f''(x) \neq 0$. یک نقطه بحرانی تبهگون است هرگاه $f''(x) = 0$ باشد.

برای مثال $x^2 = f(x)$ دارای نقطه بحرانی ناتبهگون در 0 است، در حالی که $x^n = f(x)$ برای $n > 2$ دارای نقطه بحرانی تبهگون در 0 است. توجه کنید که نقاط بحرانی ممکن است نقاط ماکسیمم، مینیمم یا عطف باشند (همانند آنچه در $x^3 = f(x)$ داشتیم). ولی نقاط بحرانی ناتبهگون حتماً باید ماکسیمم یا مینیمم باشند. نقاط بحرانی نمی توانند برای دیفرانسیل ها اتفاق بیفتند، ولی وجود آنها برای نگاشتهای وارون ناپذیر یکی از دلایلی است که چرا این گونه نگاشتها پیچیدگی بیشتری دارند.

هدف سیستم های دینامیکی دریافتمن طبیعت همه مدارها و دسته بندی مجموعه نقاط متناوب، نهایتاً متناوب، مجانبی وغیره است. در حالت کلی، این کار امکان پذیر نیست. برای مثال اگر $f(x) = x$ یک چندجمله ای درجه دو باشد، آنگاه یافتن دقیق نقاط متناوب از متناوب n ، مستلزم حل معادله $f^n(x) = x$ است که یک چندجمله ای از درجه 2^n است. کامپیوتر نمی تواند کمک زیادی در این زمینه کند چون محاسبات عددی نقاط متناوب معمولاً دارای خطاست. گرد کردن خطها روی هم جمع شده و بسیاری از نقاط متناوب از دید کامپیوتر پنهان می مانند. درنتیجه فقط می توانیم از تکنیکهای کیفی یا هندسی برای شناختن دینامیک سیستم داده شده استفاده کنیم. این بدین معنی است که ما باید به تصویر هندسی رفتار همه مدارهای یک سیستم نگاه کنیم. این تصویر هندسی به وسیله نمای فاز میسر است که اکنون درمورد آن بحث می کنیم.

نمودار یک تابع در حقیقت اطلاعاتی از اولین تکرار آن به دست می دهد ولی درمورد تکرارهای بعدی اطلاعات بسیار کمی دارد. برای دیدن تکرارهای بالاتر می توانیم نمودارهای آن را رسم کنیم ولی این روند بسیار طاقت فرساست. یک روش هندسی بسیار کارآمدتر برای توصیف مدارهای یک سیستم دینامیکی موجود است که نمای فاز نامیده می شود که تصویری از همه مدارهای یک سیستم روی خط حقیقی به جای صفحه به دست می دهد. برای مثال، برای نشان دادن اینکه همه مدارهای ناصفر $x = f(x)$ دارای متناوب 2 هستند می توانیم مانند شکل ۱۰.۳.الف نمای فاز را رسم کنیم. این شکل همچنین نمای فاز بعضی از نگاشتهای ساده دیگر را نمایش می دهد.

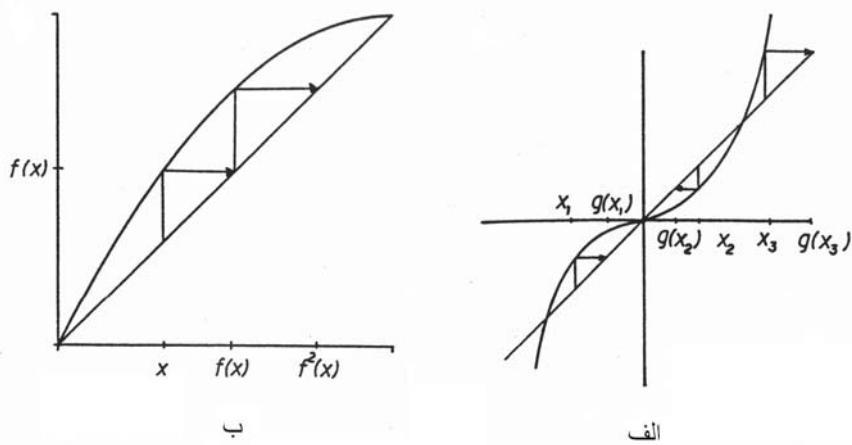


شکل ۱.۳. نمای فاز الف، ب، ج، د؛ $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = -x$, $f(x) = 2x$

نمودار $f(x)$ مسلماً شامل اطلاعاتی درمورد اولین تکرار f است. ما از آن برای به دست آوردن دیدگاهی برای تکرارهای بالاتر و همچنین به دست آوردن نمای فاز، با استفاده از روند زیر استفاده می کنیم و آن را تحلیل نموداری می نامیم. قطر $\Delta = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}\}$ را به صورت طبیعی با \mathbb{R} یکی می کنیم. خط عمودی رسم شده از نقطه (p, p) به نمودار f ، این نمودار را در نقطه $(p, f(p))$ قطع می کند. سپس، خط افقی از نقطه $(p, f(p))$ به Δ ، قطر را در نقطه $(f(p), f(p))$ قطع می کند. بنابراین خط افقی به سمت Δ و پس از آن خط عمودی به سمت نمودار، تصویر نقطه p تحت نگاشت f را روی قطر نمایش می دهد. درنتیجه می توانیم نمای فاز نگاشت را به جای محور x ها، روی قطر در نظر بگیریم. در این صورت می توانیم یک مدار را با کشیدن مکرر خطوط عمودی از Δ به نمودار و سپس خطوط افقی از نمودار به Δ به دست آوریم. شکل ۲.۳ این روند را برای $f(x) = x^3$ و $f(x) = 2x - x^2$ نشان می دهد.

دیفیومorfیسم های روی دایره، رده جالبی از نگاشتها را تشکیل می دهند که تا حدودی با نگاشتها روی \mathbb{R} تفاوت دارند. مثال زیر، مثالی از این دسته است.

مثال ۱۱.۳ برای $\theta \in \mathbb{R}$ قرار دهید $f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(2\theta)$. توجه کنید f دارای نقاط ثابتی در 0° , $\frac{\pi}{4}^\circ$, π° و $\frac{3\pi}{4}^\circ$ است. در حالی که $f'(\pi) = 1 + 2\epsilon < 1$ و $f'(\frac{3\pi}{4}) = 1 - 2\epsilon < 1$ ، آنگاه پس 0° و π° نقاط ثابت دافع و $\frac{\pi}{4}^\circ$ و $\frac{3\pi}{4}^\circ$ جاذب هستند. در حالت کلی، اگر $\frac{1}{N} < \epsilon < 1$ ، آنگاه N نقطه ثابت جاذب و N نقطه ثابت دافع است که به تناب ر روی دایره قرار دارند.

شکل ۲.۳. تحلیل نموداری الف و ب $f(x) = 2x - x^2$ و $g(x) = x^3$

نمای فاز این نگاشتهای در شکل ۲.۳ رسم شده است. دسته مهم دیگری از نگاشتهای روی دایره نگاشتهای انتقال هستند.

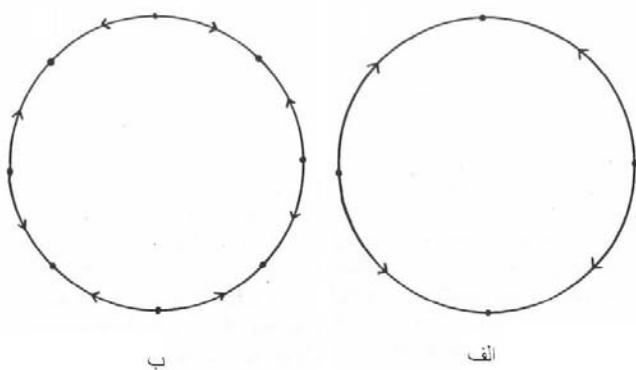
مثال ۱۲.۳ انتقالهای روی دایره. فرض کنید $\lambda \in \mathbb{R}$ و $T_\lambda(\theta) = \theta + 2\pi\lambda$. نگاشتهای T_λ بسته به اینکه λ گویا یا گنگ باشد رفتارهای کاملاً متفاوتی دارند. اگر $\frac{p}{q} = \lambda$ ، که p و q اعداد صحیح هستند، آنگاه $T_\lambda^q(\theta) = \theta + 2\pi p$ ثابت می‌مانند. هنگامی که λ گنگ باشد، وضعیت کاملاً متفاوت است. نتیجه زیر به عنوان قضیه زاکوی معروف است.

قضیه ۱۲.۳ اگر λ گنگ باشد، همه مدارهای T_λ در S^1 چگال هستند.

برهان: فرض کنید $\theta \in S^1$. نقاط مدار θ مجرزا هستند چون اگر $T_\lambda^n(\theta) = T_\lambda^m(\theta)$ ، باید داشته باشیم $(n-m)\lambda \in \mathbb{Z}$ و درنتیجه $n = m$. هر مجموعه نامتناهی از نقاط روی دایره دارای یک نقطه حدی است. بنابراین برای $\epsilon > 0$ داده شده اعداد صحیح n و m موجودند به‌طوری که

$$|T_\lambda^n(\theta) - T_\lambda^m(\theta)| < \epsilon. \quad \text{قرار دهید } k = n - m. \quad \text{دراین صورت } |T_\lambda^k(\theta) - \theta| < \epsilon.$$

نگاشت T_λ روی S^1 حافظ طول است. درنتیجه $T_\lambda^k(\theta)$ کمان واصل بین θ و $T_\lambda^k(\theta)$ را به کمان واصل بین $T_\lambda^{2k}(\theta)$ و $T_\lambda^k(\theta)$ که دارای طولی کمتر از ϵ است می‌نگارد. به‌ویژه، نتیجه می‌شود که نقاط $T_\lambda^{2k}(\theta), T_\lambda^{4k}(\theta), \dots, T_\lambda^{2^k k}(\theta)$ را به کمانهایی با طول کمتر از ϵ افزایی کند. از آنجا که ϵ دلخواه است حکم به‌دست می‌آید. \square

شکل ۳.۳. نمای فاز الف و ب $f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(4\theta)$ و $f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(2\theta)$

تمرین.

۱. از یک ماشین حساب برای محاسبه تکرارهای توابع زیر استفاده کنید (با یک مقدار اولیه دلخواه شروع کنید) و نتایج را توضیح دهید.

الف. $C(x) = \cos(x)$

ب. $S(x) = \sin(x)$

ج. $E(x) = e^x$

د. $F(x) = \frac{1}{e}e^x$

ه. $A(x) = \arctan(x)$

۲. با استفاده از نمودار تابع، نقاط ثابت نگاشتهای تمرین قبل را مشخص کنید.

۳. نقاط متناوب هریک از نگاشتهای زیر را مشخص کنید. سپس با استفاده از نمودار $f(x)$ ، نمای فاز $f(x)$ را روی بازه داده شده رسم کنید.

الف. $-\infty < x < \infty, f(x) = -\frac{1}{2}x$

ب. $-\infty < x < \infty, f(x) = -3x$

ج. $0^\circ \leq x \leq 1^\circ, f(x) = x - x^2$

د. $0^\circ \leq x \leq \pi, f(x) = \frac{\pi}{\varphi} \sin x$

۵. $-\infty < x < \infty$ ، $f(x) = -x^3$.

و. $-1 \leq x \leq 1$ ، $f(x) = \frac{1}{7}(x^3 + x)$.

۴. مجموعه‌های پایدار هریک از نقاط ثابت نگاشتهای تمرین قبل را مشخص کنید.

۵. برای هریک از توابع زیر نقاط بحرانی را مشخص کرده و تبیه‌گون یا ناتبیه‌گون بودن آنها را بررسی کنید.

الف. $f(x) = x^3 - x$

ب. $S(x) = \sin(x)$

ج. $f(x) = x^4 - 2x^2$

د. $g(x) = x^3 + x^4$

۶. نمای فاز نگاشت زیر را که روی دایره تعریف شده، برای $\frac{1}{n} < \epsilon < 0$ توصیف کنید.

$$f(\theta) = \theta + \frac{\pi}{n} + \epsilon \sin(n\theta).$$

۷. ثابت کنید که یک همسان‌ریختی روی \mathbb{R} نمی‌تواند نقطه متناوب با دوره تناوب اولیه بزرگ‌تر از ۲ داشته باشد. مثالی از یک همسان‌ریختی ارائه دهید که دارای نقطه متناوب با دوره تناوب ۲ باشد.

۸. ثابت کنید که یک همسان‌ریختی نمی‌تواند نقاط نهایتاً متناوب داشته باشد.

۹. فرض کنید $S^1 \rightarrow S^1$ با ضابطه $S(\theta) = \theta + \omega + \epsilon \sin(\theta)$ داده شده باشد که ω و ϵ اعداد ثابت هستند. نشان دهید اگر $1 < |\epsilon|$ ، آنگاه S یک همسان‌ریختی روی دایره است.

۱۰. فرض کنید $f(\theta) = 2\theta$ نگاشت موربدیث در مثال ۴.۳. روی دایره S^1 باشد. ثابت کنید که نقاط متناوب f در S^1 چگالند.

۱۱. ثابت کنید که نقاط نهایتاً ثابت در نگاشت تمرین ۱۰ نیز در S^1 چگالند.

۴ هذلولوی بودن

نگاشتهای ساده‌ای چون $x = f(x)$ و $x = \text{id}(x)$ در سیستم‌های دینامیکی نیستند. دلایل زیادی برای این موضوع وجود دارد ولی شاید غیرمعمول‌ترین خاصیت آنها، این است که همه نقاط تحت تکرارهای این نگاشتها متناوب هستند. اکثر نگاشتهای چنین رفتاری ندارند. نقاط متناوب معمولاً روی خط پخش می‌شوند. در این بخش یکی از مطالب اصلی را که در این کتاب به آن پرداخته می‌شود معرفی می‌کنیم و آن هذلولوی بودن است. نگاشتهایی با نقاط متناوب هذلولوی در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی اتفاق می‌افتد و علاوه‌بر آن، این نگاشتها ساده‌ترین نوع رفتار دینامیکی را از خود بروز می‌دهند.

تعریف ۱.۴ فرض کنید p نقطه‌ای متناوب با تناوب n باشد. نقطه p هذلولوی است هرگاه $|f^n(p)'| \neq 1$. عدد $|f^n(p)'|$ مرتبه نقطه متناوب نامیده می‌شود.

مثال ۲.۴ دیفیومورفیسم $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + x)$ را در نظر بگیرید. نقاط ± 1 و 0 ثابت هستند. توجه کنید که $f'(0) = 2$ و $f'(\pm 1) = 4$. بنابراین همه نقاط ثابت هذلولوی هستند. نمودار و نمای فاز $f(x)$ در شکل ۱.۴ نشان داده شده است.

مثال ۳.۴ قرار دهید $f(x) = -\frac{1}{3}(x^3 + x)$. نقطه ± 1 و 0 نقطه ثابت هذلولوی با $f'(0) = -4$ است. نقاط ± 1 در یک مدار با تناوب 2 قرار می‌گیرند. با استفاده از قاعده زنجیری داریم $f'(1) = -1$ و $f'(-1) = 1$. بنابراین، این نقاط متناوب هذلولوی بوده و نمای فاز آن در شکل ۲.۴ مشخص شده است. توجه کنید که نقاط در بازه $(-1, 1)$ به صورت مارپیچ به ± 1 نزدیک شده و از ± 1 دور می‌شوند.

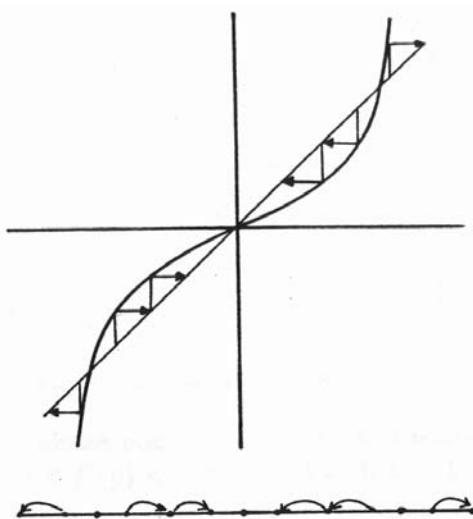
در دو مثال قبل مشاهده کردیم که $1 < |f'(0)|$ و نقاط نزدیک 0 پیشوامجانبی به 0 هستند. این حالت اغلب اتفاق می‌افتد.

قضیه ۴.۴ فرض کنید p یک نقطه ثابت هذلولوی با $1 < |f'(p)|$ باشد. در این صورت یک بازه باز مانند U حول p موجود است به‌طوری که اگر $x \in U$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = p.$$

برهان: از آنجا که f نگاشتی C^1 است عددی مانند ϵ موجود است به‌طوری که برای هر $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ داریم $|f'(x)| < A < 1$. با استفاده از قضیه مقدار میانگین

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| \leq A|x - p| < |x - p| \leq \epsilon.$$



شکل ۱.۴. نمودار و نمای فاز $f(x) = \frac{1}{7}(x^3 + x)$

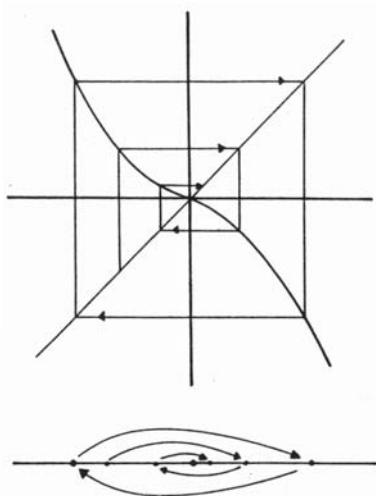
درنتیجه $f(x)$ در بازه $[p - \epsilon, p + \epsilon]$ قرار گرفته و در واقع از x به p نزدیکتر است. با بحثی مشابه

$$|f^n(x) - p| \leq A^n |x - p|.$$

$n \rightarrow \infty$ بنابراین $f^n(x) \rightarrow p$ هنگامی که ملاحظات.

- ۱. نتیجه می‌شود که بازه $[p - \epsilon, p + \epsilon]$ مشمول در مجموعه پایدار p یعنی $W^s(p)$ است.
- ۲. نتیجه مشابهی برای نقاط متناوب هذلولوی با تناوب n موجود است. در این حالت، بازه بازی چون U حول p به دست می‌آید که به وسیله f^n به داخل خودش نگاشته می‌شود. البته در این حالت فرض می‌شود که $|f^n)'(p)| < 1$.

تعريف ۵.۴ فرض کنید p یک نقطه متناوب هذلولوی با تناوب n باشد و $|f^n)'(p)| < 1$. نقطه p یک نقطه متناوب جاذب (یک جاذب) یا چاهک نامیده می‌شود.



شکل ۲.۴. نمودار و نمای فاز $f(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + x)$

بنابراین نقاط متناوب جاذب با تناوب n دارای همسایگی‌هایی هستند که توسط f^n به داخل خودشان نگاشته می‌شوند. چنین همسایگی را مجموعه پایدار موضعی نامیده و با W_{loc}^s نمایش می‌دهیم. در واقع ممکن است با سه نوع نقطه ثابت جاذب مواجه شویم، نقاطی که برای آنها رفتار نگاشت در نزدیک این نوع نقاط ثابت جاذب در شکل ۲.۴. نمایش داده شده است.

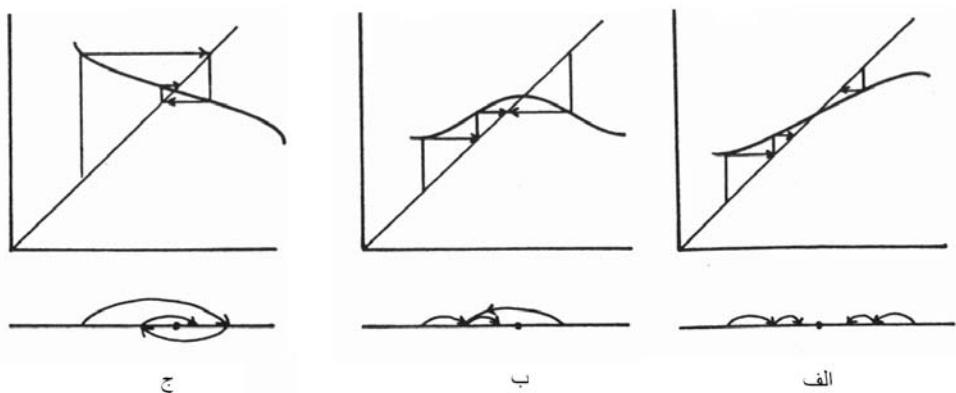
رفتاریک نگاشت در نزدیکی نقاط متناوبی که دارای مشتق با قدر مطلق بزرگ‌تر از ۱ هستند کاملاً با رفتار نقاط چاهک تفاوت دارند.

قضیه ۶.۴ فرض کنید p یک نقطه ثابت هذلولوی با $1 > |f'(p)|$ باشد. درین صورت بازه بازی مانند U حول p وجود دارد به طوری که اگر $x \in U$ و $x \neq p$ باشند، آنگاه $0 < f^k(x) \neq p$ موجود است که

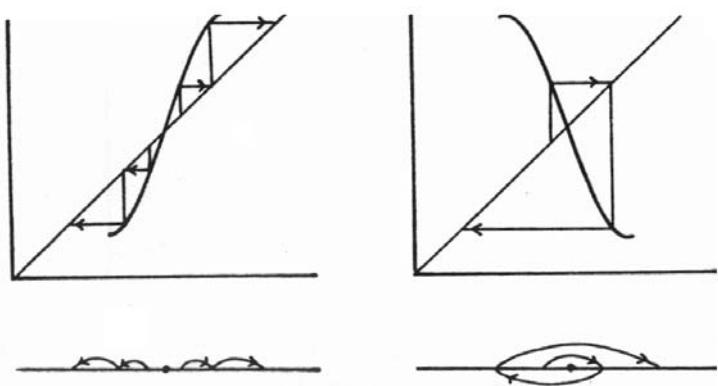
$$f^k(x) \notin U$$

برهان این قضیه مشابه برهان قضیه قبلی است و به عنوان تمرین واگذار می‌شود. نتیجه از روی نمودار بسیار واضح است. شکل ۴.۴ را بینید.

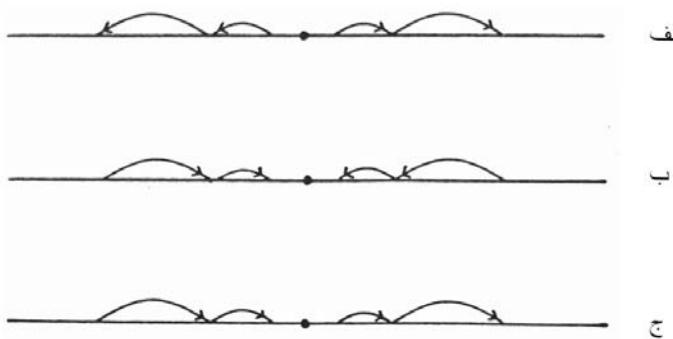
تعریف ۷.۴ یک نقطه ثابت p با $1 > |f'(p)|$ یک نقطه ثابت دافع یا چشمی نامیده می‌شود. همسایگی توصیف شده در قضیه را مجموعه ناپایدار موضعی نامیده و با W_{loc}^u نمایش می‌دهیم.



شکل ۳.۴. نمای فاز نزدیک یک نقطه ثابت جاذب p در حالت الف $1 < f'(p) < 0$ ، ب $f'(p) = 0$ و ج $f'(p) > 0$



شکل ۴.۴. نمای فاز نزدیک یک نقطه ثابت دافع.



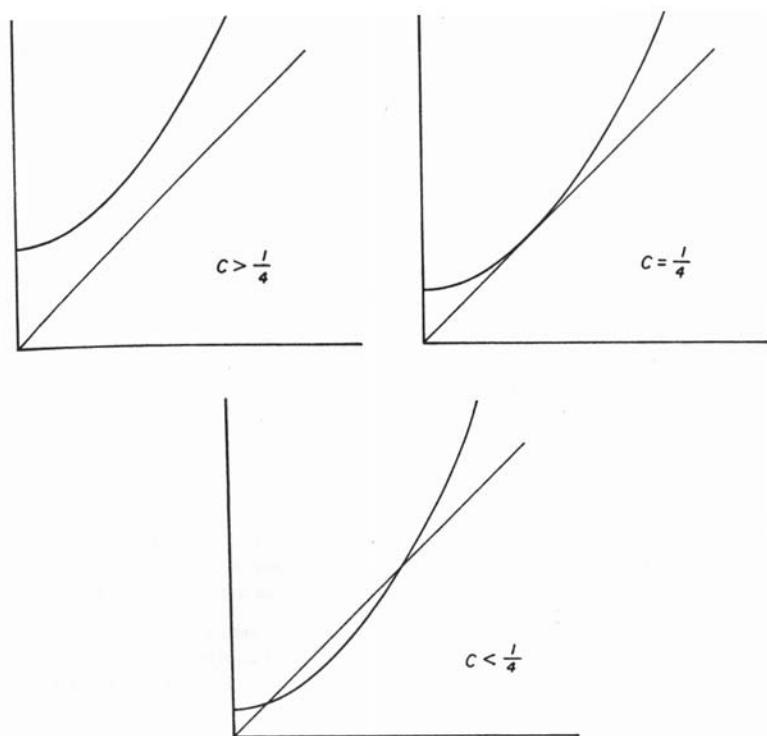
شکل ۴.۵. نمای فاز الف، ب، ج $f(x) = x + x^2$ ، $f(x) = x - x^3$ ، $f(x) = x + x^3$

توجه کنید که نقاط متناوب با تناوب n ، هنگامی که $|f'(p)| > 1$ رفتار مشابهی را بروز می‌دهند. بنابراین نقاط متناوب هذلولوی، دارای رفتار موضعی هستند که توسط مشتق، در نقطه متناوب کنترل می‌شود. ولی همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد این موضوع در حالتی که نقطه وضعیت خاصی ندارد یا غیرهذلولوی است صادق نیست.

مثال ۸.۴ همه نگاشتهای شکل ۵.۴ در \circ صدق می‌کنند، ولی هرگدام دارای نمای فاز کاملاً متفاوت در نزدیک \circ هستند. در حالت الف، نگاشت $f(x) = x + x^3$ دارای نقطه ثابت دافع ضعیف در \circ است. در حالت ب، نگاشت $f(x) = x - x^3$ دارای نقطه ثابت جاذب ضعیف در \circ است. در حالت ج، نگاشت $f(x) = x + x^2$ در \circ دافع ضعیف از طرف راست و جاذب ضعیف از طرف چپ است.

به طوری که در ادامه خواهیم دید اکثر نگاشتها فقط دارای نقاط متناوب هذلولوی هستند. در عین حال نقاط متناوب غیرهذلولوی، اغلب در خانواده‌ای از نگاشتها اتفاق می‌افتد. در جنبین صورتی، ساختار نقطه متناوب دستخوش انشعاب می‌شود. در آینده به‌طور وسیعی به نظریه انشعاب می‌پردازیم ولی اکنون فقط چند مثال ارائه می‌کنیم.

مثال ۹.۴ خانواده توابع درجه دو $Q_c(x) = x^2 + c$ را که یک پارامتر است در نظر بگیرید. بسته به اینکه $c > \frac{1}{4}$ یا $c = \frac{1}{4}$ یا $c < \frac{1}{4}$ ، نمودار Q_c دارای سه حالت مختلف نسبت به نیمساز ربع اول است. شکل ۶.۴ را ببینید. توجه کنید که در حالت $c > \frac{1}{4}$ هیچ نقطه ثابتی ندارد. در حالت $c = \frac{1}{4}$ دارای نقطه غیرهذلولوی ثابت و یکتا در $x = \frac{1}{2}$ است و در حالت $c < \frac{1}{4}$ دارای یک جفت نقطه ثابت است که یکی جاذب و دیگری دافع است. بنابراین نمای فاز Q_c با کاهش c در $\frac{1}{4}$ تغییر می‌کند.

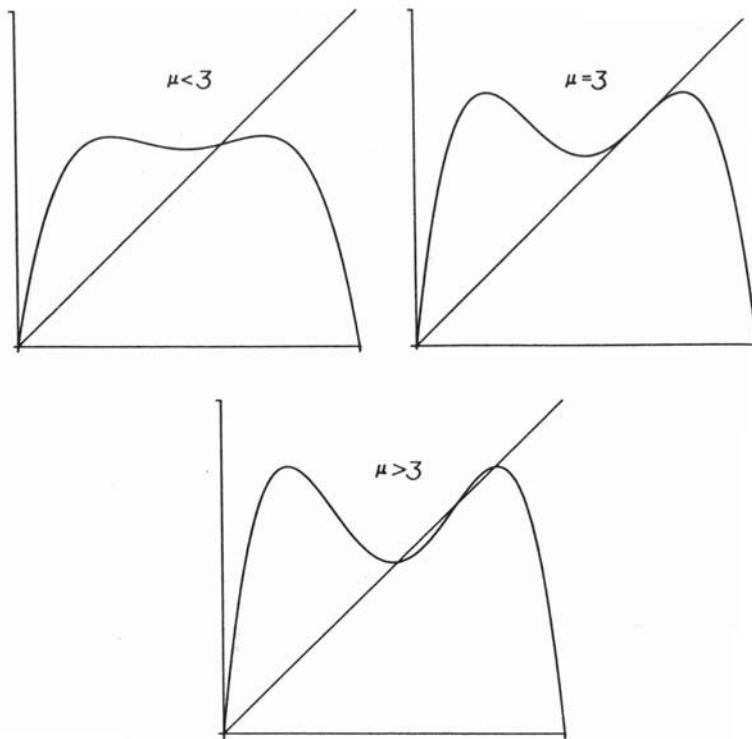


شکل ۶.۴. نمودار $Q_c(x) = x^2 + c$ برای $c < \frac{1}{4}$ و $c = \frac{1}{4}$ و $c > \frac{1}{4}$

این تغییر، مثالی از یک انشعاب است.

مثال ۱۰.۴ فرض کنید $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ که $\mu > 1$. نگاشت F_μ دارای دو نقطه ثابت است: یکی در $x = 0$ و دیگری در $x = 1/\mu$. توجه داشته باشید که $F'_\mu(0) = \mu - 1$ و $F'_\mu(1/\mu) = 2 - \mu$. بنابراین $x = 0$ یک نقطه ثابت دافع برای $x = 1/\mu$ و $x = 1/\mu$ یک نقطه جاذب برای $x = 2 - \mu$ است. اگر $\mu = 3$, آنگاه $F'_\mu(0) = -1$ و $F'_\mu(1/3) = 2 - 3 = -1$. نمودار F_μ برای $\mu = 3$ با مقادیر نزدیک به ۳ در شکل ۶.۴ رسم شده است. توجه کنید که دو نقطه ثابت جدید برای F_μ با افزایش μ به نزدیک ۳، ظاهر می‌شوند. این نقاط جدید دارای تناوب ۲ هستند. بنابراین انشعاب دیگری رخ داده است؛ این بار تغییر در $Per_2(F_\mu)$ اتفاق افتاده است.

در واقع خانواده توابع درجه دو، بسیاری از پدیده‌هایی را که در نظریه عمومی سیستم‌های دینامیکی اساسی هستند به نمایش می‌گذارد. بخش بعد به طور کامل به این خانواده اختصاص یافته است.



شکل ۷.۴. نمودار $F_\mu(x)$ برای $\mu > 3$ ، $\mu = 3$ و $\mu < 3$

تمرین.

۱. همه نقاط متناوب نگاشتهای زیر را بیابید و مشخص کنید که کدامیک جاذب، دافع، یا نه جاذب و نه دافع هستند. نمای فاز آنها را رسم کنید.

الف. $f(x) = x - x^2$

ب. $f(x) = 2(x - x^2)$

ج. $f(x) = x^3 - \frac{1}{4}x$

د. $f(x) = x^3 - x$

ه. $S(x) = \frac{1}{\pi} \sin(x)$

و. $S(x) = \sin(x)$

ز. $E(x) = e^{x-1}$

ح. $E(x) = e^x$

ط. $A(x) = \arctan(x)$

ی. $A(x) = \frac{\pi}{4} \arctan(x)$

ک. $A(x) = -\frac{\pi}{4} \arctan(x)$

۲. درمورد انشعابی که در هر خانواده از نگاشتهای زیر در پارامتر مشخص شده اتفاق می‌افتد بحث کنید.

الف. $\lambda = 1$ ، $S_\lambda(x) = \lambda \sin x$

ب. $\lambda = 1/e$ ، $E_\lambda(x) = \lambda e^x$

ج. $\lambda = -e$ ، $E_\lambda(x) = \lambda e^x$

د. $c = -\frac{3}{4}$ ، $Q_c(x) = x^2 + c$

ه. $\mu = 1$ ، $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$

و. $\lambda = 1$ ، $A_\lambda(x) = \lambda \arctan x$

ز. $\lambda = -1$ ، $A_\lambda(x) = \lambda \arctan x$

۳. فرض کنید که f یک دیفیومورفیسم باشد. ثابت کنید که همه نقاط متناوب هذلولوی، تنها هستند.

۴. از طریق یک مثال نشان دهید که نقاط متناوب هذلولوی لزومی ندارد که تنها باشند.

۵. مثالی از یک دیفیومورفیسم C^1 با یک نقطه ثابت غیرهذلولوی بیابید به‌طوری که نقطه انباشتگی سایر نقاط ثابت هذلولوی باشد.

۶. درمورد دینامیک خانواده $f_\alpha(x) = x^3 - \alpha x$ برای $1 < \alpha \leq \infty$ بحث کنید. همه مقادیر پارامترهایی که در آنها انشعاب رخ می‌دهد بیابید. توضیح دهید که چگونه نمای فاز f_α در این نقاط عوض می‌شود.

۷. نگاشت خطی $f_k(x) = kx$ را درنظر بگیرید. نشان دهید چهار بازه باز از پارامترها موجود است به‌طوری که نماهای فاز f_k در آنها یکسان است. حالت‌های خاص، $1, \pm 0, \pm \infty$ هستند.

۵ یک مثال: خانواده نگاشتهای درجه دو

در این بخش، بحث نگاشتهای درجه دو $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ را دنبال می‌کنیم. در واقع، از آنجاکه این نگاشت بسیاری از مهم‌ترین پدیده‌هایی که در سیستم‌های دینامیکی اتفاق می‌افتد را توضیح می‌دهد، در طول این فصل بارها به این مثال بازمی‌گردیم.

قضیه ۱.۵

$$p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu} \text{ که } F_\mu(p_\mu) = p_\mu \text{ و } F_\mu(\circ) = F_\mu(1) = \circ. \quad ۱$$

$$2. \text{ اگر } 1 > \mu, \text{ آنگاه } \circ < p_\mu < 1. \quad ۲$$

برهان این قضیه سرراست است. از این‌پس روی حالت $1 > \mu$ تمرکز می‌کنیم. قضیه زیر نشان می‌دهد که اکثر نقاط، رفتار نسبتاً مشخصی تحت تکرارهای F_μ دارند: همه نقاطی که در بازه $[0, 1]$ قرار نمی‌گیرند به ∞ – میل می‌کنند.

قضیه ۲.۵ فرض کنید $1 < \mu$. اگر $\circ < x, \text{ آنگاه } \circ < -\infty \rightarrow F_\mu^n(x) \rightarrow \infty$. به‌طور مشابه، اگر $1 < x, \text{ آنگاه } \infty \rightarrow F_\mu^n(x) \rightarrow \infty$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$.

برهان: اگر $\circ < x, \text{ آنگاه } x < 1 - \mu x$ و بنابراین $F_\mu^n(x) < x$. درنتیجه $F_\mu^n(x) < x$ دنباله‌ای نزولی از نقاط است. این دنباله نمی‌تواند به p میل کند، چون در این صورت باید $p < F_\mu^{n+1}(x) \rightarrow F_\mu(p) < p$ باشد. درحالی که $F_\mu^n(x) \rightarrow p$. پس همان‌طور که انتظار می‌رفت $\infty \rightarrow -\infty$. اگر $1 < x, \text{ آنگاه } F_\mu^n(x) \rightarrow \infty$ و درنتیجه $F_\mu(x) < \circ$. \square

از تحلیل نموداری، نتایج فوق همان‌طور که در شکل ۱.۵ نشان داده شده است به راحتی به دست می‌آید. به عنوان نتیجه‌ای از این قضیه، تمام دینامیک‌های جالب توجه خانواده نگاشتهای درجه دو در بازه $\{x \in \mathbb{R}^n \mid 1 < x < \mu\}$ دارد. برای مقادیر کم μ ، دینامیک F_μ چندان پیچیده نیست.

قضیه ۳.۵ فرض کنید $1 < \mu < 3$.

۱. F_μ دارای یک نقطه ثابت جاذب در $p_\mu = \frac{1}{\mu - 1}$ و یک نقطه ثابت دافع در \hat{p}_μ است.

۲. اگر $x < p_\mu$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) = p_\mu.$$

برهان. قسمت اول، در مثال ۱۰.۴ در انتهای بخش گذشته اثبات شد. برای قسمت دوم ابتدا حالت $x < p_\mu$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید x در بازه $(\frac{1}{\mu}, \infty)$ قرار دارد. تحلیل نموداری نشان می‌دهد برای $x \neq p_\mu$

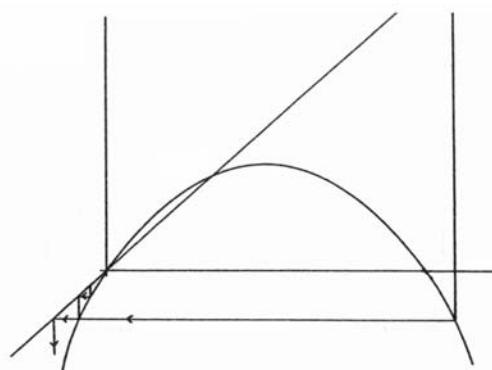
$$|F_\mu(x) - p_\mu| < |x - p_\mu|.$$

شکل ۲.۵ را ببینید. درنتیجه، $p_\mu \rightarrow \infty$. از طرف دیگر، اگر x در بازه $(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu})$ قرار گیرد، آنگاه $F_\mu(x)$ در $(\frac{1}{\mu}, \infty)$ قرار می‌گیرد و بحث قبلی نشان می‌دهد هنگامی که $n \rightarrow \infty$

$$F_\mu^n(x) = F_\mu^{n-1}(F_\mu(x)) \rightarrow p_\mu.$$

حالات $\mu < 2$ سخت‌تر است. تحلیل نموداری نشان می‌دهد که چرا این حالت سخت‌تر است. شکل ۲.۵ را ببینید. توجه کنید $1 < p_\mu < \frac{1}{\mu}$. فرض کنید \hat{p}_μ نقطه‌ای یکتا در بازه $(\frac{1}{\mu}, \infty)$ باشد که توسط F_μ به p_μ نگاشته می‌شود. به راحتی می‌توان دید که بازه $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ توسط F_μ^k به داخل بازه $[p_\mu, \frac{1}{\mu}]$ می‌رود. درنتیجه برای $x \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$ ، $F_\mu^k(x) \rightarrow p_\mu$. حال فرض کنید $\hat{p}_\mu < x$. دوباره از تحلیل نموداری \hat{p}_μ می‌توان دید که $F_\mu^k(\hat{p}_\mu) > \hat{p}_\mu$. بنابراین دراین حالت نیز $F_\mu^{k+n}(x) \rightarrow p_\mu$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$. درنهایت، همچون $F_\mu^k(x) \in [\hat{p}_\mu, p_\mu]$. بنابراین دراین حالت \hat{p}_μ می‌گارد و نتیجه حاصل می‌شود. از آنجاکه F_μ در قبل، \hat{p}_μ را به روی (p_μ, ∞) برد، حکم بدست می‌آید. حالت $\mu = 2$ را به خواننده واگذار می‌کنیم. تمرین ۱ را ببینید. \square

درنتیجه برای $\mu < 3$ ، F_μ تنها دارای ۲ نقطه ثابت است و سایر نقاط در I به p_μ مجانب هستند. بنابراین دینامیک F_μ هنگامی که μ در این محدوده باشد کاملاً شناخته شده است. نمای فاز در شکل ۳.۵ نشان داده شده است.

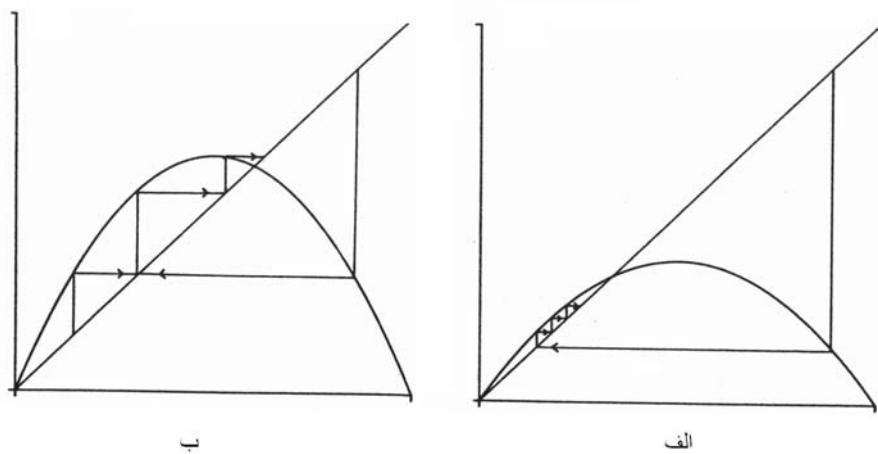


شکل ۱.۵. تحلیل نمودار $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ برای $\mu > 1$.

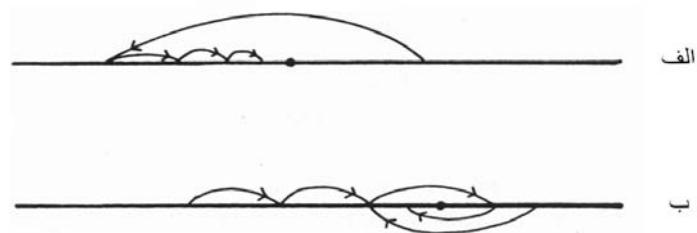
همان طور که در مثال ۱۰.۴ در بخش قبل نشان دادیم هنگامی که μ از ۳ عبور می‌کند، دینامیک F_μ کمی پیچیده‌تر می‌شود: یک نقطه متناوب جدید با تناوب ۲ تولید می‌شود. این آغاز یک داستان طولانی است: همچنان که μ افزایش می‌یابد دینامیک F_μ پیچیده‌تر می‌شود تا جایی که نمای فاز F_μ نمایشی بسیار متفاوت پیدا می‌کند که آن را در بخشی جداگانه با جزئیات بیشتر بررسی خواهیم کرد.

به حالت $\mu > \mu$ بازمی‌گردیم. در بقیه این بخش از اندیس μ صرف نظر می‌کنیم و به جای F_μ فقط F می‌نویسیم. همچون گذشته، همه دینامیک جالب F در بازه یکه I اتفاق می‌افتد. از آنجاکه $\mu > 4$ در نظر گرفته شده است، لذا مقدار ماکسیمم F ، یعنی $\frac{1}{4}$ بزرگ‌تر از یک است. بنابراین نقاط خاصی پس از اولین تکرار F از بازه I خارج می‌شوند. مجموعه چنین نقاطی را با A نمایش می‌دهیم. بهوضوح، $x \in A$ بازی به مرکز $\frac{1}{4}$ است و دارای این خاصیت است که اگر $x \in A$ ، آنگاه $F(x) > 1$ ، درنتیجه $F^2(x) < 0$ و $F^n(x) \rightarrow -\infty$. مجموعه A مجموعه نقاطی است که به سرعت از I خارج می‌شوند. سایر نقاط I ، پس از اولین تکرار F در I باقی می‌مانند.

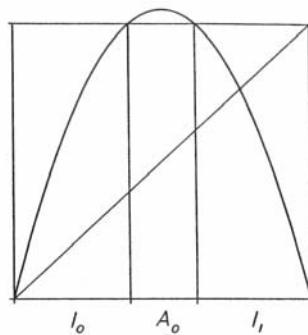
قرار دهید $\{x \in I | F(x) \in A\}$ و بنابراین $F^n(x) \rightarrow -\infty$. به استقراء قرار دهید $\{x \in I | F^n(x) \in A\} = A_n = \{x \in I | F^i(x) \in I, i \leq n, F^{n+1}(x) \notin I\}$. یعنی، در $(n+1)$ امین تکرار، از I خارج می‌شوند. همانند قبل، اگر $x \in A_n$ باشد، مدار x در I درنهایت به $-\infty$ میل می‌کند. از آنجاکه سرنوشت نهایی نقاطی را که در A_n قرار می‌گیرند می‌دانیم، کافیست فقط رفتار



شکل ۲.۵. تحلیل نموداری $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ برای الف و ب.



شکل ۳.۵. نمای فاز برای الف و ب $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.



شکل ۴.۵.

نقاطی را که هرگز از I خارج نمی‌شوند بررسی کنیم، یعنی نقاطی که در

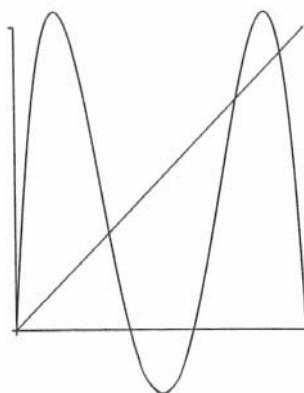
$$I - \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \right)$$

قرار دارند. این مجموعه را با Λ نشان می‌دهیم. اولین سوال این است: این مجموعه نقاط دقیقاً چه هستند؟ برای شناختن Λ ، بدقت ساختار بازگشتنی آن را توصیف می‌کنیم. از آنجاکه A بازه بازی به مرکز $\frac{1}{2}$ است، $I - A$ از دو بازه بسته I_1 در چپ و I_0 در راست تشکیل می‌شود. شکل ۴.۵ را ببینید.

نگاشت F هر دو بازه I_0 و I_1 را به صورت یکنوا به روی I می‌نگارد؛ روی I_0 صعودی و روی I_1 نزولی است. از آنجاکه $I = F(I_0) = F(I_1)$ ، یک جفت بازه باز، یکی در I_0 و دیگری در I_1 موجود است که F آنها را به توی A می‌نگارد. بنابراین این جفت از بازه‌ها، دقیقاً برابر با مجموعه A است.

حال $(A \cup A_1) - I$ را در نظر بگیرید. این مجموعه از چهار بازه تشکیل شده که F هریک از آنها را به طور یکنوا به روی I_1 یا I_0 می‌نگارد. درنتیجه F^2 هریک از آنها را به روی I می‌نگارد. بنابراین می‌بینیم که هریک از چهار بازه در $(A \cup A_1) - I$ شامل زیربازه‌ای هستند که با F^2 به روی A نگاشته می‌شوند. پس نقاط این بازه‌ها با سومین تکرار F ، از I خارج می‌شوند. این همان مجموعه A_2 است. برای استفاده‌های بعدی، دقت کنید که F^2 روی این چهار بازه به طور متناوب صعودی و نزولی است. درنتیجه نمودار F^2 دارای دو برآمدگی همانند شکل ۵.۵ است.

در ادامه این روش به دونکته توجه می‌کنیم. اول اینکه A_n متتشکل از 2^n بازه باز مجزا است. پس

شکل ۵.۵. نمودار F^2 .

از آنجاکه

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1,$$

$\cup \dots \cup A_n$ از $I = 2^{n+1}$ بازه بسته تشکیل می‌شود. دوم اینکه، F^{n+1} ، هریک از این بازه‌های بسته را به صورت یکنوا به روی I می‌نگارد. در حقیقت، نمودار F^{n+1} به طور متناوب روی این بازه‌ها صعودی و نزولی است. بنابراین نمودار F^{n+1} دارای دقیقاً 2^n برآمدگی روی I است و درنتیجه نمودار خط $y = x$ را حداقل 2^n بار قطع می‌کند. این نشان می‌دهد که F^n حداقل 2^n نقطه ثابت دارد یا به طور معادل، $\text{Per}_n(F)$ شامل 2^n نقطه در I است. بهوضوح، ساختار Λ در حالت $\mu > 4$ بسیار پیچیده‌تر از حالت $\mu < 3$ است.

ساخت Λ یاد آور نحوه ساختن مجموعه $\frac{1}{3}$ میانی کانتور است: Λ به وسیله برداشتن متوالی بازه‌های باز از وسط مجموعه‌ای از بازه‌های بسته به دست آمده است.

تعریف ۴.۵ مجموعه Λ یک مجموعه کانتور است هرگاه زیرمجموعه‌ای بسته، کلاً ناهمبند و کامل از I باشد. یک مجموعه، کلاً ناهمبند است هرگاه شامل هیچ بازه‌ای نباشد؛ یک مجموعه کامل است هرگاه هر نقطه از آن یک نقطه ابانتگی یا یک نقطه حدی برای سایر نقاط مجموعه باشد.

مثال ۵.۵ مجموعه $\frac{1}{3}$ میانی کانتور. این یک مثال کلاسیک از مجموعه کانتور است. با بازه I شروع کنید و بازه باز " $\frac{1}{3}$ میانی" یعنی بازه $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ را بردارید. سپس از آنچه که باقی مانده است دو بازه $\frac{1}{3}$ میانی یعنی بازه‌های $(\frac{2}{9}, \frac{1}{9})$ و $(\frac{7}{9}, \frac{4}{9})$ را بردارید. با همین روند بازه‌های $\frac{1}{3^n}$ میانی را حذف کنید. توجه کنید که با این روش در مرحله n ام، 2^n بازه باز حذف می‌شوند. بنابراین این روند کاملاً مشابه

روش ساختن Λ قبلی است. تمرین ۷ نشان می‌دهد که مجموعه $\frac{1}{\ell}$ میانی کانتور همان مجموعه کانتور در تعریف ۴.۵ است.

ملاحظه. مجموعه $\frac{1}{\ell}$ میانی کانتور مثالی از یک فرکتال است. به طور شهودی یک فرکتال، یک مجموعه خود متشابه، تحت بزرگ‌نمایی است. در مجموعه $\frac{1}{\ell}$ میانی کانتور، فرض کنید که فقط به نقاط بازه سمت چپی $[\frac{1}{\ell}, 0]$ توجه داریم. به وسیله میکروسکوپی که این بازه را سه برابر می‌کند، "قطعه"‌ای از مجموعه کانتور که در بازه $[\frac{1}{\ell}, 0]$ قرار دارد دقیقاً شبیه مجموعه اولیه است. به طور دقیق، نگاشت خطی $L(x) = 3x$ بخشی از مجموعه کانتور را که در $[\frac{1}{\ell}, 0]$ قرار دارد به صورت همسان ریخت به روی کل مجموعه می‌نگارد. تمرین ۱۰ را ببینید. این روند در مرحله اول متوقف نمی‌شود: با بزرگ‌نمایی هر قطعه از مجموعه کانتور در مرحله n با ضریب بزرگ‌نمایی 3^n می‌توان به مجموعه اولیه رسید. تمرین ۱۱ را ببینید.

برای اطمینان از اینکه Λ یک مجموعه کانتور است، به یک فرض دیگر روی μ نیاز است. فرض کنید μ به قدری بزرگ باشد که برای $I \in I_1 \cup I_2$ داشته باشیم $|F'(x)| > 1$. می‌توان بررسی کرد که کافیست $\sqrt{\delta} + 2 > \lambda > \mu$. بنابراین برای این مقادیر μ ، $1 > \lambda$ موجود است به طوری که برای هر $x \in \Lambda$ با استفاده از قاعده زنجیری، نتیجه می‌شود که $|F'(x)| > \lambda^n$. ادعا می‌کنیم که Λ شامل هیچ بازه‌ای نیست. چون اگر این چنین بود، می‌توانستیم $x, y \in \Lambda$ و $x \neq y$ باشند. را طوری انتخاب کنیم که $[x, y] \subset \Lambda$. ولی در این صورت برای همه $\alpha \in [x, y]$ $|F^n(\alpha)| > \lambda^n$. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نتیجه عدد n را طوری انتخاب کنید که $1 > \lambda^n |y - x|$. با این حداقل یکی از $F^n(y)$ یا $F^n(x)$ خارج از I قرار می‌گیرد. این تناقض است و درنتیجه Λ کلاً ناهمبند است.

از آنجاکه Λ ، اشتراک بازه‌های بستهٔ تودرتو است، پس Λ بسته است. اکنون ثابت می‌کنیم که Λ کامل است. در ابتدا توجه کنید که نقاط انتهایی A_k در Λ قرار می‌گیرند. در واقع، این نقاط درنهایت به نقطه ثابت \circ نگاشته می‌شوند و بنابراین تحت تکرارها، داخل I باقی می‌مانند. اگر نقطه $p \in \Lambda$ تنها باشد، آنگاه همه نقاط نزدیک آن باید با تکرارهای F از I خارج شوند. پس این نقاط باید متعلق به A_k باشند. بنابراین یا دنباله‌ای از نقاط انتهایی A_k که به p میل می‌کنند وجود دارد یا همه نقاط، مربوط به همسایگی حذف شده‌ای از p هستند که تحت تکرارهایی از F به خارج از I می‌روند. در حالت اول از آنجا که A_k ‌ها به \circ نگاشته می‌شوند و درنتیجه در داخل Λ می‌مانند، حکم به دست می‌آید. در حالت دوم می‌توانیم فرض کنیم F^n نقطه p را به \circ می‌نگارد و سایر نقاط در همسایگی p را به توی محور حقیقی منفی می‌برد. ولی در این صورت F^n یک ماکسیمم در p دارد و بنابراین $(F^n)'(p) = 0$. با استفاده از قاعده زنجیری، برای یک $i < n$ داریم $0 = F'(F^i(p)) = F'(F^i(p))$. درنتیجه $F^n(p) \rightarrow -\infty$ که با این واقعیت که $F^n(p) = \frac{1}{\ell}$ در

تناقض است. بنابراین قضیه زیر را ثابت کرده‌ایم:

قضیه ۶.۵ اگر $\sqrt{5} + 2 > \mu$, آنگاه Λ یک مجموعه کانتور است.

ملاحظه. این قضیه برای $4 > \mu$ نیز درست است ولی برهان آن جزئیات بیشتری دارد.

اکنون به بررسی رفتار پیچیده مدارهای F_μ در حالت $4 > \mu$ می‌پردازیم. هر نقطه تحت تکرارهای F_μ یا به ∞ -میل می‌کند یا کل مدار آن داخل Λ باقی می‌ماند. بنابراین مدار نقاطی که توسط F_μ در Λ باقی نمی‌مانند کاملاً مشخص است. در بخش بعدی، تحلیل دینامیک F_μ را با انجام تحلیل دینامیک F_μ روی Λ کامل می‌کنیم.

در حالت $\sqrt{5} + 2 > \mu$ نشان دادیم که روی $I_1 \cup I_0$, $|F'_\mu(x)| > 1$. این نتیجه می‌دهد که روی Λ , $|F'_\mu(x)| > 1$. این شرط، مشابه شرط هذلولوی بودن در بخش ۳ است با این تفاوت که در این حالت روی کل Λ و نه فقط در نقاط متناوب، شرط $1 \neq |F'_\mu(x)|$ موردنیاز است. این انگیزه‌ای برای تعریف مجموعه هذلولوی است:

تعریف ۷.۵ مجموعه $\Gamma \subset \mathbb{R}$ یک مجموعه دافع (یا جاذب) هذلولوی برای f است هرگاه بسته، کران دار و پایا تحت f بوده و همچنین $\circ N$ ای موجود باشد به طوری که برای هر $n \geq N$ و $x \in \Gamma$, $|f^n(x)| < 1$ (یا $1 < |f^n(x)|$) است.

مجموعه کانتور Λ برای نگاشت درجه دو در حالت $\sqrt{5} + 2 > \mu$, یک مجموعه هذلولوی دافع با $N = 1$ است.

تمرین.

۱. نشان دهید $(1-x)^2x = 2x(1-x)$ در این خاصیت صدق می‌کند: اگر $0 < x < 1$, آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} F_\mu^n(x) \rightarrow \frac{1}{2}$ هنگامی که

۲. نمودار F_μ^n را در بازه یکه برای $F_\mu^n(x) = 4x(1-x)$ رسم کنید. نتیجه بگیرید که F_μ دارای حداقل 2^n نقطه متناوب با تناوب n است.

۳. نمودار تابع خیمه

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

را روی بازه یکه رسم کنید. از نمودار T_2^n استفاده کنید و نتیجه بگیرید که T_2 دارای دقیقاً 2^n نقطه متناوب با تناوب n است.

۴. نشان دهید مجموعه همه نقاط متناوب $(x) \in T_2$ در $[1, 0]$ چگالند.

۵. نمودار تابع نانوا^۱

$$B(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

را رسم کنید. B چند نقطه متناوب با تناوب n دارد؟

۶. تمرینهای بعدی مربوط به خانواده توابع $F(x) = x^3 - \lambda x - \lambda$ برای $\lambda > 0$ است.

الف. همه نقاط متناوب را بیابید و آنها را برای $1 < \lambda < 0$ دسته‌بندی کنید.

ب. نشان دهید اگر $|x|$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} |F^n(x)| \rightarrow 0$.

ج. نشان دهید اگر λ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه مجموعه نقاطی که به بینهایت میل نمی‌کند تشکیل یک مجموعه کانتور می‌دهند.

۷. نشان دهید مجموعه $\frac{1}{3}$ میانی کانتور که در مثال ۵.۵ توصیف شد بسته، ناتھی، کامل و کلاً ناهمبند است.

۸. نشان دهید در مرحله n ام ساختن مجموعه $\frac{1}{3}$ میانی کانتور، مجموع طول بازه‌های باقیمانده، برابر است با

$$1 - \frac{1}{3} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3} \right)^i \right).$$

نتیجه بگیرید که مجموع طول این بازه‌ها به صفر میل می‌کند هرگاه $n \rightarrow \infty$.

۹. یک مجموعه $\frac{1}{3}$ میانی کانتور بسازید به‌طوری که $\frac{1}{3}$ وسط از هر بازه باقیمانده از بازه یکه حذف شود. در این حالت، در مرور مجموع طول بازه‌های باقیمانده چه می‌توان گفت؟

۱۰. فرض کنید Γ ، مجموعه $\frac{1}{3}$ میانی کانتور باشد. نشان دهید نگاشت خطی $L(x) = 3x$ ، $\Gamma \cap [0, \frac{1}{3}]$ را به‌طور همسان ریخت به روی Γ می‌نگارد.

۱۱. تمرین ۱۰ را تعمیم دهید و نشان دهید هر قسمی از Γ در مرحله n ام ساختن Γ ، همسان ریخت با Γ است.

^۱ علت این نامگذاری، شباهت عمل این تابع با ورز دادن خمیر نانوایی است.

۶ دینامیک نمادین

هدف ما در این بخش، ارائه مدلی برای ساختار دینامیکی غنی نگاشت درجه دو روی مجموعه کانتور Σ است که در بخش قبل مورد بحث قرار گرفت. برای این کاریک نگاشت مدل می‌سازیم که کاملاً هم‌ارز با F است. در ابتدا این مدل ممکن است مصنوعی و غیرشهودی به نظر برسد. ولی هر چه جلوتر می‌رویم مشخص می‌شود که این مدل نمادین، دینامیک F را کاملاً توصیف می‌کند و همچنین ساده‌ترین روش ممکن است.

به "قضایی" نیاز داریم که نگاشت مدلمان روی آن عمل کند. یک نقطه در این فضای دنباله‌ای نامتناهی از 0 ها و 1 هاست. در اینجا نگران همگرایی این دنباله‌ها نیستیم بلکه مفهوم مشکل تصور این مطلب است که هر دنباله نامتناهی، نمایشگر یک تک نقطه‌ای در فضاست.

$$\text{تعريف ۱.۶} \quad \Sigma_2 = \{s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j \in \{0, 1\}\}.$$

فضای Σ_2 ، فضای دنباله‌ای روی دو نماد 0 و 1 نامیده می‌شود. به طورکلی می‌توانیم فضای Σ_n را متشکل از همه دنباله‌های نامتناهی از اعداد صحیح بین 0 و $n - 1$ در نظر بگیریم. اعضای Σ_2 رشته‌های نامتناهی از اعداد صحیح مانند $(\dots 0 0 0 0 0)$ یا $(0 1 0 1 0 1 \dots)$ هستند. می‌توانیم Σ_2 را به طریق زیر به یک فضای متریک تبدیل کنیم. برای دو دنباله $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ و $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$ ، فاصله بین آن دو را به صورت

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

تعییف می‌کنیم. از آنجاکه $|s_i - t_i|$ 0 یا 1 است، سری نامتناهی فوق، توسط سری هندسی

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

مغلوب می‌شود و درنتیجه همگراست.

برای مثال اگر $(\dots 0 0 0 \dots)$ و $s = (1 1 1 \dots)$ ، آنگاه $d[s, t] = 2$ و آنگاه

$$d[s, r] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2i}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

قضیه ۲.۶ یک متریک روی Σ_2 است.

برهان. بهوضوح برای هر $s_i = t_i$ و $d[s, t] \geq 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر i از آنجاکه $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ نتیجه می شود که $d[s, t] = d[t, s]$. درنهایت، اگر آنگاه $d[r, s] + d[s, t] \geq d[r, t] \geq |r_i - t_i| + |s_i - t_i| \geq |r_i - t_i| + |s_i - t_i|$ متریک d به ما کمک می کند که دریابیم چه زیرمجموعه هایی از Σ_2 باز و چه زیرمجموعه هایی بسته هستند. همچنین کدام دنباله ها به یکدیگر نزدیک ترند.

قضیه ۳.۶ فرض کنید $s, t \in \Sigma_2$ و فرض کنید برای $s_i = t_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. در این صورت $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$. بالعکس، اگر $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$, آنگاه برای $i \leq n$ داریم

برهان. اگر برای $i \leq n$ داشته باشیم $s_i = t_i$, آنگاه

$$\begin{aligned} d[s, t] &= \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

از سوی دیگر اگر برای $j \leq n$, $s_j \neq t_j$, آنگاه

$$d[s, t] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}.$$

درنتیجه اگر $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$, آنگاه برای $i \leq n$.
یکی از نتایج مهم این قضیه این است که می توانیم به سرعت تصمیم بگیریم که آیا دو دنباله به هم نزدیک هستند یا نه. به طور شهودی، این نتیجه می گوید دو دنباله در Σ_2 به هم نزدیک نهاده از درایه های اول آنها با هم برابر باشند. اکنون مهم ترین جزء دینامیک نمادین یعنی نگاشت تغییرجا را روی Σ_2 تعریف می کنیم.

تعریف ۴.۶ نگاشت تغییرجا ($\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$) به صورت $(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$ تعریف می شود.

به طور ساده نگاشت تغییرجا اولین درایه دنباله را "فراموش" می کند و همه درایه های دیگر را یک مکان به سمت چپ هل می دهد. بهوضوح، از آنجاکه s_i می تواند 0 یا 1 باشد، σ روی Σ_2 یک نگاشت ۲ به ۱ است. در واقع، با متریک تعریف شده فوق، σ یک نگاشت پیوسته است.

قضیه ۵.۶ $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ پیوسته است.

برهان. فرض کنید $\epsilon > 0$ و $(s_0 s_1 s_2 \dots)$ عدد n را طوری انتخاب کنید که $\epsilon < \frac{1}{2^n}$. قرار دهید $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$. اگر $t = t_0 t_1 t_2 \dots$ در رابطه $d[s, t] < \delta$ صدق کند، آنگاه طبق قضیه ۳.۶ برای $i \leq n+1$ داریم $s_i = t_i$. بنابراین برای $i \leq n$, $\sigma(s_i) = \sigma(t_i)$ و $d[\sigma(s), \sigma(t)] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon$.

در بخش بعد می‌بینیم که نگاشت تغییرجا، مدل دقیقی برای نگاشت درجه دو F_μ در حالت $\sigma > \mu$ است. اکنون می‌توان دینامیک σ را به‌طور کامل و به‌سادگی نشان داد. برای مثال نقاط متناوب دقیقاً متناظر با دنباله‌های تکرار شونده یعنی دنباله‌هایی به فرم $(s_0 \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1}, s_0 \dots s_{n-1}, \dots)$ هستند. بنابراین 2^n نقطه متناوب با تناوب n برای σ موجود است که هریک به‌وسیله یکی از 2^n دنباله متناهی از 0 ها و 1 ها به طول n حاصل می‌شود.

نقاط نهایتاً متناوب بسیار زیادند و به‌آسانی تشخیص داده می‌شوند. برای مثال هر دنباله از نوع $111\dots s_n 111\dots s_0$ نهایتاً ثابت است درحالی که هر دنباله که نهایتاً تکرار شونده باشد، یک نقطه نهایتاً متناوب برای σ است.

نکته جالب دیگر درمورد σ این است که نقاط متناوب، یک زیرمجموعه چگال از Σ^2 تشکیل می‌دهند. برای اثبات چگال بودن $\text{Per}(\sigma)$ باید دنباله‌ای از نقاط متناوب τ_n بسازیم که به نقطه دلخواه $s = (s_0 \dots s_n, s_0 \dots s_n, \dots)$ در Σ^2 همگرا باشد. دنباله τ_n را به صورت $(\dots, s_0 \dots s_n, s_0 \dots s_n, \dots)$ یعنی دنباله تکرار شونده‌ای که درایه‌های آن تا درایه n با s یکسان است تعریف می‌کنیم. با استفاده از قضیه ۳.۶، $d[\tau_n, s] \leq \frac{1}{2^n}$ و درنتیجه $\tau_n \rightarrow s$.

البته همه نقاط Σ^2 متناوب یا نهایتاً متناوب نیستند. یک دنباله غیرتکرار شونده هرگز نمی‌تواند متناوب شود. در حقیقت، دنباله‌های غیرمتناوب بسیار بیشتر از دنباله‌های متناوب در Σ^2 هستند. در واقع، مدارهای غیرمتناوبی در Σ^2 موجودند که به صورت چگال در Σ^2 پخش می‌شوند به‌این معنی که بستار مدار آنها برابر با خود Σ^2 می‌شود. روش دیگر برای بیان این موضوع این است که نقاطی در Σ^2 موجودند که به هر دنباله داده شده در Σ^2 به اندازه دلخواه نزدیک می‌شوند. برای دیدن این مطلب، فرض کنید

$$s^* = (\dots | \text{نت} | \dots 1 \dots 0 \dots 1 | 1 \dots 0 \dots 1 | 0 \dots 1 | 1 \dots 0 | \dots)$$

۱-بلوکها ۲-بلوکها ۳-بلوکها

باشد که s^* با پشت سر هم قراردادن همه بلوکهایی متشكل از 0 ها و 1 ها با طول n ، سپس با طول $1+n$ وغیره تشکیل شده است.^۲ به‌وضوح، تکراری از σ موجود است که اگر روی s^* اعمال نشود، دنباله‌ای می‌دهد که با هر دنباله داده شده در تعداد دلخواهی از درایه‌ها برابر است. نگاشتهایی که دارای مدار چگال هستند، ترایای توپولوژیکی نامیده می‌شوند. بعضی از خواص σ را در اینجا بیان می‌کنیم:

قضیه ۶.۶

۱. عدد اصلی مجموعه $\text{Per}_n(\sigma)$ 2^n است.

^۲ منظور از n -بلوک، دنباله‌ای متناهی از 0 ها و 1 ها با طول n است

۲. در Σ_2 $\text{Per}(\sigma)$ چگال است.

۳. یک مدار چگال از σ در Σ_2 موجود است.

در بخش بعدی نشان می دهیم که نگاشت تغییرجا روی Σ_2 در واقع "همان" نگاشت F_μ روی Λ است.

دینامیک نمادین یکی از مباحث اصلی در این کتاب است و از این پس در این فصل به شکل های گوناگون ظاهر می شود از جمله وقتی که زیرتغییرجا از نوع متناهی را معرفی می کنیم و همچنین هنگامی که از نظریه آمیختگی برای توصیف دینامیک F_μ برای حالت \mathcal{H} استفاده می کنیم.

تمرین.

۱. قرار دهد

$$s = (001001001\dots),$$

$$t = (010101\dots),$$

$$r = (101010\dots).$$

مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف. $d[s, t]$

ب. $d[t, r]$

ج. $d[s, r]$

۲. همه دنباله هایی را که در Σ_2 تحت σ دارای تناوب ۳ هستند مشخص کنید. کدام دنباله ها تحت σ در یک مدار قرار می گیرند؟

۳. تمرین ۲ را برای تناوب های چهار و پنج انجام دهد.

۴. فرض کنید $'\Sigma$ متشکل از همه دنباله های Σ_2 با این خاصیت باشد: اگر $s_j = s_{j+1} = \dots = s_{j+4}$ ، آنگاه دوبار پشت سر هم قرار نگرفته باشد.

الف. نشان دهد $'\Sigma$ تحت σ پایاست و $'\Sigma$ یک زیرمجموعه بسته از Σ است.

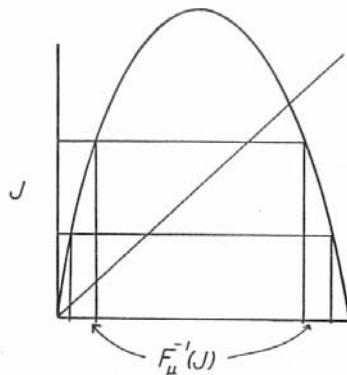
- ب. نشان دهید مجموعه نقاط متناوب تحت σ در Σ' چگال است.
- ج. نشان دهید یک مدار چگال در Σ' موجود است.
- د. چند نقطه ثابت برای σ , σ^2 و σ^3 در Σ' موجود است؟
- ه. یک فرمول بازگشتی برای یافتن نقاط ثابت σ^n بر حسب تعداد نقاط ثابت σ^{n-1} و σ^{n-2} بنویسید.
۵. فرض کنید Σ_N متشکل از همه دنباله‌های ساخته شده با اعداد طبیعی $1, 2, \dots, N$ باشد. یک تغییرجای طبیعی روی Σ_N موجود است.
- الف. σ چند نقطه متناوب در Σ_N دارد؟
- ب. نشان دهید σ یک مدار چگال در Σ_N دارد.
۶. فرض کنید $s \in \Sigma_2$. مجموعه پایدار s , یعنی $(W^s(s))$ را مجموعه دنباله‌هایی چون t درنظر بگیرید که $t \rightarrow s$. همه دنباله‌های t هنگامی که $t \rightarrow s$ واقع در مجموعه $(W^s(s))$ را مشخص کنید.

۷ تزویج توپولوژیکی

هدف این بخش توصیف ارتباط بین نگاشت تغییرجا که دربخش قبل درمورد آن بحث شد و نگاشت درجه دو $(x - 1)F_\mu(x) = \mu x$ برای μ های به اندازه کافی بزرگ است. یادآوری می‌کنیم که همه نقاط \mathbb{R} به جز نقاط مجموعه کانتور Λ تحت تکرارهای F_μ به $-\infty$ – ∞ میل می‌کنند. برای کامل کردن توصیف دینامیک F_μ باید تحديد F_μ به Λ را بشناسیم. یادآوری می‌کنیم که $I_1 \cup I_0 \subset \Lambda$. اگر $x \in \Lambda$, آنگاه تمام نقاط مدار x , داخل Λ و درنتیجه در داخل یکی از این دو بازه قرار می‌گیرند. بنابراین با توجه به اینکه تکرارهای مختلف x در کدامیک از این بازه‌ها قرار دارد می‌توانیم ایده‌ای کلی از رفتار مدار به دست آوریم. از این رو تعریف زیر را رائیه می‌کنیم.

تعریف ۱.۷ راهنامه نقطه x , دنباله‌ای است مانند (\dots, s_2, s_1, s_0) که $s_j = 0$ هرگاه $F_\mu^j(x) \in I_1$ و $F_\mu^j(x) \in I_0$ هرگاه $s_j = 1$.

بنابراین راهنامه نقطه x دنباله‌ای نامتناهی از 0 ها و 1 هاست. یعنی، (x) نقطه‌ای در فضای دنباله‌ای Σ_2 است. نگاشت S را به عنوان نگاشتی از Λ به Σ_2 درنظر می‌گیریم. این نگاشت خواص جالب متعددی دارد.



شکل ۱.۷. پیش تصویر بازه بسته J ، دو باره بسته است که یکی در I_1 و دیگری در I_1 قرار می‌گیرد.

قضیه ۲.۷ اگر $\sqrt{5} > 2 + \mu$ ، آنگاه $\Sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda$ یک همسان‌ریختی است.

برهان. ابتدا یک بهیک بودن S مورد بررسی قرار می‌گیرد. قرار دهد $x, y \in \Lambda$ و فرض کنید $x \neq y$. دراین صورت برای هر n ، $F_\mu^n(x)$ و $F_\mu^n(y)$ در یک طرف نقطه $\frac{1}{\mu}$ قرار می‌گیرند. این نشان می‌دهد که F_μ روی بازه بین $(F_\mu^n(x), F_\mu^n(y))$ یکنواست. درنتیجه همه نقاط این بازه در $I_1 \cup I_0$ باقی می‌مانند که با کلاً ناهمبند بودن Λ در تناقض است. برای اثبات پوشایی S ابتدا نماد زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید $I \subset J$ بازه بسته‌ای باشد. فرض کنید

$$F_\mu^{-n}(J) = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in J\}.$$

به ویژه، $F_\mu^{-1}(J)$ نمایانگر پیش تصویر J است. توجه کنید اگر $I \subset J$ بازه بسته‌ای باشد، آنگاه $F_\mu^{-1}(J)$ از دو زیربازه، یکی در I_1 و یکی در I_0 تشکیل می‌شود. شکل ۱.۷ را ببینید. حال فرض کنید $s = (s_0, s_1, s_2, \dots)$ را طوری بسازیم که $s(x) = S(x)$. برای انجام این کار فرض کنید $\{s_i\}_{i=0}^\infty$ و قرار دهید

$$\begin{aligned} I_{s_0, s_1, \dots, s_n} &= \{x \in I \mid x \in I_{s_0}, F_\mu(x) \in I_{s_1}, \dots, F_\mu^n(x) \in I_{s_n}\} \\ &= I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}). \end{aligned}$$

ادعا می‌کیم که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، I_{s_0, s_1, \dots, s_n} دنباله‌ای از بازه‌های بسته تودرتو و ناتهی تشکیل می‌دهد.

توجه کنید

$$I_{s_0 s_1 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}).$$

با استقراء می‌توانیم فرض کنیم که $I_{s_1 \dots s_n}$ زیربازه‌ای ناتهی است و با مطالب گفته شده در بالا، $(F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n}))^1$ از دو باره بسته یکی در I_1 و دیگری در I_1 تشکیل شده است. بنابراین فقط از یک باره بسته تشکیل شده است. این باره‌ها تودرتو هستند چون $I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1 \dots s_n})$

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0 \dots s_{n-1}} \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}) \subset I_{s_0 \dots s_{n-1}}.$$

درنتیجه

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 s_1 \dots s_n}$$

ناتهی است. توجه کنید که اگر $x \in I_{s_0} \cap I_{s_1 \dots s_n}$ آنگاه $F_\mu(x) \in I_{s_1}$ و $x \in \bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ والی آخر. پس $S(x) = (s_0 s_1 \dots)$ و این به رو بودن S را ثابت می‌کند.

توجه کنید که $\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n}$ از یک نقطه یکتا تشکیل شده است که این مطلب بلافاصله از یک به یک بودن S نتیجه می‌شود. به ویژه $\circ \rightarrow \infty$ $\rightarrow \text{diam } I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$.

در آخر برای اثبات پیوستگی S ، $x \in \Lambda$ انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که $S(x) = s_0 s_1 s_2 \dots$. قرار دهید $\epsilon > 0$. عدد n را طوری برگزینید که $\epsilon < \frac{1}{2^n}$. زیربازه‌های بسته $I_{t_0 t_1 \dots t_n}$ را که برای همه ترکیبات ممکن $t_0 \dots t_n$ تعریف شده‌اند درنظر بگیرید. همه این زیربازه‌ها مجرزا بوده و Λ در اجتماع آنها قرار می‌گیرد. از چنین زیربازه‌هایی به تعداد 2^{n+1} زیربازه وجود دارد و $I_{s_0 s_1 \dots s_n}$ یکی از آنهاست. بنابراین می‌توانیم δ را طوری انتخاب کنیم که $|x - y| < \delta$ با $S(x) = s_0 s_1 \dots s_n$ و $S(y) = s_0 s_1 \dots s_n$ باشد. بنابراین $|S(x) - S(y)| < \frac{1}{2^n} < \epsilon$. پس طبق قضیه ۳.۶،

$$d[S(x), S(y)] < \frac{1}{2^n} < \epsilon,$$

که پیوستگی S را ثابت می‌کند. به راحتی دیده می‌شود که S^{-1} نیز پیوسته است. درنتیجه S یک همسان‌ریختی است. \square

این قضیه نشان می‌دهد که از نظر مجموعه‌ای، Λ و Σ_2 یکسان هستند. مهم‌تر اینکه نگاشت کد S ، یک همارزی بین دینامیک نگاشت F_μ روی Λ و همچنین نگاشت σ روی Σ_2 ارائه می‌دهد. این موضوع قضیه بعدی است.

قضیه ۳.۷ $S \circ F_\mu = \sigma \circ S$

برهان: نقطه x در Λ را می‌توان به طور یکتا به وسیله دنباله‌های تودرتوی

$$\bigcap_{n \geq 0} I_{s_0 \dots s_n \dots}$$

که به وسیله راهنامه $S(x)$ تعیین می‌شوند تعریف کرد. اکنون

$$I_{s_0 \dots s_n} = I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n}(I_{s_n}),$$

وازآنجاکه $F_\mu(I_{s_0 \dots s_n}) = F_\mu(I_{s_0}) = I$

$$I_{s_0} \cap F_\mu^{-1}(I_{s_1}) \cap \dots \cap F_\mu^{-n+1}(I_{s_n}) = I_{s_0 \dots s_n}$$

نوشت. درنتیجه

$$\begin{aligned} SF_\mu(x) &= SF_\mu(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}) \\ &= S(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{s_0 \dots s_n}) \\ &= (s_0 s_1 \dots) = \sigma S(x). \end{aligned}$$

□

تعریف ۴.۷ فرض کنید $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow B : f : g : h$ دو نگاشت باشند. دو تابع f و g ، مزدوج توپولوژیکی نامیده می‌شوند هرگاه یک همسان‌ریختی چون $h : A \rightarrow B$ موجود باشد به‌طوری که $h \circ f = g \circ h$. همسان‌ریختی h یک تزویج توپولوژیکی نامیده می‌شود.

نگاشتهایی که مزدوج توپولوژیکی هستند کاملاً از نظر دینامیکی هم‌ارز هستند. برای مثال اگر f مزدوج توپولوژیکی با g تحت h بوده و p نقطه ثابتی برای f باشد آنگاه $h(p)$ نقطه ثابتی برای g است. در واقع $h(f(p)) = gh(p) = hf(p)$. به‌طور مشابه، h یک تناظر یک‌به‌یک بین $\text{Per}_n(f)$ و $\text{Per}_n(g)$ القاء می‌کند. همچنین نقاط نهایتاً متناوب و مدارهای مجانبی f از طریق h به مدارهای مشابهی در g منتقل می‌شوند و f ترایای توپولوژیکی است اگر و فقط اگر g چنین باشد. به‌ویژه از آنجاکه F_μ روی Λ مزدوج توپولوژیکی با تغییر جاست، ثابت می‌شود که نگاشت درجه دو خواص برجسته‌ای را که به راحتی برای σ در بخش قبل نتیجه گرفتیم، دارد. آنها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

قضیه ۵.۷ فرض کنید $F_\mu(x) = \mu x(1 - x) > 2 + \sqrt{5}$ باشد، درین صورت

۱. عدد اصلی مجموعه $\text{Per}_n(F_\mu)$ برابر با 2^n است.

۲. F_μ در Λ چگال است.

۳. F_μ مداری چگال در Λ دارد.

این قضیه، قدرت دینامیک نمادین و تزویج توبولوژیکی را نشان می‌دهد. در واقع محاسبه نقطه متناوب با متناوب n برای F_μ ناامید کننده است. ولی تزویج توبولوژیکی تضمین می‌کند که این مدارها موجودند و در واقع، دینامیک نمادین اندازه تقریبی پیچیدگی این مدارها را در Λ به دست می‌دهد. بنابراین این دو مطلب نشان می‌دهند که دینامیک نمادین، مدل دقیقی برای نگاشت درجه دو است.

تمرین.

۱. قرار دهید $c = x^2 + c$ ، آنگاه $1 < \mu$ و یکتا موجود است به طوری که Q_c با $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ مزدوج توبولوژیکی به وسیله نگاشت است.

۲. نقطه p یک نقطه غیرسرگردانتابع f است هرگاه برای هر بازه باز J شامل نقطه $x \in J$ و ${}^0 > n$ موجود باشند به طوری که $f^n(x) \in J$. توجه کنید که لازم نیست خود p به بازه J بازگردد. (f) را مجموعه نقاط غیرسرگردان f قرار دهید.

الف. نشان دهید مجموعه (f) یک مجموعه بسته است.

ب. اگر F_μ نگاشت درجه دو با $2 + \sqrt{5} > \mu$ باشد، نشان دهید $\Omega(F_\mu) = \Lambda(F_\mu)$.

ج. مجموعه (F_μ) را برای μ هایی که $3 \leq \mu < 0$ مشخص کنید.

۳. نقطه p یک نقطه بازگشتی برای f است هرگاه برای هر بازه باز J شامل $p, {}^0 > n$ موجود باشد به طوری که $f^n(p) \in J$. واضح است که همه نقاط متناوب، بازگشتی هستند.

الف. با درنظر گرفتن $2 + \sqrt{5} > \mu$ ، مثالی از یک نقطه بازگشتی غیرمتناوب برای F_μ ارائه دهید.

ب. مثالی از یک نقطه غیرسرگردان برای F_μ ارائه دهید که بازگشتی نباشد.

۴. ترتیب نقاط متناوب. فرض کنید Γ_n مجموعه دنباله‌های تکرارشونده با متناوب n در Σ باشد. چنین دنباله‌هایی را به‌طور طبیعی با دنباله متناهی s_n, s_{n-1}, \dots, s_1 از 0 ها و 1 ها یکی کنید. برای

مقدار $\sqrt{5} + 2 > \mu$ داده شده، هر عضو Γ_n با یک نقطه یکتا در I تحت تزویج توپولوژیکی متناظر می‌شود.

الف. نشان دهید ترتیب این نقاط در I مستقل از $\sqrt{5} + 2 > \mu$ است. فرض کنید $N(s_1, \dots, s_n)$ نمایانگر عددی بین $0 \leq n - 2^k \leq 1$ متناظر با این ترتیب باشد که از چپ به راست در نظر گرفته می‌شود. یعنی، $s_1 = \dots = s_n = N(0, \dots, 0)$. فرض کنید $B(s_1, \dots, s_n) = (a_1, \dots, a_n)$ که a_j برابر با 0 یا 1 است و

$$N(s_1, \dots, s_n) = a_1 \cdot 2^{n-1} + a_2 \cdot 2^{n-2} + \dots + a_n \cdot 2^0.$$

ب. با استفاده از استقراء نشان دهید B با فرمول (پیمانه ۲) داده می‌شود. برای مثال نقطه ثابت Γ_2 در Γ_3 می‌باشد. یعنی، $N(s_1, s_2, s_3) = (a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} a_1 &= s_1 = 1 \\ a_2 &= s_1 + s_2 = 0 \quad (\text{پیمانه ۲}) \\ a_3 &= s_1 + s_2 + s_3 = 1 \quad (\text{پیمانه ۲}). \end{aligned}$$

ج. با توجه به این ترتیب، همه نقاط Γ_n را برای $n = 2, 3, 4$ مشخص کنید.

د. الگوریتمی برای یافتن ترتیب نقاط Γ_n با دانستن ترتیب Γ_{n-1} ارائه دهید.

آشوب ۸

نگاشت درجه دو، پدیده‌های دینامیکی عجیبی را به نمایش می‌گذارد که فقط تا حدودی شناخته شده است، و آن عبارت است از رفتار آشوبناک مدارهای یک سیستم دینامیکی. تعاریف زیادی برای آشوب وجود دارد، از مفاهیم نظریه اندازه‌ای تصادف در نظریه ارگودیک گرفته تا رهیافت توپولوژیکی که در اینجا بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۸ نگاشت $J \rightarrow f$: ترایای توپولوژیکی نامیده می‌شود هرگاه برای هر جفت از مجموعه‌های باز $U, V \subset J$ ای موجود باشد به طوری که $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

به طور شهودی، یک نگاشت ترایایی توبولوژیکی شامل نقاطی است که نهایتاً تحت تکرارهای نگاشت از یک همسایگی به دلخواه کوچک به همسایگی دیگری می‌روند. درنتیجه نمی‌توان سیستم دینامیکی را به دو مجموعه باز مجزا که تحت نگاشت پایا بمانند تجزیه کرد. توجه کنید که اگر نگاشتی، شامل مدار چگال باشد، آنگاه بهوضوح ترایایی توبولوژیکی است. عکس آن نیز درست است (برای زیرمجموعه‌های فشرده از \mathbb{R} یا S^1) ولی از آنجاکه در برهان آن به نظریه رسته بئرنیاز داریم، آن را در اینجا اثبات نمی‌کنیم.

تعريف ۲.۸ نگاشت $J \rightarrow J : f$ وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد، هرگاه $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in J$ و هر همسایگی N از x ، نقطه‌ای مانند $y \in N$ و عدد طبیعی مانند $n \geq 0$ موجود باشند که $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

به طور شهودی، یک نگاشت، وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد، هرگاه نقاط به دلخواه نزدیک به x موجود باشند که تحت تکرارهای δ حداقل به اندازه δ از x دور شوند. تأکید می‌کنیم که لزومی ندارد همه نقاط نزدیک به x تحت تکرارهای نگاشت، از x دور شوند ولی باید حداقل یک نقطه با این خاصیت در هر همسایگی x موجود باشد. اگر یک نگاشت، وابسته حساس به شرایط اولیه باشد، آنگاه برای همه اهداف عملی، دینامیک نگاشت، با محاسبات عددی قابل بیان نیست. خطاهای کوچک در محاسبه، که معمولاً با گرد کردن به وجود می‌آید ممکن است تحت تکرار، بسیار بزرگ شود. نتایج محاسبات عددی برای یک مدار، بدون توجه به میزان دقیق بودن آن ممکن است تشابه با آنچه برای مدار واقعی اتفاق می‌افتد نداشته باشد.

مثال ۳.۸ نگاشت درجه دو $(1 - \mu x)^{\frac{1}{\mu}}$ روی Λ وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. برای دیدن این مطلب، δ را کمتر از قطر I_1 ، که I_1 ناحیه بین I_0 و I_1 است در نظر بگیرید. فرض کنید $x, y \in \Lambda$. اگر $y \neq x$ ، آنگاه $S(x) \neq S(y)$ و درنتیجه راهنمایه‌های x و y حداقل در یک مکان مثل مکان n با هم تفاوت دارند. ولی این بدان معنی است که $F_\mu^n(x)$ و $F_\mu^n(y)$ در دو سمت مخالف A می‌افتدند و بنابراین،

$$|F_\mu^n(x) - F_\mu^n(y)| > \delta.$$

مثال ۴.۸ یک دوران غیرگویا روی دایره از نظر توبولوژیکی ترایا است ولی از آنجاکه فاصله همه نقاط تحت تکرار ثابت می‌ماند، وابسته حساس به شرایط اولیه نیست.

اکنون به یکی از مطالب اصلی این کتاب یعنی مفهوم سیستم دینامیکی آشوبناک برمی‌گردیم. تعاریف مختلفی از آشوب در سیستم‌های دینامیکی به صورت قوی‌تر یا ضعیف‌تر از تعریف ما وجود دارد. ما این تعریف خاص را به این دلیل انتخاب می‌کنیم که درمورد تعداد زیادی از مثالهای مهم قابل استناد است و در اغلب موارد به راحتی قابل بررسی است.

تعریف ۵.۸ فرض کنید V بک مجموعه باشد. $V \rightarrow f$ روی V آشوبناک است هرگاه

۱. f وابستگی حساس به شرایط اولیه داشته باشد.

۲. f ترایای توپولوژیکی باشد.

۳. نقاط متناوب در V چگال باشند.

به طور خلاصه یک نگاشت آشوبناک از سه جزء تشکیل شده است: غیرقابل پیش‌بینی بودن، غیرقابل تجزیه بودن و به نوعی منظم بودن. یک سیستم آشوبناک به خاطر وابستگی حساس به شرایط اولیه غیرقابل پیش‌بینی است. چنین سیستمی به دلیل اینکه از نظر توپولوژیکی ترایاست غیرقابل تجزیه به دوزیرسیستم (دو زیرمجموعه باز پایا) که تحت f تأثیری روی هم ندارند، است. ولی در قلب این رفتار تصادفی نوعی نظم وجود دارد، مانند نقاط متناوب که چگال هستند.

مثال ۶.۸ نگاشت $S^1 \rightarrow S^1$: f با ضابطه $f(\theta) = 2\theta$ آشوبناک است. همچنان که دیدیم فاصله زاویه‌ای بین نقاط، تحت تکرار f دو برابر می‌شود. در اینجا f وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد. ترایای توپولوژیکی بودن نیز از اینکه هر کمان کوچک از S^1 ، درنهایت تحت f^n کل S^1 را می‌پوشاند و به ویژه هر کمان دیگری از S^1 را قطع می‌کند نتیجه می‌شود. چگال بودن نقاط متناوب، در بخش ۳.۱ نشان داده شده است. توجه کنید که این نگاشت، دارای حالتی قوی از وابستگی حساس به نام انبساطی بودن است.

تعریف ۷.۸ نگاشت $J \rightarrow J$: f انبساطی است هرگاه \forall موجود باشد به‌طوری که برای هر $x, y \in J$ که $|f^n(x) - f^n(y)| > \nu$ می‌باشد و $x \neq y$ موجود است به‌طوری که $|f^{n+1}(x) - f^{n+1}(y)| < \nu$.

تفاوت انبساطی بودن با وابستگی حساس به شرایط اولیه این است که در انبساطی بودن همه نقاط نزدیک، درنهایت حداقل به اندازه ν از هم دور می‌شوند.

مثال ۸.۸ نگاشتهای درجه دو $(1-x)^{\mu} F_{\mu}(x) = \mu x + \sqrt{5}$ آشوبناک هستند.

این مثال به‌طور مشخص یا مثال قبلی تفاوت دارد چون رفتار آشوبناک در این مثال فقط به زیربازه کوچکی از I یعنی مجموعه کانتور Λ محدود شده است. محدوده بزرگتری برای رفتار آشوبناک نگاشت درجه دو، در مثال زیر داده شده است.

مثال ۹.۸ آشوبناک است. $F_4(x) = 4x(1-x)$ روی بازه $[0, 1]$.

برهان. فرض کنید روی $S^1 = \{2\theta \mid \theta \in [0, \pi]\}$ نگاشتی $g(\theta) = 2\cos\theta$ باشد که در مثال ۶.۸ درمورد آن بحث شد. نگاشت $h_1 : S^1 \rightarrow [-1, 1]$ را با ضابطه $h_1(\theta) = \cos\theta$ درنظر بگیرید. به این معنی که h_1 فقط S^1 را به محور x ها تصویر می‌کند. فرض کنید $q(x) = 2x^2 - 1$. دراین صورت

$$\begin{aligned} h_1 \circ g(\theta) &= \cos(2\theta) \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= q \circ h_1(\theta). \end{aligned}$$

بنابراین $h_1 \circ g$ را با q نیم‌مزدوج می‌کند. از طرف دیگر q نیز با F_4 مزدوج توبولوژیکی است. درواقع، اگر $(1-t)h_2 = h_2 \circ q = h_2(t)$ باشد، آنگاه $F_4 \circ h_2 = h_2 \circ q = h_2(t)$ درنتیجه نمودار

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow h_1 & & \downarrow h_1 \\ [-1, 1] & \xrightarrow{q} & [-1, 1] \\ \downarrow h_2 & & \downarrow h_2 \\ [0, 1] & \xrightarrow{F_4} & [0, 1] \end{array}$$

به دست می‌آید. بلاfaciale نتیجه می‌شود که F_4 از نظر توبولوژیکی تراپا است. چون اگر U و V دو بازه باز در I باشند، می‌توانیم کمانهای باز \hat{U} و \hat{V} را در S^1 طوری انتخاب کنیم که تحت $h_2 \circ h_1$ به روی U و V تصویر شوند. از آنجاکه k موجود است که $F_4^k(U) \cap V \neq \emptyset$ و $F_4^k(\hat{U}) \cap \hat{V} \neq \emptyset$ برای اثبات وابستگی حساس به شرایط اولیه، توجه کنید که هر همسایگی U از I به \hat{U} از S^1 "بالا" برده می‌شود. از آنجاکه n موجود است که $(\hat{U})^{g^n}$ کل S^1 را می‌پوشاند بنابراین $(\hat{U})^{g^n} \cap U \neq \emptyset$ هم I را می‌پوشاند. درنتیجه نقاطی در U موجودند که حداقل به اندازه $\frac{1}{n}$ از x دور می‌شوند. درنهایت، چگال بودن نقاط متناوب برای g نتیجه می‌دهد که یک نقطه g -متناوب در \hat{U} موجود است. تصویر این نقطه در U مسلمانه است.

تکنیکهای معرفی شده در این مثال را می‌توان برای تولید مثالهای دیگری که روی I رفتار آشوبناک دارند به کار برد. چند جمله‌ای‌های چبیشف از جمله مثالهای کلاسیک مهم هستند که چنین رفتاری دارند. تمرینهای ۱ تا ۳ را ببینید.

توجه کنید از آنجاکه نگاشت h_1 تعریف شده در بالا در اکثر نقاط دویه یک است بنابراین همسان ریختی نیست. درنتیجه نشان نداده ایم که $2\theta = g(\theta)$ روی دایره با F_4 مزدوج توبولوژیکی است. به جای آن می‌گوییم این دو نگاشت نیم‌مزدوج هستند.

تمرین.

۱. با استفاده از مثال ۹.۸ نشان دهید $F(x) = 4x^3 - 3x$ روی بازه $[1, -1]$ آشوبناک است
(راهنمایی: نگاشت $\theta = g(\theta)$ را روی دایره S^1 درنظر بگیرید).

۲. نشان دهید $F(x) = 8x^4 - 8x^3 + 1$ روی $[1, -1]$ آشوبناک است.

۳. چندجمله‌ای‌های ذکر شده در تمرینهای ۱ و ۲ که به وسیله تصویر $g(\theta) = \cos n\theta$ به روی بازه $[1, -1]$ داده شده‌اند، با انجام بازنگاری مناسب، n امین چندجمله‌ای چبیشف نامیده می‌شوند. نشان دهید این چندجمله‌ای‌ها در معادله دیفرانسیل

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

صدق می‌کنند که α یک عدد صحیح مثبت است.

۴. نشان دهید $x = \tan T(x)$ روی کل محور حقیقی آشوبناک است علی‌رغم این نکته که روی مجموعه‌ای چگال، تکراری از T موجود است که تعریف نمی‌شود.

۵. نشان دهید که تابع زیر با تعریف

$$B(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 2x - 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

در $[1, 0]$ چگال است.

تمرینهای زیر مربوط به نگاشت خیمه با تعریف

$$T_2(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

است. توجه کنید که مقدار ماکسیمم T_2 برابر با ۱ است و در $\frac{1}{2}$ اتفاق می‌افتد. برای اینکه دینامیک T_2 را توسط دینامیک نمادین بیان کنیم باید ابهامی را که در نقاط گویا از نوع $\frac{p}{k}$ برای عدد صحیح p اتفاق می‌افتد برطرف کنیم. برای مثال $\frac{1}{2}$ را می‌توان به صورت (...11000...1000...) یا (...1000...000...) نمایش داد. برای از بین بردن این مشکل، هر دو دنباله از نوع (...1000...s_{k-1} * 1000...s_k) را که در آن * برابر با ۰ است یکی می‌کنیم. برای مثال دو دنباله (...1000...1101000) و (...111000...11110) نمایشگر یک نقطه هستند. فرض کنید Σ نمایانگر Σ پس از این یکی کردن باشد.

۶. اگر $S(x)$ نگاشتی باشد که در بخش ۷.۱ تعریف شده است، نشان دهید $\Sigma' \rightarrow \Sigma : I \rightarrow S$ یک به یک است.

۷. نشان دهید $. \sigma \circ S = S \circ T_2$

۸. نشان دهید T_2 دارای دقیقاً 2^n نقطه متناوب با تناوب n است.

۹. نشان دهید T_2 روی I آشوبناک است.

۱۰. نشان دهید T_2 با نگاشت درجه دو $F_4(x) = 4x(1-x)$ مزدوج توپولوژیکی است.

۱۱. یک نگاشت تکه تکه خطی روی $[1, 0]$ بسازید به طوری که با نگاشت $F(x) = 4x^3 - 3x$ f روی $[1, 0]$ مزدوج توپولوژیکی باشد.

۹ پایداری ساختاری

یکی از مفاهیم مهم در سیستم‌های دینامیکی، پایداری یا مقاومت سیستم در برابر تغییرات کوچک یا اختلال است. این، مفهوم پایداری ساختاری است که در این بخش به آن می‌پردازیم. به طور خلاصه، نگاشت f پایدار ساختاری است در صورتی که هر نگاشت "نزدیک" به آن مزدوج توپولوژیکی با f بوده و بنابراین دارای همان دینامیک باشد. مسلماً لازم است دقیقاً بیان شود که نزدیک بودن به چه معنی است. ایده اصلی بسیار ساده است: اگر بدون توجه به اینکه چگونه f را کمی دچار اختلال کنیم یا کمی آن را تغییر دهیم، یک سیستم دینامیکی هم‌ارز به دست آوریم، آنگاه ساختار دینامیکی f پایدار است. در اینجا هم‌ارزی به معنی تزویج توپولوژیکی است. اگر f و g مزدوج توپولوژیکی باشند می‌نویسیم $g \sim f$.

مفهوم پایداری ساختاری کاربردهای بسیار مهمی دارد. فرض کنید سیستم دینامیکی مورد نظرمان از یک معادله دیفرانسیل یا از یک سیستم فیزیکی واقعی حاصل شده باشد. خود این سیستم در واقع فقط مدلی از پدیده‌ای واقعی است: مفروضات خاصی باید در نظر گرفته شده و تقریبها خاص یا خطاهای تجربی معرفی شوند. درنتیجه خود سیستم دینامیکی اگرچه جواب دقیقی از مدل فیزیکی است ولی فقط تقریبی از واقعیت است چون خود مدل دارای این عیب است. حال اگر سیستم دینامیکی مورد نظر از لحاظ ساختاری پایدار نباشد، آنگاه خطاهای کوچک و تقریبها در مدل، ممکن است تغییرات عمده‌ای در جوابها واقعی سیستم ایجاد کند. به این معنی که "جوابها" ممکن است به صورت اساسی نادرست بوده یا ناپایدار باشند. از طرف دیگر اگر سیستم دینامیکی مورد نظر، از نظر ساختاری پایدار باشد، آنگاه خطاهای کوچک معرفی شده در تقریبها و خطاهای تجربی ممکن است

هیچ تأثیری نداشته باشد: جوابهای سیستم مدل ممکن است هم ارزیا مزدوج توپولوژیکی با جواب واقعی باشند.

این بدان معنی نیست که تنها سیستم‌های فیزیکی جالب، آنهایی هستند که از نظر ساختاری پایدارند. در حقیقت اکثر سیستم‌های دینامیکی که از مکانیک کلاسیک حاصل می‌شوند دارای پایداری ساختاری نیستند. همچنین مثالهای ساده‌ای از سیستم‌ها مانند سیستم لورنتز در هوشناسی موجودند که از پایداری ساختاری "فاصله" دارند. این سیستم‌ها را حتی نمی‌توان طوری تقریب زد که به سیستم‌های پایداری تبدیل شوند. با این حال مفهوم پایداری ساختاری کاربردهای بسیار مهمی در نظریه سیستم‌های دینامیکی دارد.

برای شروع بحث پایداری ساختاری، باید مفهوم "نزدیک بودن" دوتابع را دقیقاً مشخص کیم.

تعریف ۱.۹ فرض کنید f و g دو نگاشت باشند. در این صورت C^r -فاصله بین f و g که به صورت $d_r(f, g)$ نوشته می‌شود عبارت است از

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - g(x)|.$$

C^r -فاصله یعنی $d_r(f, g)$ به صورت

$$d_r(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(|f(x) - g(x)|, |f'(x) - g'(x)|, \dots, |f^{(r)}(x) - g^{(r)}(x)| \right)$$

تعریف می‌شود.

به طور شهودی، دو نگاشت به هم C^r -نزدیک هستند هرگاه r مشتق اول آنها تفاوت بسیار کمی داشته باشند. همچنین می‌توان C^r -فاصله بین دو نگاشت روی یک بازه $\mathbb{R} \subset J$ را با تحدید مناسب x و y در نظر بگیریم. خواننده باید توجه کند که d_r متریک مفیدی روی مجموعه همه توابع نیست. در واقع، از آنجاکه خط حقیقی بی کران است به راحتی دو نگاشت می‌توانند بی نهایت از هم دور باشند. حتی اگر این مشکل را کنار بگذاریم، توپولوژی حاصل روی مجموعه توابع، توپولوژی مطلوبی نیست. بنابراین از C^r -فاصله فقط برای اندازه‌گیری نزدیکی دوتابع و نه به عنوان یک متریک سرتاسری برای همه توابع استفاده می‌کنیم.

مثال ۲.۹ توابع C^r دارای $f(x) = 2x$ و $g(x) = (2 + \epsilon)x$ فاصله نامتناهی هستند ولی $f(x) = 2x + \epsilon$ و $g(x) = 2x$ برای همه x دارای C^r -فاصله‌ای به اندازه ϵ هستند. فرض کنید $J = [0, 10]$. در این صورت $g(x) = (2 + \epsilon)x$ و $f(x) = 2x$ دارای C^r -فاصله‌ای به اندازه 10ϵ (در واقع دارای C^r -فاصله‌ای به اندازه 10ϵ) روی بازه J هستند.

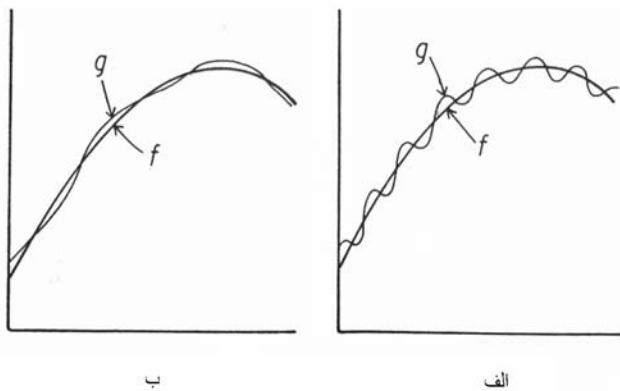
ما ابتدا با نگاشتهای C^1 -نزدیک یا حداکثر C^2 -نروداری بین $J \rightarrow J$ دارای C^r پایداری ساختاری است. C^1 -نروداری می‌شویم. شکل ۱.۹ تفاوت C^1 -نروداری بودن، C^2 -نروداری بودن و C^r -نروداری را نشان می‌دهد. اکنون می‌توان پایداری ساختاری C^r را تعریف کرد.

تعریف ۳.۹ فرض کنید $J \rightarrow J$: f . گوییم نگاشت f روی J دارای C^r -پایداری ساختاری است هرگاه $\epsilon > 0$ ای موجود باشد به طوری که اگر برای $J \rightarrow J$: g داشته باشیم $d_r(f, g) < \epsilon$ آنگاه f و g مزدوج توپولوژیکی باشند.

مثال ۴.۹ قرار دهید $x = \frac{1}{x}$. آنگاه L روی \mathbb{R} دارای C^1 -پایداری ساختاری است. برای اثبات این مطلب باید $\epsilon > 0$ ای ارائه دهیم به طوری که اگر $\epsilon < d_1(L, g)$ آنگاه L و g مزدوج توپولوژیکی باشند. ادعا می‌کنیم این موضوع برای هر $\frac{1}{x} < \epsilon$ درست است. چون اگر $\epsilon < d_1(L, g)$ آنگاه باید برای هر $x \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $|g'(x)| < \epsilon$. به ویژه، $(g(x))'$ همه جا صعودی است. همچنین توجه کنید $(g(x))'$ دارای یک نقطه ثابت جاذب p در \mathbb{R} است و همه نقاط \mathbb{R} تحت تکرار به p میل می‌کنند. اینکه g دارای یک نقطه ثابت یکتاست از قضیه مقدار میانگین نتیجه می‌شود: بین هردو نقطه ثابت w و b دارای g باید نقطه‌ای با مشتق ۱ قرار گیرد که غیرممکن است. به طور معادل از آنجاکه $1 < |g'(x)|$ و g یک انقباض سرتاسری است.

این نشان می‌دهد که L و g دارای دینامیک مشابهی هستند که ایده اصلی در پایداری ساختاری است. برای اینکه کاملاً دقیق باشیم باید یک تزویج توپولوژیکی بین L و g ارائه دهیم. برای این کار مفهوم دامنه اساسی را معرفی می‌کنیم و آن را با یک مثال انجام می‌دهیم. جفت بازه‌های $10 < |x| < 5$ را در نظر بگیرید. توجه کنید L -مدار هر نقطه در \mathbb{R} (به جز 0) دقیقاً یک بار وارد این مجموعه می‌شود. برای g نیز می‌توانیم دامنه اساسی مشابهی پیدا کنیم: درواقع، به راحتی دیده می‌شود که بازه‌های $10 < x < 10$ و $(-10 < x < -10)$ دارای خواص یکسانی هستند (تمرین ۱ را ببینید).

می‌توان یک تزویج h ساخت به طوری که $h \circ L = g \circ h$. ابتدا h را طوری تعریف کنید که $[5, 10] \rightarrow [5, 10]$: h و $[-10, -5] \rightarrow [-10, g(-10)]$: h خطی باشد یعنی نمودار آن یک خط راست باشد. لازم است h صعودی باشد. بنابراین $h(\pm 10) = \pm 10$. (توجه کنید که هر همسان‌ریختی صعودی دیگر را هم می‌توان در نظر گرفت). تعریف h را به صورت زیر کامل می‌کنیم. فرض کنید $n \in \mathbb{Z}$. $x \neq 0$ ای موجود است به طوری که $L^n(x)$ متعلق به دامنه اساسی L باشد. درنتیجه $h \circ L^n(x)$ خوش‌تعریف است. اکنون باید قرار دهیم $h(x) = g^{-n} \circ h \circ L^n(x)$. توجه کنید که $h(x)$ نیز خوش‌تعریف است و از آنجاکه g یک همسان‌ریختی است، g^{-n} نیز خوش‌تعریف است. پس به موضع $h \circ L^n(x) = h \circ L^n \circ h(x) = g^n \circ h(x)$ درواقع، اگر ساختار مشابهی را به جای x برای $L(x)$ به کار ببریم، نتیجه می‌گیریم که $(h \circ L(x)) = h \circ L(x)$ و این همان چیزی است که می‌خواستیم. درنهایت $(h \circ L(x))$ را نقطه ثابت g تعریف کنید. به راحتی دیده می‌شود که h یک همسان‌ریختی است.



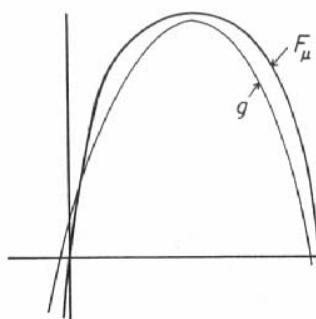
شکل ۱.۹. در شکل الف f و g ، C^1 -نزدیک هستند ولی C^2 -نزدیک نیستند.
در شکل ب f و g ، C^1 -نزدیک هستند ولی C^2 -نزدیک نیستند.

به طور شهودی، هر مدار، البته به جز نقاط ثابت، دامنه اساسی را دقیقاً یک بار قطع می‌کند. بنابراین می‌توانیم یک تزویج به هر صورتی که بخواهیم روی دامنه اساسی تعریف کنیم و سپس آن را به تنها صورت ممکن یعنی تکرار تابع گسترش دهیم. در این صورت فقط این سوال باقی می‌ماند که چطور تزویج را به نقاطی که مدار آنها وارد دامنه اساسی نمی‌شود گسترش دهیم.

به نگاشت درجه دو $(x - 1 - \mu x)F_\mu(x) = ux$ بازمی‌گردیم. همان‌گونه که در بخش ۱ دیدیم همه نقاط تحت تکرارهای این تابع به ∞ می‌کنند به جز نقاط مجموعه‌ای مانند Λ که در آن نقاط F_μ مزدوج توپولوژیکی با یک تغییرجاست. ادعا می‌کنیم که اگر μ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه F_μ ، دارای پایداری ساختاری C^2 است. این ادعا با ورود دیگری در بحث دامنه اساسی، اثبات می‌شود.

این حالت پیچیدگی بیشتری دارد، ولی اجازه دهید جزئیات را شرح دهیم. ابتدا فرض می‌کنیم $\sqrt{\delta} < 2 + \mu$. بنابراین روی $I_1 \cup I_0$ مقدار $|F'_\mu(x)| > 1/\epsilon$ را طوری به دست می‌آوریم که اگر g C^2 -نزدیک به F_μ باشد، آنگاه g دارای همان دینامیک F_μ باشد. ابتدا ϵ_1 را آنقدر کوچک انتخاب می‌کنیم که اگر g C^2 -نزدیک به F_μ باشد، آنگاه $\langle g, g'' \rangle < \epsilon_1$ ، یعنی تقرن نمودار g رو به پایین باشد. این کار از آنجا امکان‌پذیر است که $F''_\mu \equiv -2\mu$. حال $\epsilon_2 < \epsilon_1$ را آنقدر کوچک انتخاب کنید که اگر g C^1 -نزدیک به F_μ باشد، آنگاه g فقط دارای دو نقطه ثابت α و β باشد به‌طوری که

$$\alpha < \beta . 1$$



شکل ۲.۹. نمودارهای F_μ و g . C^2 -نزدیک به هم هستند.

$$g'(\alpha) > 1.2$$

$$g'(\beta) < -1.3$$

با توجه به تقریب نمودار g ، می‌توان ϵ_2 را طوری انتخاب کرد که g حداقل دو نقطه ثابت باشد. همچنین با ساختن g به گونه‌ای که C^2 -نزدیک به F_μ باشد می‌توان تضمین کرد که g حداقل دو نقطه ثابت دارد. درنهایت شرایط $'$ در نقاط ثابت توسط نگاشت g که دارای فاصله C^1 از F_μ است کنترل می‌شود.

توجه کنید که g دارای یک نقطه بحرانی یکتاًی c است و نقاط α' و β' موجودند به‌طوری‌که $g(\alpha') = \alpha$ و $g(\beta') = \beta$. نقاط α و α' همان نقشی را دارند که 0 و 1 برای F_μ داشتند. در آخر $\epsilon_2 < \epsilon$ را به گونه‌ای انتخاب کنیم به‌طوری‌که اگر g به صورت C^1 -نزدیک به F_μ باشد، آنگاه $(\alpha')^{-1} g^{-1}$ متشکل از یک جفت نقطه a و a_1 است و در واقع، اگر $x \in [\alpha, a_0] \cup [a_1, \alpha']$ آنگاه $1 > |g'(x)|$. بنابراین اگر g به صورت C^2 -نزدیک (و درنتیجه به صورت C^1 و C^0 -نزدیک) به F_μ باشد، آنگاه نمودار g همه خواص کیفی نمودار F_μ روی $[\alpha, \alpha']$ را دارد. شکل ۲.۹ را ببینید. به‌ویژه F_μ و g دارای دینامیک مشابهی هستند. به راحتی نتیجه می‌شود که اگر $\alpha < x < a$ آنگاه $-\infty < g^n(x) < \infty$. به‌طور مشابه اگر $x < a_1$ یا اگر $x \in (a_0, a_1)$ آنگاه $-\infty < g^n(x) < \infty$. روند استقرایی مشابهی روی تصویرهای وارون (a_0, a_1) همانند بخش ۵.۱ نشان می‌دهد که همه نقاط به جز آنها که در مجموعه کانتور Λ_g قرار می‌گیرند درنهایت تحت تکرارهای g به $-\infty$ میل می‌کنند. همانند بحثی که در بخش ۵.۱ انجام شد، g روی Λ_g با یک خودریختی تغییرجا مزدوج توبولوژیکی است. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

برای اثبات $g \sim F_\mu$ باید دامنه‌های اساسی هردوی F_μ و g را برای تعریف کردن تزویج بسازیم

که به صورت زیر انجام می‌شود. ابتدا x_0 ای انتخاب کنید که $(g(x_0), F_\mu(x_0)) < \min(g(x_0), F_\mu(x_0))$. بازه‌های $(F_\mu(x_0), x_0)$ و $(g(x_0), x_0)$ دامنه‌های اساسی برای F_μ روی \mathbb{R}^- و برای g روی $(-\infty, \alpha)$ هستند. تزویج را می‌توان به دلخواه روی $(F_\mu(x_0), x_0)$ تعریف کرد و آن را با $h \circ F_\mu = g \circ h$ به کل \mathbb{R}^- گسترش داد.

سپس h را به بازه (α, ∞) و درنهایت به هریک از A_n ‌ها به طور طبیعی گسترش می‌دهیم. توجه کنید که روی A_n باید دقت شود چون F_μ روی این بازه دویه‌بک است. هنگامی که h روی کل \mathbb{R}^- تعریف شود، با تنها راه ممکن که h همسان‌ریختی شود آن را به Λ گسترش می‌دهیم. جزئیات خسته‌کننده را به خواننده واگذار می‌کنیم.

از سوی دیگر، با استفاده از این موضوع که هر دوی g روی Λ_g و F_μ روی Λ_{F_μ} با تغییرجا مزدوج توبیولوژیکی هستند نتیجه می‌شود که روی این مجموعه‌ها با هم مزدوج هستند. با بحث دامنه‌های اساسی در بالا می‌توان تزویج را به خارج از این بازه‌ها نیز گسترش دهد. در هر کدام از حالتها، ثابت کرده‌ایم:

قضیه ۵.۹ نگاشت درجه دو $(1 - x)F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ دارای پایداری ساختاری C^2 است هرگاه $\mu > 2 + \sqrt{5}$.

ممکن است سوال مهم‌تر از اینکه چه موقع یک تابع دارای پایداری ساختاری است، سوال عکس آن باشد: چه موقع یک تابع پایداری ساختاری ندارد؟ یکی از اصلی‌ترین روش‌هایی که ممکن است پایداری ساختاری را از بین برد هذلولوی نبودن است.

مثال ۶.۹ فرض کنید ϵ فرض کنید $G_\epsilon(x) = x - x^2 + \epsilon G_\epsilon(x) = x - x^2$. در این صورت $T_\lambda(x) = x - \lambda x$. توجه کنید که $G_\epsilon(0) = 0$ و $G'_\epsilon(0) = 0$ ، بنابراین یک نقطه ثابت غیرهذلولوی برای G_ϵ است. بهوضوح، $G_\epsilon(x)$ به طور C^2 نزدیک به G_ϵ است. اگر $\epsilon > 0$ دارای دو نقطه ثابت است و اگر $\epsilon < 0$ نقطه ثابتی ندارد. درنتیجه، G_ϵ دارای دینامیک مشابه G نیست و بنابراین G_ϵ دارای پایداری ساختاری نیست.

مثال ۷.۹ فرض کنید $T_\lambda(x) = x^3 - \lambda x$. برای $1 < \lambda \leq -1$ دارای سه نقطه ثابت $\pm \sqrt{\lambda + 1}$ است. همه نقاط بین $\pm \sqrt{\lambda + 1}$ به نقطه ثابت جذب می‌شوند. هنگامی که $\lambda > 1$ ، این مطلب دیگر درست نیست. نقطه‌ای همانند x در بازه $[-\sqrt{\lambda + 1}, \sqrt{\lambda + 1}]$ هست به طوری که $T_\lambda(x) = -x$ ، یعنی، نمودار T_λ خط $y = -x$ را قطع می‌کند. از آنجاکه $T_\lambda(-x) = -T_\lambda(x)$ ، داریم $T_\lambda(-x) = x$ ، بنابراین x نقطه‌ای از تناوب ۲ است. درنتیجه، دینامیک T_λ برای $1 < \lambda \leq -1$ و $\lambda > 1$ دینامیک

متفاوت است و بنابراین T_1 دارای پایداری ساختاری نیست. همچنین T_{-1} نیز پایداری ساختاری ندارد. تمرین ۲ را ببینید. توجه کنید که $-1 = (0)T'_1$ و درنتیجه هنگامی که پایداری ساختاری از بین می‌رود، مجدداً نقطه ثابت غیرهذلولوی است.

یک نقطه ثابت هذلولوی برای تابع f ، دارای پایداری ساختاری موضعی C^1 است. یعنی یک همسایگی از نقطه ثابت و یک ϵ موجود است به طوری که هرگاه نگاشت g ، در این همسایگی به طور C^1 نزدیک به f باشد، آنگاه، f روی این همسایگی مزدوج توبولوژیکی با g است. این نکته به وسیله یک سری از تمرینات در زیر نشان داده می‌شود. در این مسیر، صورت یک بعدی قضیه هارتمن^۳ را بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۹ فرض کنید p یک نقطه ثابت هذلولوی برای f بوده و $\lambda = f'(p)$ که $|\lambda| \neq 0$. در این صورت همسایگی‌های U از p و V از $\lambda x = L(x)$ موجودند به طوری که f را روی U با نگاشت خطی $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ مزدوج می‌کنند.

بنابراین یک نگاشت نزدیک یک نقطه ثابت هذلولوی همیشه به طور موضعی با مشتق خودش مزدوج است. این مطلب کمک می‌کند که بتوانیم توضیح دهیم که چرا در تعریف تزویج توبولوژیکی، نگاشت تزویج فقط کافیست همسان‌ریختی باشد و دیفیومورفیسم بودن ضروری نیست. فرض کنید $g = h \circ f \circ h^{-1}$ یک دیفیومورفیسم باشد. آنگاه $g'(p) = h'(f(p)) \cdot f'(p) \cdot (h^{-1})'(p) = \lambda$.

$$\begin{aligned} g'(h(p)) &= h'(f(p)) \cdot f'(p) \cdot (h^{-1})'(h(p)) \\ &= h'(p) \cdot \lambda \cdot \frac{1}{h'(p)} \quad (\text{پیمانه } ۲) \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

بنابراین ضریب λ در نقطه ثابت تحت تزویج‌های مشتق‌پذیر حفظ می‌شود. همان‌گونه که دیدیم نگاشتها ممکن است علی‌رغم داشتن ضرایب مختلف در نقاط ثابت خود، دارای رفتار دینامیکی مشابهی باشند. بنابراین صورت ضعیف‌تر تزویج توبولوژیکی برای اهداف ما مناسب‌تر است.

تمرین.

۱. فرض کنید $g(x)$ همانند مثال ۴.۹ است. نشان دهید که بازه‌های $10 \leq x < g(10)$ و $-10 \leq x < g(-10)$ یک دامنه اساسی برای g می‌سازد.

۲. فرض کنید $T_{-1}(x) = x^3 + x$. نشان دهید T_{-1} دارای پایداری ساختاری نیست.

۳. فرض کنید $T_\lambda(x) = x^3 - \lambda(x)$. نشان دهید T_λ برای $\lambda > 0$ دارای پایداری ساختاری است.

۴. نشان دهید اگر $0 < \lambda_0, \lambda_1 < 1$ ، آنگاه T_λ مزدوج توبولوژیکی با T_{λ_1} است.

۵. نشان دهید $F_4(x) = 4x(1-x)$ دارای پایداری ساختاری نیست.

۶. ثابت کنید که $S(x) = \sin(x)$ دارای پایداری ساختاری نیست.

۷. نشان دهید اگر از طریق نگاشت h تزویج g $f \sim f$ دارد و f دارای یک ماکسیمم نسبی در x_0 باشد، آنگاه g دارای یک ماکسیمم یا مینیمم نسبی در $(h(x_0))$ است.

۸. با ارائه یک مثال نشان دهید ممکن است از طریق h داشته باشیم $g \sim f$ و f یک ماکسیمم نسبی برای f و $h(x_0)$ یک مینیمم نسبی برای g باشد.

۹. فرض کنید $S_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$. اگر $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ، ثابت کنید که $S_{\lambda_1} \sim S_{\lambda_2}$.

۱۰. نشان دهید هیچ‌کدام از S_{λ_1} و S_{λ_2} دارای پایداری ساختاری نیستند.

۱۱. می‌توانیم پایداری ساختاری خطی را برای نگاشتهای خطی با جایگزینی مفهوم تزویج خطی به جای تزویج توبولوژیکی تعریف کنیم. دونگاشت $T_1, T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مزدوج خطی هستند اگر یک نگاشت خطی L موجود باشد به‌طوری که $T_1 \circ L = L \circ T_2$. نگاشت $T_1(x) = ax$ پایدار خطی نامیده می‌شود، هرگاه یک همسایگی N حول a موجود باشد به‌طوری که اگر $b \in N$ آنگاه $T_2(x) = bx$ مزدوج خطی با T_1 است. همه نگاشتهای پایدار خطی را بیابید و همه اعضای یک رد تزویج داده شده را مشخص کنید.

۱۲. (قضیه هارتمن). فرض کنید p یک نقطه ثابت هذلولوی برای f با $\lambda = f'(p)$ و $\lambda \neq 0$ باشد. نشان دهید همان‌گونه که در قضیه ۸.۹ توصیف شده است f مزدوج توبولوژیکی موضعی با نگاشت مشتق خودش، یعنی $\lambda x \mapsto f'(x)$ است.

۱۳. تمرینهای ۱۱ و ۱۲ را ادغام کنید و نشان دهید هر اختلال کوچک در نگاشت f در نزدیک نقطه ثابت هذلولوی، مزدوج توبولوژیکی موضعی با f است.

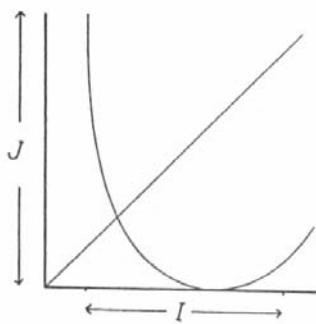
۱۴. فرض کنید $[1, 0] \rightarrow f : \mathbb{R}$ یک دیفیومورفیسم باشد. نشان دهید اگر $f'(x) > 0$, آنگاه f دارای فقط یک نقطه ثابت بوده و هیچ نقطه متناوبی ندارد. نشان دهید اگر $f'(x) < 0$, آنگاه f دارای یک نقطه ثابت یکتاست و سایر نقاط متناوب دارای تناوب دو هستند.
۱۵. یک دیفیومورفیسم $[1, 0] \rightarrow f : \mathbb{R}$, مورس-اسمیل^۴ نامیده می‌شود اگر f فقط دارای نقاط متناوب هذلولوی باشد. (توجه کنید از آنجاکه f پوشاست، نقاط انتهایی $[1, 0]$ لزوماً متناوب هستند). نشان دهید یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل فقط دارای تعداد متناهی نقطه متناوب است.
۱۶. نشان دهید که یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل روی $[0, 1]$ دارای پایداری ساختاری است.
۱۷. نشان دهید $x^{\frac{1}{3}} + x^3 = f(x)$ یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل روی بازه $[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}]$ است.

۱۰ قضیه شارکوفسکی

در این بخش، یک قضیه مهم منسوب به شارکوفسکی را اثبات می‌کنیم. این قضیه فقط برای نگاشتهای روی خط حقیقی برقرار است ولی علی‌رغم مفروضات ضعیف (f فقط پیوسته فرض می‌شود) دارای نتایج قوی است. این قضیه، اولین قضیه بزرگ ماست و مطالب این بخش کمی "سنگین‌تر" از بخش‌های قبل است. برای شروع کار و برای تأکید اهمیت نقاط دارای تناوب \mathbb{R}^3 ، یک حالت خاص را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۱۰ فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow f : \mathbb{R}$ پیوسته باشد. فرض کنید f یک نقطه متناوب با تناوب سه داشته باشد. در این صورت f دارای نقاط متناوب از هر توابعی است.

برهان. برهان به دو ملاحظه ساده وابسته است. اول، اگر I و J بازه‌های بسته‌ای به صورت $I \subset J$ و $J \subset f(I)$ باشند، آنگاه f دارای یک نقطه ثابت در I است. البته این یک نتیجه ساده از قضیه مقدار میانی است. شکل ۱.۱۰ را ببینید. دو مین ملاحظه این است: فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n بازه‌های بسته‌ای باشند و برای $i = 0, \dots, n-1$ ، $A_i \supset f(A_{i+1})$. در این صورت حداقل یک زیربازه J از A_0 موجود است که به روی A_1 نگاشته شود. زیربازه مشابهی از A_1 موجود است که به روی A_2 نگاشته شود و بنابراین زیربازه $J \subset A_1 \subset f(J_1) = A_2$ موجود است که به ترتیب به توی A_i های مختلف نگاشته می‌شوند. روند یک دنباله تودرتو از بازه‌ها به دست می‌آید که به ترتیب به توی A_i های مختلف نگاشته می‌گوییم از این‌رو، یک نقطه $x \in A$ موجود است به‌طوری که به ازای هر i ، $f^i(x) \in A_i$. در این حالت می‌گوییم



شکل ۱.۱۰

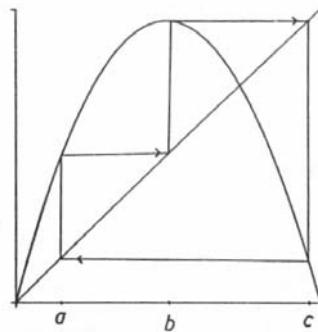
$f(A_i)$ ، مجموعه A_{i+1} را می پوشاند. تمرین ۱ را ببینید.

برای اثبات قضیه، فرض کنید $f(a) = b$ و $f(b) = c$ و $a, b, c \in \mathbb{R}$. فرض می کنیم که $a < b < c$. تنها حالت دیگر، $f(a) = c$ به صورت مشابه انجام می شود. این حالت در نگاشت درجه دو برای μ های به اندازه کافی بزرگ و حتی برای بعضی مقادیر $\mu > 4$ اتفاق می افتد. در حقیقت، مورد اخیر را هنگامی که حالت $3.839 = \mu$ با جزئیات در بخش ۱۳.۱ مطالعه شود، بررسی خواهیم کرد. شکل ۲.۱۰ را ببینید.

فرض کنید $I_0 = [a, b]$ و $I_1 = [b, c]$. توجه کنید که مفروضات ما ایجاب می کند $I_0 \subset f(I_0)$ و $I_1 \subset f(I_0)$. نمودار f نشان می دهد که f لزوماً دارای نقطه ثابت بین b و c است. به طور مشابه f^2 نیز دارای نقاط ثابتی بین a و b است و به سادگی می توان دید که حداقل یکی از این نقاط باید دارای تناوب دو باشد. پس قرار دهید $n \geq 2$ ؛ هدف ما این است که یک نقطه متناوب که دوره تناوب آن عدد اول $n > 3$ باشد تولید کنیم.

با استقراء، دنباله تودرتو از بازه های $A_0, A_1, \dots, A_{n-2} \subset I_1$ را به صورت زیر تعریف می کنیم. قرار دهید $I_1 = A_0$. از آنجاکه $I_1 \subset f(I_0)$ ، یک زیربازه $A_1 \subset A_0$ موجود است به طوری که $f(A_1) = A_0 = I_1$. پس یک زیربازه $A_2 \subset A_1$ موجود است به طوری که $f(A_2) = A_1 = I_1$. دراین صورت $f^2(A_2) = A_0 = I_1$. با ادامه این روند، زیربازه ای مانند $A_{n-2} \subset A_{n-3}$ می یابیم که $f(x), f^2(x), \dots, f^{n-2}(x) \in A_0$. آنگاه $f(A_{n-2}) = A_{n-3}$ مطابق ملاحظه دوم اگر $x \in A_{n-2}$ باشد. در واقع، $f^{n-2}(A_{n-2}) = A_0 = I_1$.

حال از آنجاکه $f(I_1) \subset I_0$ ، زیربازه $A_{n-1} \subset A_{n-2}$ وجود دارد به طوری که $I_0 = f(I_1)$. دراین صورت بالاخره چون $f^n(A_{n-1}) \subset I_0$ پس $f^n(A_{n-1}) \subset f(I_1)$ ، بنابراین $f^n(A_{n-1}) \subset I_1$ را می پوشاند. از ملاحظه اول نتیجه می شود که f^n دارای یک نقطه ثابت p در A_{n-1} است.

شکل ۲.۱۰. نگاشت $F_{3.839}(x) = 3.839x(1-x)$

ادعا می‌کنیم که p در واقع دارای دوره تناوب اول n است. در واقع $2 - n$ -تکرار اول p در I_1 قرار می‌گیرد، $(1 - n)$ -امین آن در I_1 قرار می‌گیرد و n -امین آن دوباره با p برابر می‌شود. اگر $(p)^{f^{n-1}}$ در درون I_1 قرار گیرد، آنگاه به سادگی نتیجه می‌شود که دوره تناوب p عدد اول n است. اگر $(p)^{f^n}$ در روی مرز قرار گرفته باشد، آنگاه n برابر است با ۲ یا ۳ و دوباره مسئله حل می‌شود. \square
این قضیه فقط شروع داستان است. قضیه شارکوفسکی یک محاسبه کامل از اینکه کدام تناوبها، باعث چه تناوبهای دیگری برای نگاشتهای پیوسته روی \mathbb{R} می‌شوند ارائه می‌دهد. ترتیب زیر از اعداد طبیعی را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & 3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright \dots \triangleright 2 \cdot 3 \triangleright 2 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^2 \cdot 3 \triangleright 2^2 \cdot 5 \triangleright \dots \\ & \triangleright 2^3 \cdot 3 \triangleright 2^3 \cdot 5 \triangleright \dots \triangleright 2^3 \triangleright 2^2 \triangleright 1. \end{aligned}$$

در این فهرست، ابتدا اعداد فرد به جز یک قرار می‌گیرند و پس از آن ۲ برابر اعداد فرد، ۲۲ برابر اعداد فرد، ۲۳ برابر اعداد فرد و غیره دنبال می‌شوند. این فهرست همه اعداد طبیعی به جز توانهای ۲ را شامل می‌شود که آنها را در انتهای فهرست با ترتیب نزولی قرار می‌دهیم. این ترتیب شارکوفسکی برای اعداد طبیعی است. قضیه شارکوفسکی بیان می‌کند:

قضیه ۲.۱۰ فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow f$: پیوسته است و فرض کنید f دارای یک نقطه متناوب با دوره تناوب k باشد. اگر با توجه به ترتیب بالا $\ell \triangleright k$ ، آنگاه f دارای نقطه متناوبی با تناوب ℓ نیز است.

قبل از اثبات قضیه نتایج زیادی از آن را بیان می‌کنیم.

ملاحظات.

۱. اگر f دارای یک نقطه متناوب باشد که دوره تناوب آن توانی از ۲ نیست، آنگاه f دارای تعداد نامتناهی نقطه متناوب است. بر عکس، اگر f دارای تعداد متناهی نقطه متناوب باشد، آنگاه همه آنها لزوماً دارای دوره‌های تناوبی از توان ۲ هستند. این موضوع دوباره در مبحث مسیر دوره-دوبرابر ساز به آشوب دریکی از بخش‌های بعدی ظاهر می‌شود.

۲. تناوب ۳ بزرگترین تناوب در ترتیب شارکوفسکی است و بنابراین همان‌طور که در بالا دیدیم، وجود همه تناوبهای دیگر را نتیجه می‌دهد.

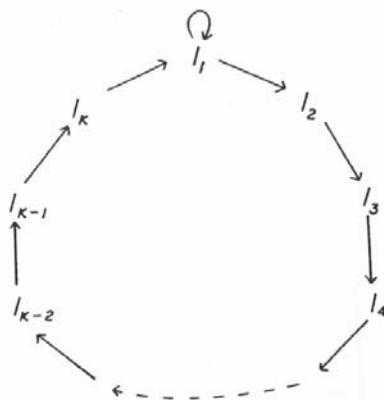
۳. عکس قضیه شارکوفسکی نیز درست است. نگاشتهایی با نقاط متناوب با دوره تناوب p موجودند که هیچ نقطه متناوب "بزرگ‌تر" از p با ترتیب شارکوفسکی ندارند. ما چند مثال از این موضوع را در پایان این بخش می‌آوریم.

برهان ساده‌ای از قضیه شارکوفسکی را که توسط بلاک^۵، گوکن‌هایمر^۶، میسیورویچ^۷ و یانگ^۸ ارائه شد، بیان می‌کنیم. اساس برهان مبتنی بر دو ملاحظه‌ای است که در بالا از آنها استفاده کردیم. برای دو بازه بسته I_1 و I_2 ، اگر $(I_1)_f$ بازه I_2 را پوشاند، از نماد $I_2 \rightarrow I_1$ استفاده می‌کنیم. اگر دنباله‌ای از بازه‌های $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n \rightarrow I_1$ موجود باشد، همان‌طور که قبل دیدیم f^n نقطه ثابتی در I_1 دارد.

ابتدا فرض می‌کنیم که f دارای یک نقطه متناوب x با دوره تناوب n باشد که $n > 1$ عددی فرد است. فرض کنید f دارای هیچ نقطه متناوبی با دوره تناوب فرد کمتر از n نباشد. فرض کنید x_1, \dots, x_n نقاط مدار x باشند که از چپ به راست در نظر گرفته شده‌اند. توجه کنید که f باعث جایگشت x_i ‌ها می‌شود. بهوضوح، $x_n < f(x_n) < \dots < f(x_1)$. بزرگ‌ترین x_i را انتخاب کنید که $f(x_i) > x_i$. فرض کنید I_1 بازه $[x_i, x_{i+1}]$ باشد. از آنجاکه $f(x_{i+1}) < f(x_i) \leq x_i$ ، نتیجه می‌گیریم که $f(I_1) \subset I_1$ و بنابراین $f(I_1) \subset (I_1)_f$. در نتیجه $I_1 \rightarrow I_1$.

از آنجاکه x دوره تناوب ۲ ندارد، $f(x_i) = x_{i+1}$ و $f(x_{i+1}) = x_i$ نمی‌توانند برقرار باشند بنابراین $(I_1)_f$ حداقل دارای بازه دیگری به صورت $[x_j, x_{j+1}]$ است. به لحاظ نظری باید تعداد بسیاری از چنین بازه‌هایی موجود باشند ولی در ادامه می‌بینیم که در واقع فقط یکی موجود است. فرض کنید \mathcal{O}_2 نشان‌دهنده اجتماع بازه‌هایی از نوع $[x_j, x_{j+1}]$ باشد که با $(I_1)_f$ پوشیده شده‌اند. بنابراین $I_1 \subset \mathcal{O}_2$ و لیکن $\mathcal{O}_2 \neq I_2$ و اگر I_2 بازه‌ای در \mathcal{O}_2 از نوع $[x_j, x_{j+1}]$ باشد، آنگاه $I_1 \rightarrow I_2$.

Block^۵
Guckenheimer^۶
Misiurewicz^۷
Young^۸



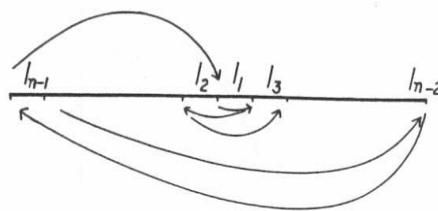
شکل ۳.۱۰.

اکنون فرض کنید \mathcal{O}_ℓ اجتماع همه بازه‌هایی از نوع $[x_j, x_{j+1}]$ باشد که دارای این خاصیت هستند که با تصویر بازه‌هایی در \mathcal{O}_2 پوشیده می‌شوند. اگر با استقراء ادامه دهیم، $\mathcal{O}_{\ell+1}$ اجتماع بازه‌هایی است که به وسیله تصویر بعضی از بازه‌ها در \mathcal{O}_ℓ پوشیده می‌شود. توجه کنید که اگر $I_{\ell+1}$ بازه‌ای از $\mathcal{O}_{\ell+1}$ باشد، آنگاه مجموعه‌ای از بازه‌های I_1, I_2, \dots, I_ℓ که $I_j \subset \mathcal{O}_j$ موجودند به‌طوری که $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_\ell \rightarrow I_{\ell+1}$

حال \mathcal{O}_ℓ اجتماع صعودی از بازه‌ها را تشکیل می‌دهد. از آنجاکه فقط تعداد متناهی x_j وجود دارد نتیجه می‌شود که یک ℓ موجود است که $\mathcal{O}_\ell = \mathcal{O}_{\ell+1}$. برای این ℓ ، \mathcal{O}_ℓ باید شامل همه بازه‌هایی از نوع $[x_j, x_{j+1}]$ باشد چون در غیراین صورت، x باید تناوبی کمتر از n داشته باشد.

ادعا می‌کنیم که حداقل یک بازه $[x_j, x_{j+1}]$ متفاوت با I_1 در یکی از \mathcal{O}_k ها موجود است به‌طوری که تصویر آن I_1 را می‌پوشاند. این موضوع از این مطلب نتیجه می‌شود که در یک سمت I_1 تعداد بیشتری x_i نسبت به سمت دیگر آن موجود است (n فرد است). بنابراین با عمل f ، بعضی از x_i ها سمت‌شان را عوض می‌کنند و بعضی دیگر سمت‌شان را عوض نمی‌کنند. درنتیجه حداقل یک بازه موجود است که تصویرش I_1 را می‌پوشاند.

اکنون زنجیری از بازه‌های $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ را در نظر بگیرید که هر I_ℓ به‌ازای زای به صورت $[x_j, x_{j+1}]$ بوده و $I_1 \neq I_2$. فرض نمی‌کنیم که $I_\ell \subset \mathcal{O}_\ell$ باشد. با توجه به موارد بالا، حداقل یک چنین زنجیری موجود است. فرض کنید k کوچک‌ترین عددی باشد که این اتفاق می‌افتد. یعنی، $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k \rightarrow I_1$ کوتاه‌ترین مسیر از I_1 به جز $I_1 \rightarrow I_1$ است. بنابراین نموداری همچون نمودار شکل ۳.۱۰ یافته‌ایم.



شکل ۴.۱۰. یک ترتیب ممکن برای I_j . ترتیب ممکن دیگر، تصویر آینه‌ای شکل است.

اکنون اگر $1 < k < n$ ، آنگاه یکی از دورهای $I_k \rightarrow I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_n$ یا $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_k$ نقطه ثابتی از f^m باشد و $m < k$ فرد و $m < n$ به دست می‌دهد. این نقطه باید تنابوب اولیه کوچکتر از k داشته باشد چون $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_k$ فقط از یک نقطه تشکیل شده است و آن نقطه باید تنابوب بزرگ‌تر از m داشته باشد. بنابراین $1 < k = n - m$ داده شده مرتب شده است باشد.

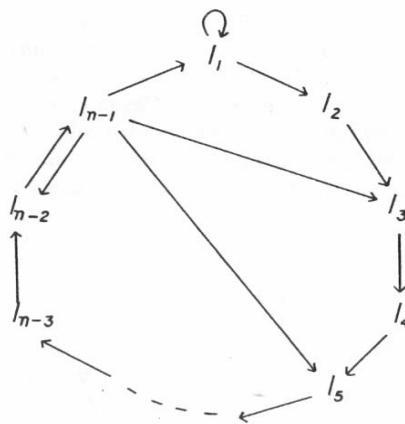
بنابراین ما می‌توانیم نمودار رسم شده در شکل ۳.۱۰ را به نموداری همانند شکل ۵.۱۰ گسترش دهیم. اکنون قضیه شارکوفسکی برای حالت خاص که n فرد باشد واضح است. تنابوهای بالاتر از n به وسیله دورهایی به شکل $I_1 \rightarrow I_2 \rightarrow \dots \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_n$ نشان داده می‌شود. تنابوهای زوج کوچک‌تر به وسیله دورهایی به شکل

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1},$$

$$I_{n-1} \rightarrow I_{n-4} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1} \rightarrow I_{n-1}$$

و غیره داده می‌شود. برای حالت n زوج، ابتدا توجه می‌کیم که f باید نقطه متناوبی با تنابوب ۲ داشته باشد. این نکته از بحث بالا نتیجه می‌شود مشروط براینکه که سمت بعضی از x_i ها توسط f تغییر کند و برای بعضی این طور نباشد (از این نکته استفاده کنید که $I_{n-1} \rightarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1} \leftarrow I_{n-2} \rightarrow I_{n-1}$). اگر این گونه نباشد، آنگاه سمت همه x_i ها باید عوض شود و بنابراین $[x_n] \supset [x_{i+1}, x_n]$ و $f[x_1, x_i] \supset [x_1, x_{i+1}]$. ولی در آن صورت، یک نقطه با تنابوب ۲ در $[x_1, x_i]$ ایجاد می‌شود.

حال قضیه را برای حالت $n = 2^m$ نشان می‌دهیم. فرض کنید $k = 2^\ell$ که $m < k < n$. فرض کنید $f^k = g$. طبق فرض، g دارای یک نقطه متناوب با تنابوب $2^{m-\ell+1}$ بوده و درنتیجه، دارای یک نقطه با تنابوب ۲ است. این نقطه دارای تنابوب 2^ℓ تحت f است. آخرین حالت، $p \cdot 2^m = p \cdot n$ برای p فرد است. این حالت قابل تبدیل به دو حالت قبل است و ما آن را به عنوان تمرین به خواننده واگذار



شکل ۵.۱۰.

می‌کنیم.

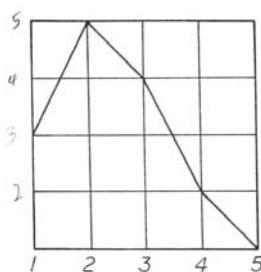
اکنون به عکس قضیه شارکوفسکی بازمی‌گردیم. برای ساختن یک نگاشت که تناوب ۵ تولید کند و تناوب ۳ تولید نکند، نگاشت $f : [1, 5] \rightarrow [1, 5]$ با ضابطه

$$\begin{aligned} f(1) &= 3 \\ f(3) &= 4 \\ f(4) &= 2 \\ f(2) &= 5 \\ f(5) &= 1 \end{aligned}$$

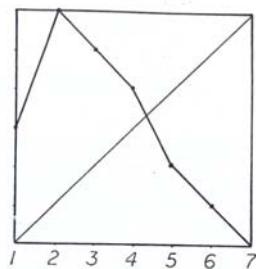
را درنظر بگیرید. ۱ دارای تناوب ۵ است. فرض کنید f بین این اعداد، خطی است. یعنی نمودار آن به صورتی است که در شکل ۶.۱۰ نشان داده شده است.
به سادگی می‌توان بررسی کرد که

$$\begin{aligned} f^3[1, 2] &= [2, 5] \\ f^3[2, 3] &= [3, 5] \\ f^3[4, 5] &= [1, 4]. \end{aligned}$$

درنتیجه f^3 در هیچ یک از این بازه‌ها دارای نقطه ثابت نیست. از طرفی $[1, 5] = [3, 4] \cup [4, 5]$ و



شکل ۶.۱۰

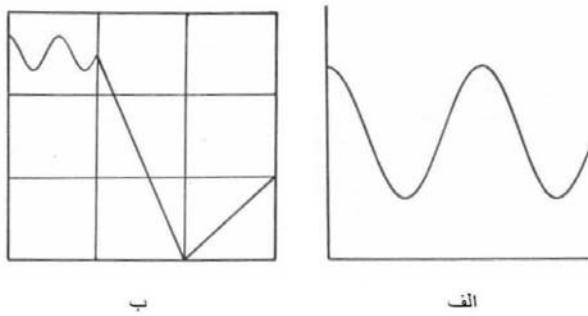


شکل ۷.۱۰

بنابراین f^3 دارای حداقل یک نقطه ثابت در $[3, 4]$ است. ولی ما ادعا می کنیم که این نقطه یکتاست و درنتیجه باید نقطه ثابت f باشد، نه نقطه ای با تناوب ۳. در واقع، $f : [3, 4] \rightarrow [2, 4]$ و $f : [2, 5] \rightarrow [1, 5]$ نزولی اکید است. بنابراین f^3 روی $[3, 4]$ نزولی اکید بوده و نقطه ثابت، یکتاست.

نمودار شکل ۷.۱۰، تناوب ۷ تولید می کند ولی تناوب ۵ تولید نمی کند. این روند را می توان به راحتی تعمیم داد تا بخش اول ترتیب شارکوفسکی را به دست دهد. برای تناوبهای زوج از یک ترفند استفاده می کنیم. فرض کنید $I : f$ پیوسته باشد. ما نگاشت جدید F را که دو برابر f می نامیم، به گونه ای می سازیم که نقاط متناوب آن دارای تناوب دو برابر بوده در واقع، یک نقطه ثابت هم داشته باشد. روند ساختن F به شکل زیر است. بازه I را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. نمودار f را که در شکل ۸.۱۰ الف نشان داده شده است به توی گوشه بالایی و چپ $I \times I$ متراکم کنید و بقیه نمودار را مانند شکل ۸.۱۰ ب رسم کنید.

نگاشت F روی $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ و $\left[1, \frac{2}{3}\right]$ قطعه قطعه خطی است. به علاوه، $0 = F(1)$ و $F\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$



شکل ۸.۱۰. الف، نمودار $(x)f$ و ب، نمودار دو برابر آن یعنی $(x)F$ را نشان می‌دهد.

پیوسته است.

توجه کنید که F بازه $[\frac{1}{3}, 0]$ را به توابع بازه $[1, \frac{2}{3}]$ می‌نگارد و بالعکس. همچنین توجه کنید که اگر $\frac{1}{3} \in x$ و x یک نقطه ثابت نباشد، آنگاه n ای موجود است به‌طوری که $1, \frac{2}{3}, \dots, \frac{1}{3}, 0 \in F^n(x)$. این نشان می‌دهد که F هیچ نقطه متناوب دیگری در $(\frac{1}{3}, 0)$ ندارد. تمرین ۷ نشان می‌دهد که اگر x یک نقطه متناوب با تناوب n برای f داشته باشد، آنگاه $\frac{x}{n}$ یک نقطه متناوب با تناوب $2n$ برای F است. از طرف دیگر، اگر y یک نقطه متناوب برای F باشد، آنگاه y یا $F(y)$ در $[\frac{1}{3}, 0]$ قرار می‌گیرد و تمرین ۹ نشان می‌دهد که $3y$ یا $3F(y)$ نقطه‌ای متناوب برای f است. بنابراین برای ایجاد یک نگاشت با تناوب ۱۰ که تناوب ۶ نداشته باشد، فقط لازم است که نمودار تابع با تناوب ۵ را که تناوب ۳ ندارد دو برابر کنیم.

به عنوان آخرین ملاحظه باید تأکید کنیم که قضیه شارکوفسکی فقط یک نتیجه برای بعد ۱ است و هیچ نتیجه مشابهی برای ابعاد بالاتر موجود نیست. در واقع، این قضیه حتی روی یک دایره هم برقرار نیست. برای مثال، نگاشتی که همه نقاط روی دایره را به اندازه ۱۲۰ درجه می‌چرخاند، باعث می‌شود تناوب همه نقاط روی دایره ۳ شود. هیچ گونه نقطه دیگری با تناوب دیگری موجود نیست.

تمرین.

۱. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n بازه‌های بسته باشند و برای $i = 0, \dots, n-1$ ، $f(A_i) \supset A_{i+1}$.
- نشان دهید یک نقطه $x \in A_0$ هست به‌طوری که برای هر i ، $f^i(x) \in A_i$.

۲. نشان دهید که اگر f دارای تناوب $2^m \cdot p$ باشد، آنگاه f دارای تناوب $2^m \cdot q$ برای $q > p$ است.

۳. نشان دهید که اگر f دارای تناوب $2^m \cdot p$ باشد، آنگاه f دارای تناوب 2^ℓ است که $\ell \leq m$.

۴. نشان دهید که اگر f دارای تناوب $2^m \cdot p$ باشد، آنگاه f دارای تناوب $2^m \cdot q$ برای q زوج است.

۵. یک نگاشت قطعه قطعه خطی با تناوب $1 + 2n$ بسازید.

۶. فرمولی برای $F(x)$ بر حسب $f(x)$ ارائه دهید که $F(x)$ دو برابر $f(x)$ است.

۷. نشان دهید $F(x)$ که نگاشت دو برابر $f(x)$ است، دارای یک نقطه متناوب با تناوب $2n$ در $\frac{x}{3}$ است اگر و تنها اگر f در x تناوب n داشته باشد.

۸. نگاشتی بسازید که دارای نقاط متناوب با تناوب 2^j برای $\ell < j$ باشد ولی تناوب 2^ℓ نداشته باشد.

۹. نشان دهید اگر $F(x)$ یعنی نگاشت دو برابر f ، دارای نقطه متناوب p باشد که ثابت نیست، آنگاه یا p یا $F(p)$ در $[\frac{1}{3}, 0]$ می‌افتد. نشان دهید که در این حالت، $3p$ یا $3F(p)$ یک نقطه متناوب برای f است.

۱۱ مشتق شوارتسی

در این بخش، ما روشی را توضیح می‌دهیم که اولین بار برای مطالعه سیستم‌های دینامیکی یک بعدی که توسط سینگر^۹ در سال ۱۹۷۸ معرفی شد و مشتق شوارتسی نام گرفت، استفاده شد. در واقع، مشتق شوارتسی نقش مهمی در آنالیز مختلط ایفا می‌کند و محکمی برای بررسی تبدیل خطی کسری بودن یک نگاشت مختلط است. در دینامیک یک بعدی، مشتق شوارتسی به چند دلیل ابزار ارزشمندی است. در این بخش نشان می‌دهیم که می‌توان از آن برای به دست آوردن کران بالای تعداد مدارهای متناوب جاذبی که یک نگاشت می‌تواند داشته باشد، استفاده کرد. همچنین برای اثبات اینکه بقیه نگاشتها دارای بازه‌ای هستند که نگاشت روی کل آشوبناک است، به کار می‌رود. در بخش‌های ۱۷ تا ۱۹، مشتق شوارتسی نقش مهمی در این بحث که چطور خانواده‌هایی از نگاشتها مانند خانواده نگاشتهای درجه دواز یک دینامیک ساده به آشوبناک تغییر وضعیت می‌دهند، ایفاء می‌کند.

Singer^۹

تعريف ۱.۱۱ مشتق شوارتسی یک نگاشت f در نقطه x برابر است با

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2.$$

برای مثال، اگر $F_\mu(x) = \mu x(1-x)^{\frac{1}{(1-2x)^2}}$ نگاشت درجه دو باشد، آنگاه $SF_\mu(x) = -\frac{1}{(1-2x)^2}$ بنا برای همه x ها، $\circ < SF_\mu(x)$ حتی در نقطه بحرانی $x = \frac{1}{2}$ که در آن $SF_\mu(x) = -\infty$. برای ما نگاشتهایی که دارای مشتق شوارتسی منفی هستند بیشترین اهمیت را دارند. علاوه بر نگاشتهای درجه دو، نگاشتهای زیاد دیگری دارای مشتق شوارتسی منفی هستند. برای مثال، $S(\sin x) = -1 - \frac{3}{2}(\tan^2 x) < \circ$ و $S(e^x) = -\frac{1}{2}$. همان طور که قضیه بعد نشان می‌دهد نگاشتهای چندجمله‌ای زیادی دارای این خاصیت هستند.

قضیه ۲.۱۱ فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای باشد. اگر همه ریشه‌های $P'(x)$ حقیقی و متمایز باشند، آنگاه $\circ < SP$.

برهان. فرض کنید

$$P'(x) = \prod_{i=1}^N (x - a_i)$$

که a_i ها متمایز و حقیقی هستند. در این صورت

$$\begin{aligned} P''(x) &= \sum_{j=1}^N \frac{P'(x)}{x - a_j} = \sum_{j=1}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - a_i)}{x - a_j}, \\ P'''(x) &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{\prod_{i=1}^N (x - a_i)}{(x - a_j)(x - a_k)}. \end{aligned}$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} SP(x) &= \sum_{j \neq k} \frac{1}{(x - a_j)(x - a_k)} - \frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{x - a_j} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{x - a_j} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^N \frac{1}{x - a_j} \right)^2 < \circ. \end{aligned}$$

□

یکی از مهم‌ترین خواصی که نگاشتها با مشتق شوارتسی منفی دارند، این است که این خاصیت تحت ترکیب حفظ می‌شود.

قضیه ۳.۱۱ فرض کنید $\circ < Sf < \circ$. آنگاه $\circ < S(g \circ f) < \circ$.

برهان. با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

و

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x)) \cdot (g'(x))^3 + 3f''(g(x)) \cdot g''(x) \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g'''(x).$$

از

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x)) \cdot (g'(x))^2 + Sg(x)$$

□

نتیجه می‌شود که $\circ < S(f \circ g)(x) < \circ$.

بنابراین، از نتایج اولیه مهم برای ما، این نتیجه سرراست است که اگر $\circ < Sf < \circ$ ، آنگاه برای هر $n > 1$ ، $\circ < Sf^n < \circ$. فرض $\circ < Sf$ دارای مفهوم جالبی در دینامیک نگاشت یک بعدی است. یکی از نتایج اصلی این بخش، قضیه زیر است.

قضیه ۴.۱۱ فرض کنید f دارای n نقطه بحرانی ($Sf(x) = -\infty$ مجاز است). فرض کنید f دارای n نقطه بحرانی باشد. در این صورت f حداقل $n+2$ مدار متناوب جاذب است.

ملاحظات.

۱. نگاشت درجه دو $(1-x)^{\frac{1}{\mu}} = F_\mu(x)$ دارای یک نقطه بحرانی ($x=1$) است. بنابراین برای هر μ ، حداقل سه مدار متناوب جاذب موجود است. حتی ممکن است چنین مداری موجود نباشد مانند حالت $\mu > 2 + \sqrt{5}$. در آینده می‌بینیم که تعداد مدارهای متناوب جاذب، قابل کاهش به حداقل یک مدار است. از آنجاکه برای μ های بزرگ، نگاشت F_μ دارای نامتناهی مدار متناوب است، این نکته جالب توجه است که حداقل یکی از آنها می‌توانند جاذب باشند.

۲. یک مسئله محاسباتی بدین صورت پیدید می‌آید. فرض کنید F_μ دارای یک دور متناوب جاذب با تناوب ۳ است. طبق قضیه شارکوفسکی، F_μ باید دارای نقاط متناوبی با هر تناوب دیگر باشد

ولی هیچ کدام از آنها جاذب نیستند. دریک کامپیوتر فقط نقاط متناوب جاذب "قابل دیدن" هستند. بنابراین این سوال پیش می‌آید: بقیه نقاط متناوب درین حالت کجا هستند؟ در بخش ۱۳.۱ به این سوال باز می‌گردیم.

۳. برهانهایی که در ادامه می‌آیند قابل تعمیم به نقاط متناوب غیرهذلولوی نیز هستند. درنتیجه، نگاشت درجه دو F دارای حداکثریک مدار متناوب است که دافع نیست.

برای اثبات قضیه ۱۱.۴، به چند لم نیاز داریم.

لم ۵.۱۱ اگر $\circ < Sf$ ، آنگاه (x^f) نمی‌تواند یک مینیمم نسبی مثبت یا ماکسیمم نسبی منفی داشته باشد.

برهان. فرض کنیم x^f یک نقطه بحرانی برای (x^f) باشد. یعنی، $\circ = (x^f)$. از آنجاکه $\circ < Sf(x^f)$ ، داریم $\circ < \frac{f'''(x^f)}{f'(x^f)}$ ولذا (x^f) f''' دارای علامت متفاوت هستند. \square
بنابراین نتیجه می‌شود که بین هر دو نقطه بحرانی متوالی f' ، نمودار (x^f) حتماً محور x را قطع می‌کند. به ویژه، f بین این دو نقطه باید دارای نقطه بحرانی باشد.

لم ۶.۱۱ اگر (x^f) دارای تعداد متناهی نقطه بحرانی باشد، آنگاه (x^f) نیز چنین است.

برهان. از آنجاکه بین هر دو پیش تصویر c ، حداقل یک نقطه بحرانی برای f موجود است، درنتیجه برای هر c ، $(c^{-1})^f$ مجموعه‌ای متناهی از نقاط است. بنابراین به سادگی نتیجه می‌شود $\{x | f^m(x) = c\} = \{x | f^m(x) = c'\}$ نیز یک مجموعه متناهی است.
اکنون فرض کنید $\circ = (x^f)$. با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$(f^m)'(x) = \prod_{i=0}^{m-1} f'(f^i(x)).$$

بنابراین برای i که $1 \leq i \leq m - 1$ ، $f^i(x)$ یک نقطه بحرانی برای f است. پس مجموعه نقاط بحرانی f^m اجتماع همه پیش تصویرهای نقاط بحرانی f با مرتبه کوچکتر از m و مدار آنهاست. با مفروضات بالا، این مجموعه متناهی است. \square

لم ۷.۱۱ فرض کنید (x^f) دارای تعداد متناهی نقطه بحرانی بوده و $\circ < Sf$. درین صورت f دارای تعداد متناهی نقطه متناوب با تناوب m برای هر عدد صحیح m است.

برهان. قرار دهید $g = f^m$. درین صورت نقاط متناوب از تناوب m برای f ، نقاط ثابت برای g هستند. با توجه به قضیه ۱۱.۳، $\circ < Sg$.

فرض کنید g دارای تعداد نامتناهی نقطه ثابت باشد. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نامتناهی نقطه مانند x موجود است به طوری که $1 = g'(x) = g'(x)$. بین هر سه نقطه متوالی که در آنها $1 = g'(x)$ باید نقطه‌ای موجود باشد که در آن $1 < g'$. در واقع، $g'(x)$ متعدد با عدد 1 روی یک بازه نیست چون در آن صورت $Sg = \circ$ و این با $\circ <$ در تنافق است. علاوه بر آن، با توجه به لم ۵.۱۱، نمی‌تواند بین این سه نقطه دارای مینیمم نسبی مثبت باشد. درنتیجه باید نقاطی موجود باشند که در آنها $\circ < g'$. بنابراین نقاطی موجودند که برای آنها $\circ = g'$. ولی این بدین معنی است که g دارای نامتناهی نقطه بحرانی است. این لم ۶.۱۱ را نقض می‌کند و برهان کامل می‌شود. \square

اکنون برهان قضیه ۴.۱۱ را کامل می‌کنیم. فرض کنید p یک نقطه متناوب جاذب برای f با تناوب m باشد. فرض کنید $(p)W$ بزرگ‌ترین بازه‌ای حول p باشد که در آن همه نقاط تحت f^m به صورت مجانبی به p می‌کنند، یعنی، $(p)W$ مؤلفه همبند $\{x | f^{mj}(x) \rightarrow p, j \rightarrow \infty\}$ است که را دربردارد. واضح است که $W(p)$ یک بازه باز بوده و $f^m(W(p)) \subset W(p)$.

در این لحظه فرض کنید که p ثابت باشد. از آنجاکه $f(W(p)) \subset W(p)$ و $f(W(p))$ ماکسیمال است، نتیجه می‌شود که f یا نقاط انتهایی $(\ell, r) = W(p)$ را حفظ می‌کند یا یکی از هر دوی ℓ و r نامتناهی هستند. در حالت متناهی سه امکان موجود است.

$$f(r) = r \text{ و } f(\ell) = \ell . \quad ۱$$

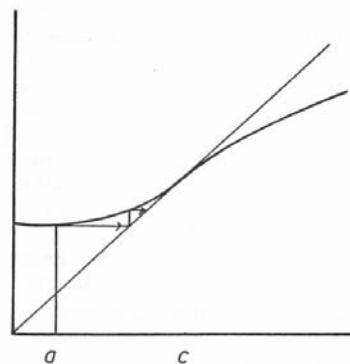
$$f(r) = \ell \text{ و } f(\ell) = r . \quad ۲$$

$$f(\ell) = f(r) . \quad ۳$$

اگر $f(r) = r$ و $f(\ell) = \ell$ ، آنگاه نمودار f نشان می‌دهد که اعداد a و b موجودند به طوری که باشد (طبق لم ۵.۱۱)، نتیجه می‌شود که نقطه بحرانی در بازه (a, b) موجود است. حالت دوم با درنظر گرفتن f^2 به صورت مشابه نتیجه می‌شود. در حالت ۳، f باید یک مینیمم یا ماکسیمم بین ℓ و r داشته باشد. بنابراین یک نقطه بحرانی در $(p)W$ در این حالت موجود است. در حالتی که ℓ و r نامتناهی باشد، این برهان کار نمی‌کند. اگرچه این حالتها، حداقل دو نقطه ثابت پایدار اضافه می‌کنند. اگر p متناوب باشد، بحث مشابه، یک نقطه بحرانی برای f^m در $(p)W$ تولید می‌کند و قاعده زنجیری ایجاب می‌کند که یک نقطه در مدار این نقطه بحرانی باید یک نقطه بحرانی برای f باشد. \square

قضیه بالا می‌تواند به حالت نقاط متناوب غیرهذلولوی گسترش یابد. در واقع این قضیه را می‌توان بیشتر تعمیم داد. اگر $f(x)$ دارای نقطه ثابت c با مرتبه $1 \pm$ بوده و $\circ < Sf = \circ$ ، آنگاه c باید نقاط را حداقل از یک جهت جذب کند و همانند بالا باید یک نقطه بحرانی در $(c)W$ باشد.

برای اثبات این موضوع ابتدا فرض می‌کنیم که $1 = f'(c) = f'(c)$ (درغیراین صورت f^2 را در نظر بگیرید). طبق لم ۷.۱۱، f فقط تعداد متناهی نقطه ثابت دارد. درنتیجه بازه‌ای حول c موجود است

شکل ۱.۱۱. برای $a < x < c$ داریم $.g(x) < x$

که f در آن هیچ نقطه ثابت دیگری ندارد.

فرض کنید c یک نقطه ثابت "داعع" باشد، یعنی برای $x < c$ و نزدیک c ، $x < f(x)$ و برای $y > c$ ، $f(y) > y$. بهوضوح، f' دارای یک مقدار مینیمم نسبی ۱ دراین حالت است که بال م ۵.۱۱ در تناقض است. این نشان می‌دهد که برای $x < c$ ، $f(x) > x$ ، $a < x < c$ و برای $b < c < x < b$ ، $f(x) < x$ ، $c < x < b$ است. $f(x) < x$ را ببینید.

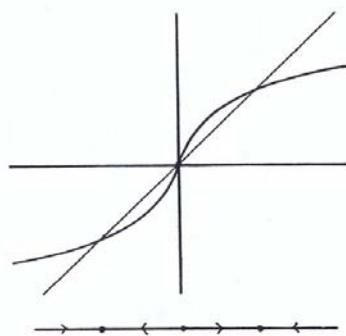
تحلیل نموداری نشان می‌دهد که c حداقل از یک جهت جاذب است. شکل ۱.۱۱ را ببینید. اثبات بالا نشان می‌دهد که نقاط متناوب با مجموعه‌های پایدار کران دار باید یک نقطه بحرانی را جذب کنند. اگر این مجموعه‌های پایدار غیرکران دار باشند، این موضوع همان‌طور که در مثالهای بعد می‌بینیم لزوماً درست نیست.

مثال ۸.۱۱ فرض کنید برای $\lambda > 1$. دراین صورت

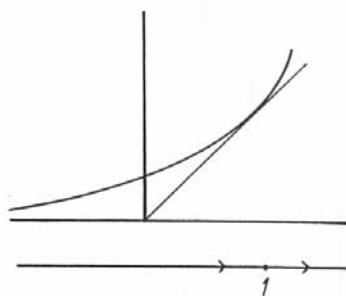
$$SA(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} < 0.$$

نمودار A نشان می‌دهد که دونقطه ثابت جاذب با مجموعه‌های پایدار غیرکران دار بدون هیچ نقطه بحرانی موجود است. شکل ۲.۱۱ را ببینید.

مثال ۹.۱۱ قرار دهید $E(x) = e^{x-1}$. نگاشت E دارای نقطه ثابت یگانه در $p = 1$ است که همه نقاط را از سمت چپ به صورت ضعیف جذب می‌کند ولی همه نقاط سمت راست را دفع می‌کند. مانند قبل E هیچ نقطه بحرانی ندارد. شکل ۳.۱۱ را ببینید.



شکل ۲.۱۱. نمودار و نمای فاز $A(x) = \lambda \arctan(x)$ برای $\lambda > 1$.



شکل ۳.۱۱. نمودار و نمای فاز $E(x) = e^{x-1}$

این مثال نقش برجسته‌ای در بخش بعد در بحث قضیه انشعاب دارد.
برای نگاشت درجه دو، قضیه بالا نشان می‌دهد که حداقل سه مدار متناوب جاذب موجود است.
اگرچه از آنجاکه ما رفتار این نگاشتها را در نزدیک ∞ می‌دانیم، می‌توانیم نتایج بیشتری بگیریم.

نتیجه ۱۰.۱۱ فرض کنید $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$. در این صورت برای هر μ حداقل یک مدار متناوب جاذب موجود است.

برهان. ما نشان دادیم که $|SF_\mu(x)| < 0$ و اگر $|x|$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه $\infty \rightarrow |F_\mu^n(x)|$.
بنابراین هیچ نقطه متناوب جاذبی با مجموعه پایدار نامتناهی وجود ندارد. \square
البته حالتها بی و وجود دارند که در آن هیچ مدار متناوب جاذبی موجود نیست مانند حالتهای $\mu = 2 + \sqrt{5}$ یا $\mu = 4$.

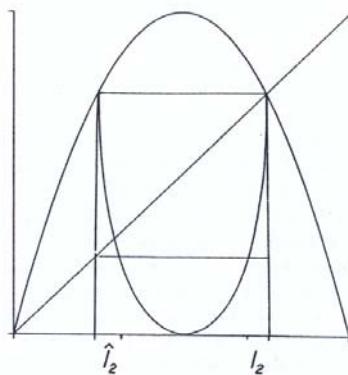
بنابراین هنگامی که یک نگاشت دارای مشتق شوارتسی منفی است مدار نقاط بحرانی نقش مهمی در تعیین دینامیک بازی می‌کند. در آینده هنگامی که نظریه آمیختگی را معرفی می‌کنیم، می‌بینیم که مدار نقاط متناوب کل دینامیک را کنترل می‌کنند. اکنون به نگاشت درجه دو $F_4(x) = 4x(1-x)$ باز می‌گردیم. یادآوری می‌کنیم که در مثال ۹.۸ نشان دادیم که F_4 روی بازه یکه آشوبناک است. از آنجایی که نقطه بحرانی این نگاشت به روی یک نقطه ثابت دافع نگاشته می‌شود از مفروضات بالا نتیجه می‌شود که نگاشت F_4 نمی‌تواند دارای مدار متناوب جاذبی باشد. ولی این نکته که $SF_4 < 0$ نتایج بیشتری به دست می‌دهد: با استفاده از این نکته می‌توانیم نشان دهیم که نقاط متناوب دافع در I چگال هستند. برخلاف برهان داده شده در مثال ۹.۸ که برای حالت بسیار خاصی برقرار است این برهان عمومی‌تر بوده و برای گستره بیشتری از نگاشتها به کار می‌رود (تمرینهای ۱ و ۲ را ببینید). از این ایده‌ها در آینده هنگامی که درمورد مجموعه‌های جولیای سیستم‌های دینامیکی تحلیلی مختص صحبت می‌شود استفاده می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که F_4 دارای یک نقطه ثابت دافع در $\frac{3}{4} = p$ است. فرض کنید $\hat{p} = \frac{1}{4}$. بهوضوح، $F_4(\hat{p}) = p$. فرض کنید J بازه نیم‌باز (\hat{p}, p) باشد. "نگاشت اولین بازگشت" R به درون مجموعه $\{\frac{1}{4} - J$ را معرفی می‌کنیم. به طور استقرایی، $F_4^n(x) = R(x)$ که n کوچک‌ترین عدد طبیعی است که در آن $x \in F_4^n(x)$. برای تعریف دقیق R ، ابتدا توجه می‌کنیم که F_4, J, \hat{p} را بر روی بازه $[1, \frac{3}{4}]$ نگارد. به این ترتیب که اگر $x \in J$ ، آنگاه $J \not\subset F_4(x)$. اکنون $[1, \frac{3}{4}]$ را به طور همسان‌ریخت به روی بازه $[\frac{3}{4}, 0]$ نگارد. پس نقاط خاصی در J توسط F_4^n دوباره به توی J نگاشته می‌شوند. در واقع با توجه به شکل ۴.۱۱ می‌بینیم که دو بازه I_2 و \hat{I}_2 در J موجودند که به صورت همسان‌ریخت توسط F_4^n به روی J نگاشته می‌شوند. توجه کنید که هر دوی I_2 و \hat{I}_2 بازه‌های نیم‌باز هستند. برای $x \in I_2 \cup \hat{I}_2$ تعریف می‌کنیم $R(x) = F_4^n(x)$.

اگر J ولی $x \in I_2 \cup \hat{I}_2$ ، آنگاه $(\frac{1}{4}, 0]$ را می‌صدودی است. از آنجاکه $F_4(x) \in [0, \frac{1}{4}]$ نتیجه می‌شود که تا وقتی $\frac{1}{4} \neq x$ ، مدار x نهایتاً به J باز می‌گردد. به طور دقیق‌تر اگر $\{\frac{1}{4} - J$ ، کوچک‌ترین عدد صحیح $2 \geq n$ موجود است که برای آن $x \in F_4^n(x)$. این کوچک‌ترین عدد صحیح را با $\phi(x)$ نشان می‌دهیم. درنتیجه ϕ ، "زمان" اولین بازگشت به J است. توجه کنید که روی $\hat{I}_2 \cup I_2 = 2 = \phi$. به طور کلی تر، تعریف می‌کنیم

$$I_n = \left\{ x \in \left(\frac{1}{4}, p \right) \mid \phi(x) = n \right\},$$

$$\hat{I}_n = \left\{ x \in \left[\hat{p}, \frac{1}{4} \right) \mid \phi(x) = n \right\}.$$



شکل ۴.۱۱.

می‌توان به راحتی بررسی کرد که I_n و \hat{I}_n بازه‌های نیم‌باز بوده و F_4^n ، I_n و \hat{I}_n را به صورت همسان ریخت به روی J می‌نگارد. بنابراین $J \rightarrow \{\frac{1}{7}\}$ را به صورت

$$R(x) = F_4^{\phi(x)}(x)$$

تعریف می‌کنیم. شکل ۵.۱۱ نمودار R را نشان می‌دهد. تأکید می‌کنیم که R در $\frac{1}{7}$ تعریف نشده است و دارای تعداد نامتناهی نقطه ناپیوستگی است با این وجود، شناخت خوب نگاشت بازگشت، همه اطلاعاتی را که درمورد F_4^n نیاز داریم به دست می‌دهد.

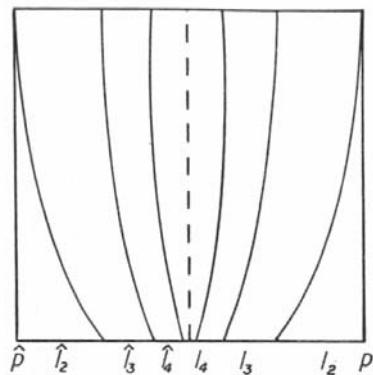
این نکته که هر F_4^n دارای مشتق شوارتسی منفی است به ما این اجازه را می‌دهد که نتیجه بگیریم اگر K بازه‌ای باشد که در آن $0 \neq (F_4^n)'(x)$ ، آنگاه مقدار مینیمم برای $(F_4^n)'(x)$ در یکی از نقاط انتهایی K اتفاق می‌افتد. این به نوبه خود نتیجه اساسی زیر را به دست می‌دهد.

$$\text{قضیه ۱۱.۱۱} \quad \text{برای هر } x \in J, |R'(x)| > 1.$$

برهان. قضیه را برای بازه‌های سمت راستی I_n در نظر می‌گیریم؛ نتیجه برای \hat{I}_n از تقارن نتیجه می‌شود. فرض کنید (ℓ_k, r_k) و

$$W_k = \bigcup_{n>k}^{\infty} I_n.$$

باره W_k یک بازه باز با کرانه‌های $\frac{1}{7}$ و ℓ_k است. باید نشان دهیم برای $x \in W_k$ با توجه به نتایج فوق، از آنجاکه روی I_k ، $0 \neq (F_4^k)'(x)$ ، کافیست شرایط را فقط در ℓ_k و r_k بررسی



شکل ۵.۱۱.

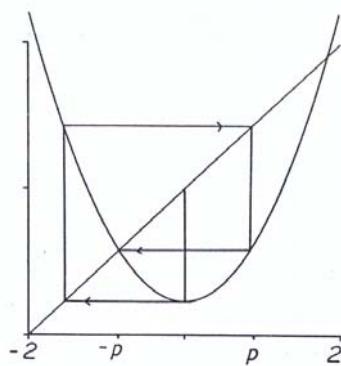
کنیم:

نگاشت $F_\varphi^k : I_k \cup W_k$ را به صورت همسان ریخت به روی (\circ, p) و I_k را به روی (\hat{p}, p) می‌نگارد. از آنجاکه طول I_k کمتر از $\frac{1}{\varphi}$ است، نتیجه می‌شود $x_k \in I_k$ موجود است که $|F_\varphi^k)'(x_k)| > 1$. اکنون W_k را به روی (\hat{p}, \circ) می‌نگارد. از آنجاکه طول W_k نیز کمتر از $\frac{1}{\varphi}$ است، نتیجه می‌شود که $x'_k \in W_k$ موجود است به طوری که $|F_\varphi^k)'(x'_k)| > 1$. از آنجاکه $|F_\varphi^k)'(x'_k)|$ نمی‌تواند یک مینیمم نسبی مثبت داشته باشد از $x_k < x'_k < \ell_k < x_k$ داریم $1 < |F_\varphi^k)'(\ell_k)| < 1$. برای نشان دادن اینکه $|F_\varphi^k)'(r_k)| > 1$ ، توجه کنید

$$\begin{aligned} (F_\varphi^k)'(r_k) &= F_\varphi'(F_\varphi^{k-1}(r_k)) \cdot (F_\varphi^{k-1})'(r_k) \\ &= F_\varphi'(\hat{p}) \cdot (F_\varphi^{k-1})'(\ell_{k-1}) \\ &> 1 \end{aligned}$$

که هر دو جمله در این حاصل ضرب بزرگ‌تر از ۱ هستند. این برهان را کامل می‌کند. \square
برای اثبات چگال بودن نقاط دافع، فرض کنید U بازه‌ای در I باشد. باید یک نقطه متناوب دافع در U ارائه دهیم. برای انجام این کار باید $\circ > n$ ای بیابیم به طوری که $F_\varphi^n(U)$ یک بازه شامل U باشد. پس از آن نتیجه حاصل می‌شود.

از آنجاکه $1 > |F_\varphi'(x)|$ ، اگر $J \subset U$ ، آنگاه $n > 0$ و زیربازه $V = F_\varphi^n(U)$ که $U \subset J$ موجود است. اکنون طبق قضیه ۱۱.۱۱، R طول بازه‌ها را در J افزایش می‌دهد. پس یک $0 < k < n$ یک زیربازه $V \subset U$ موجود است به طوری که R^k شامل یک نقطه ناپیوسته در R است. درنتیجه



شکل ۶.۱۱.

۰ ای موجود است به طوری که $p \in F_m^m(V_0)$. با تحلیل نموداری، دیده می شود که هر همسایگی از p درنهایت تحت تکرارهای F_k گسترش می یابد و I را می پوشاند. به ویژه، $0 > k$ ای موجود است به طوری که $F_k^m(V_0)$ را می پوشاند و نتیجه به آسانی به دست می آید.

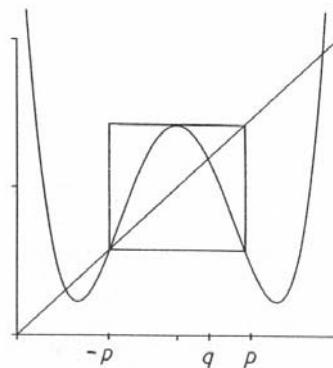
ملاحظات.

۱. بحث بالا را می توان برای اثبات وابستگی حساس به شرایط اولیه و همچنین تراپیایی توپولوژیکی نیز به کار برد. تمرین ۴ را ببینید.

۲. برای به کار بردن این روش در مثالهای دیگر توجه کنید که خاصیت اصلی که استفاده شد این بود که F_k^k هر دوی W_k و I_k را به ترتیب به $(\hat{p}, 0)$ و J گسترش می دهد که معمولاً می توان آن را با محاسبه مستقیم یا با استفاده از یک کامپیوتر بررسی کرد.

مثال ۱۲.۱۱ از آنجاکه $\sin x$ دارای مشتق شوارتسی منفی است، بحث مشابه نشان می دهد که $S(x) = \pi \sin x$ روی بازه $[0, \pi]$ آشوبناک است.

مثال ۱۳.۱۱ یک $c < 0$ موجود است که به ازای آن نگاشت درجه دو $Q_c(x) = x^2 + c$ دارای این خاصیت است که $Q_c(0)$ نقطه ثابت دافع $-p$ است. از نظر عددی $-1.543689 \approx c$ و $0.839268 \approx p$. نمودار Q_c در شکل ۶.۱۱ نشان داده شده است.



شکل ۷.۱۱.

نگاشت Q_c یک نقطه متنابوب دافع با تناوب ۲ در $Q_c^2 \approx 0.39039 \dots q \approx -p, p]$ روی بازه در شکل ۷.۱۱ نشان داده شده است. توجه کنید که Q_c^2 روی این بازه مشابه F_4 است و $S(Q_c)$. با استفاده از روش‌های این بخش می‌توان ثابت کرد که Q_c روی $[-p, p]$ آشوبناک است. ما در آینده دوباره به این مثال هنگامی که دینامیک تحلیلی مختلط را بررسی می‌کنیم باز می‌گردیم.

روشهایی که در این بخش معرفی شد نتایج بیشتری نسبت به اثبات اینکه دینامیک یک نگاشت آشوبناک است به دست می‌دهد. از آنجاکه نقاط متنابوب دافع چگال هستند، نتیجه می‌شود که بازه‌ای موجود نیست که تحت تکرارهای f سرگردان شود و هرگز خودش را قطع نکند. چنین بازه‌ای یک بازه غیرسرگردان نامیده می‌شود. بنابراین ما از منفی بودن مشتق شوارتسی برای بررسی احتمال وجود بازه‌های سرگردان در موارد خاص بهره می‌گیریم. همان‌طور که در بخش ۱۴.۱ خواهیم دید ممکن است بازه‌های سرگردان نابدیهی موجود باشند.

تمرین.

۱. نشان دهید که نگاشت $x = \pi \sin x$ روی بازه $[0, \pi]$ آشوبناک است.
۲. فرض کنید $Q_c(x) = x^2 + c$ که $c \approx -1.543689$ همانند مثال ۱۳.۱۱ باشد. نشان دهید که بازه‌ای موجود است که این نگاشت روی آن آشوبناک است.

۳. مثالی از یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی که مشتق شوارتسی آن منفی نیست ارائه دهد.
۴. از نگاشت بازگشت R برای نشان دادن اینکه $(x - 1)^{-1} = F_4(x) = \frac{1}{4}x^4$ دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه و تراپلی بی توپولوژیکی است استفاده کنید.

۱۲ نظریه انشعاب

انشعاب به معنی دو قسمت شدن و تغییر است. نظریه انشعاب در سیستم‌های دینامیکی، مطالعه تغییرات تابع تحت تغییرات پارامترهاست. این تغییرات، اغلب ساختار نقاط متناوب را درگیر می‌کند ولی ممکن است تغییرات دیگری را هم ایجاد کند. در این بخش، خانواده یک پارامتری از توابع با مقدار حقیقی را که به صورت هموار به پارامتر وابسته هستند درنظر می‌گیریم. به طور دقیق‌تر، ما توابع دو متغیره به صورت

$$G(x, \lambda) = f_\lambda(x)$$

را برای λ ثابت درنظر می‌گیریم که در اینجا $f_\lambda(x)$ نگاشتی C^∞ از متغیر x است. فرض می‌کنیم که G به صورت هموار به λ وابسته است. مثالها، شامل دوستانمان، یعنی خانواده $(1 - x)^{\mu}$ و $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ همچنین نگاشتهای

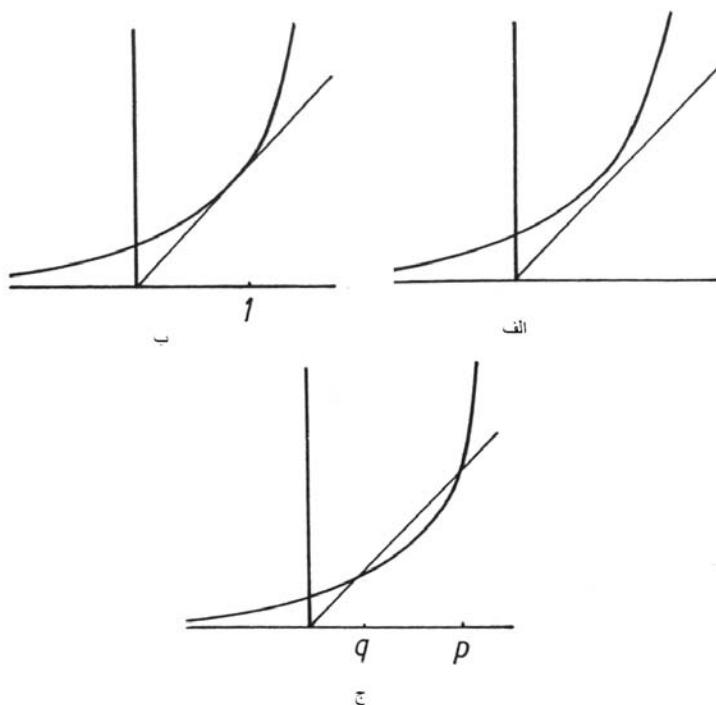
$$E_\lambda(x) = \lambda e^x \quad (1)$$

$$S_\lambda(x) = \lambda \sin(x) \quad (2)$$

$$Q_c(x) = x^c + c \quad (3)$$

و چند نگاشت دیگر می‌شود. هدف ما درمورد این توابع و خانواده‌های دیگر این است که ساختار نقاط متناوب این خانواده‌ها چگونه و در چه موقع تغییر می‌کند، به عبارت دیگر، انشعاب این خانواده‌ها را بررسی می‌کنیم. با چند مثال ساده شروع می‌کنیم.

مثال ۱.۱۲ (انشعاب زینی-گرهای یا انشعاب مماسی) خانواده $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ را که $\lambda > 0$ است درنظر بگیرید. در این خانواده، انشعاب در $\lambda = \frac{1}{e}$ اتفاق می‌افتد. برای دیدن این موضوع توجه کنید که نمودار f در $\lambda = \frac{1}{e}$ همان‌طور که در شکل ۱.۱۲ نشان داده شده است تغییر می‌کند. هنگامی که $\lambda > \frac{1}{e}$ باشد نمودار E_λ نیمساز ربع اول را قطع نمی‌کند. درنتیجه E_λ هیچ نقطه ثابتی ندارد. وقتی $\lambda = \frac{1}{e}$ است، نمودار، نیمساز را به صورت مماس در $x = 1$ و $y = 1$ قطع می‌کند.



شکل ۱.۱۲. نمودارهای $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ برای الف $\lambda > \frac{1}{e}$ ، ب $\lambda = \frac{1}{e}$ و ج $\lambda < \frac{1}{e}$.

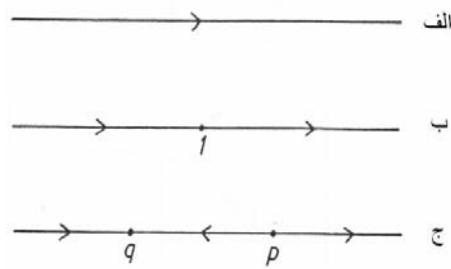
برای $\lambda < \frac{1}{e}$ ، نمودار، نیمساز را در دو نقطه q با $1 < E'_\lambda(q)$ و p با $1 > E'_\lambda(p)$ قطع می‌کند. درنتیجه E_λ برای $\lambda < \frac{1}{e}$ دارای دو نقطه ثابت است. بنابراین، با کمتر شدن مقدار پارامتر، دو نقطه ثابت موقع عبور λ از نقطه $\frac{1}{e}$ متولد می‌شوند. با تحلیل نموداری، می‌توان بقیه نمای فاز را برای هر استخراج کرد. مشاهدات زیر را به عنوان تمرین واگذار می‌کیم.

(۱) اگر $\lambda > \frac{1}{e}$ ، آنگاه به ازای هر x ، $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$.

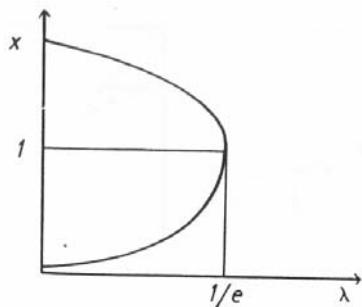
(۲) اگر $\lambda = \frac{1}{e}$ ، آنگاه $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$ ، $x > 1$ ، $E_\lambda^n(x) \rightarrow 1$ ، $x < 1$. اگر $1 < \lambda < \frac{1}{e}$ ، آنگاه $E_\lambda(1) = 1$.

(۳) اگر $\lambda < \frac{1}{e}$ ، آنگاه $E_\lambda^n(x) \rightarrow q$ ، $x < p$ و $E_\lambda(q) = p$. اگر $p < x < q$ ، آنگاه $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$.

نمای فاز E_λ در شکل ۱.۱۲ نشان داده شده است. این یک تغییر متدائل در نمای فاز است که انشعاب زینی-گرهای ایجاد می‌کند. برای استفاده در آینده توجه کنید که در انشعاب $(\frac{1}{e} = \lambda)$ و



شکل ۲.۱۲. نمای فاز برای $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ ، ب $\lambda = \frac{1}{e}$ و ج $\lambda < \frac{1}{e}$.

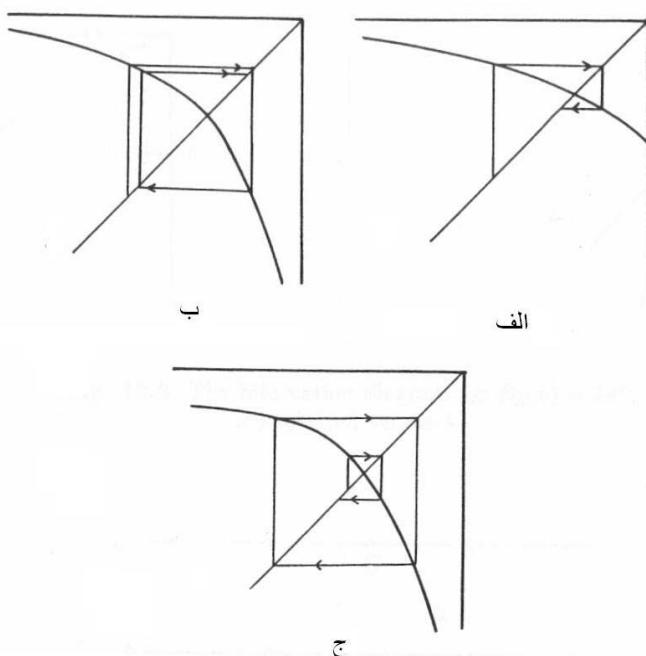


شکل ۳.۱۲. نمودار انشعاب برای $x' = \lambda e^x$ در برابر λ رسم شده است.

$$E_\lambda''(1) = 1 \quad E_\lambda'(1) = 1 \quad x = 1$$

این انشعاب را می‌توان به صورت گرافیکی در نمودار انشعاب که در آن نقاط ثابت (یا متناوب) در مقابل پارامترها قرار می‌گیرند نیز توصیف کرد. شکل ۳.۱۲ را ببینید. هر برش عمودی نمودار انشعاب، مکان نقاط ثابت E_λ را روی خط حقیقی به دست می‌دهد.

مثال ۲.۱۲ (انشعاب دوره دو برابر ساز) باز هم خانواده $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ را این بار برای $\lambda < 0$ در نظر می‌گیریم. نمودار E_λ در شکل ۴.۱۲ در ۳ حالت مهم داده شده است. اگر $\lambda = -e$ ، نقطه ثابت $E_\lambda(-1) = -1$ درنتیجه ۱- یک نقطه ثابت غیرهذلولی برای E_λ است. اگر $\lambda > -e$ ، نقطه ثابت E_λ جاذب و اگر $\lambda < -e$ ، نقطه ثابت E_λ دافع است (تمرین ۳). درنتیجه، نقطه ثابت E_λ در $\lambda = -e$ دستخوش تغییری ذاتی در دینامیک می‌شود. اگرچه این هم همه چیزی که



شکل ۴.۱۲. نمودارهای $E_\lambda(x) = \lambda e^x$ برای الف، ب و ج.

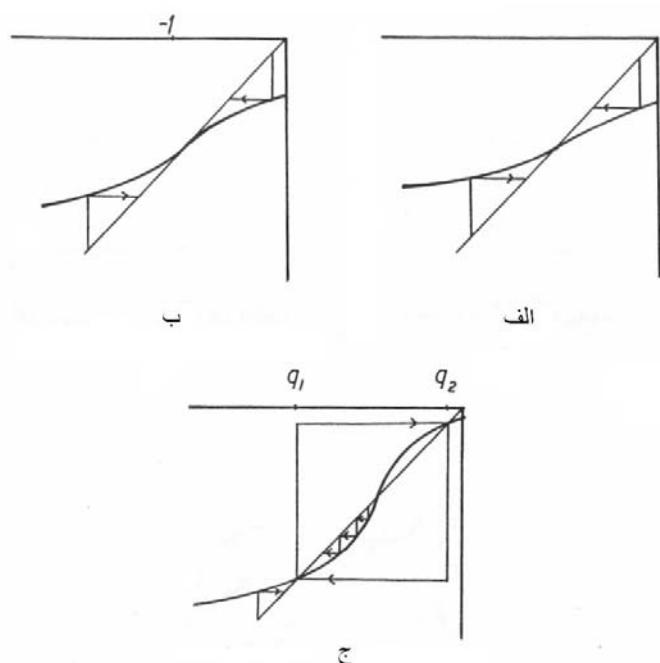
اتفاق می‌افتد نیست. نمودار E_λ^2 را در نظر بگیرید. با انجام محاسبات به راحتی دیده می‌شود که E_λ^2 نگاشتی صعودی است که اگر $-1 < E_\lambda(x) < -e$ دارای تقریر رو به بالا و اگر $-e < \lambda < 0$ ، دارای تقریر رو به پایین است. شکل ۵.۱۲ را ببینید.

بنابراین هنگامی که λ به مقادیر کمتر از $-e$ کاهش می‌یابد E_λ^2 دارای دو نقطه ثابت جدید در q_1 و q_2 می‌شود. از آنجاکه E_λ فقط یک نقطه ثابت یکتا دارد، این نقاط، نقاط متناوب با تناوب ۲ هستند. از نظر دینامیکی، این انشعاب دوره-دو برابر ساز شامل

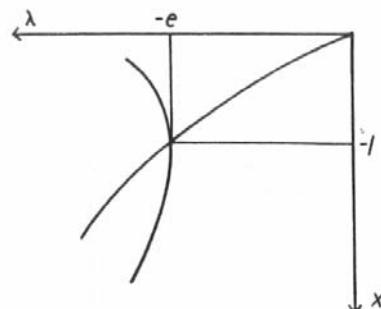
۱. تغییر نقطه ثابت از حالت جاذب به دافع همراه با

۲. تولد یک مدار جدید با تناوب ۲ است.

توجه کنید که در مثال بالا زمانی که نقطه ثابت "جادبه‌اش" را از دست می‌دهد مدار با تناوب ۲ آن را به دست می‌آورد. همچنین برای استفاده در آینده توجه کنید که در نقطه انشعاب $\lambda = -e$ ، $E_\lambda'''(-1) = 0$ و $E_\lambda''(-1) = -1$ داریم ($x = -1$)



شکل ۵.۱۲. نمودارهای $E_\lambda^r(x)$ برای الف، ب و ج $\lambda = -e$ و $\lambda < -e$ و $\lambda > -e$.



شکل ۶.۱۲. نمودار انشعاب برای $E_\lambda(x) = \lambda e^x$; x در برابر λ رسم شده است.

شكل ۶.۱۲، نمودار انشعاب برای انشعاب دوره-دو برابر ساز است. انشعاب دوره-دو برابر ساز مشابه در خانواده نگاشتهای درجه در رخ می‌دهد. بخش ۴.۱ را ببینید. برای نگاشتها روی محور حقیقی، این دو انشعاب متداول ترین انواع انشعاب هستند؛ البته انشعابهای دیگری نیز اتفاق می‌افتد.

مثال ۳.۱۲ فرض کنید $S_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$. توجه کنید که برای همه λ ها، $S_\lambda(0) = 0$ و برای $\lambda = 1$ ، $S'_\lambda(0) = 1$. تحلیل نموداری نشان می‌دهد که نمای فاز S_λ به صورتی است که در شکل ۷.۱۲ برای $x < \pi$ نشان داده شده است (تمرین ۵). مبداء مختصات دو نقطه ثابت جدید متولد می‌کند و هنگامی که λ از مقدار ۱ افزایش می‌یابد از جاذب به دافع تغییر می‌کند. دلیل غیرمتداول این انشعاب این است که هنگامی که $\lambda = 1$ ، هر دو حالت $S'_\lambda(0) = 1$ و $S''_\lambda(0) = 0$ اتفاق می‌افتد. در واقع، S_λ یک تابع فرد است و درنتیجه در نزدیکی $x = 0$ متقارن است. معمولاً هنگامی یک تابع دارای مشتق دوم ناصرف است که مشتق اولش ۱ باشد و تقارنی موجود نباشد.

مثال ۴.۱۲ مجدداً نگاشت $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ را درنظر بگیرید. هنگامی که $\mu = 1$ دارای یک نقطه ثابت یکتاست، ولی برای سایر $\mu \neq 1$ ، دو نقطه ثابت (یکی از آنها ممکن است منفی باشد) موجود است. نمای فاز در شکل ۸.۱۲ داده شده است. این انشعاب نیز غیرمتداول است چون

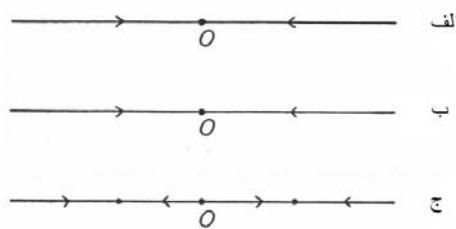
$$\frac{d}{d\mu} F_\mu(0)|_{\mu=1} = 0.$$

معمولًاً نیاز است که در انشعاب، تغییر پارامتر، دارای "سرعت" مخالف صفر باشد. مثالهای بالا نشان می‌دهند که انشعاب، نزدیک نقاط ثابت و متناوب غیرهذلولوی رخ می‌دهد. در واقع همان‌طور که قضیه بعدی نشان می‌دهد این تنها جایی است که انشعاب در نقاط ثابت اتفاق می‌افتد.

قضیه ۵.۱۲ فرض کنید f_λ خانواده یک پارامتری از توابع بوده و فرض کنید $x_0 = f_{\lambda_0}(0)$ و $f'_{\lambda_0}(0) \neq 1$. در این صورت بازه‌هایی چون I حول x_0 و N حول λ_0 و نگاشت هموار $p : N \rightarrow I$ موجود است به طوری که $x_0 = p(\lambda_0)$ و $f_\lambda(p(\lambda)) = p(f_\lambda(\lambda))$. به علاوه، f_λ هیچ نقطه ثابت دیگری در I ندارد.

برهان. نگاشت x برای $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$ را درنظر بگیرید. با توجه به فرض داریم $G(0, \lambda_0) = 0$ و

$$\frac{\partial G}{\partial x}(0, \lambda_0) = f'_{\lambda_0}(0) - 1 \neq 0.$$



شکل ۷.۱۲. نمای فاز $S_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$ هنگامی که الف $1 < \lambda < \pi$ ، ب $\lambda = 1$ و ج $\lambda < 1$.

طبق قضیه تابع ضمنی، بازه‌های I حول x_0 و N حول λ_0 و نگاشت هموار $p: N \rightarrow I$ موجود است به طوری که $p(\lambda_0) = x_0$ و به ازای هر $\lambda \in N$ ، $G(p(\lambda), \lambda) = 0$. علاوه بر آن، به جز در $x = p(\lambda) = 0$ و برهان کامل می‌شود. \square

ملاحظات.

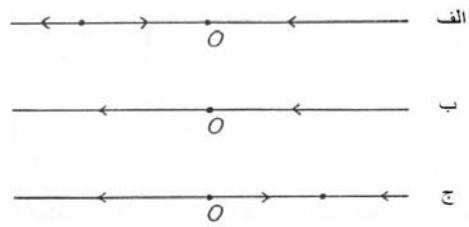
۱. با بررسی کردن نمودار f_λ ، محتوای قضیه بهتر درک می‌شود. از آنجاکه f_λ خط $x = y$ را با زاویه‌ای در (x_0, x_0) قطع می‌کند، نمودارهای f_λ نزدیک نیز باید دارای همین خاصیت باشند. شکل ۹.۱۲ را ببینید. بنابراین یک و فقط یک نقطه ثابت x برای λ ای به اندازه کافی نزدیک به λ موجود است. نمودار انشعاب مربوط، در شکل ۱۰.۱۲ نشان داده شده است.

۲. برای ساده‌تر کردن مطلب، اغلب فرض می‌شود که نقطه ثابت λ با تغییر λ ، تغییر نکند. قضیه قبل اجازه چنین فرضی را به ما می‌دهد. فرض کنید f_λ همان تابع قضیه ۵.۱۲ باشد و همچنین عبارت $f_\lambda(p(\lambda)) = p(\lambda)$ نیز مشابه عبارت قضیه باشد. نگاشت جدید

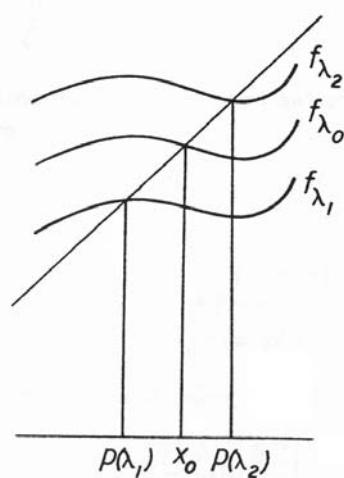
$$g_\lambda(z) = f_\lambda(z + p(\lambda)) - p(\lambda)$$

را در نظر بگیرید. بهوضوح، برای همه λ ها، $g_\lambda(0) = f_\lambda(p(\lambda)) - p(\lambda) = 0$ و درنتیجه نقطه 0 همیشه ثابت است. به علاوه، g_λ از طریق نگاشت ساده $h_\lambda(x) = x - p(\lambda)$ با f_λ مزدوج توپولوژیکی است. درنتیجه دینامیک f_λ و g_λ و مانند هم هستند ولی کار کردن با g_λ به علت ثابت ماندن نقطه ثابت در صفر با تغییر λ ، ساده‌تر است.

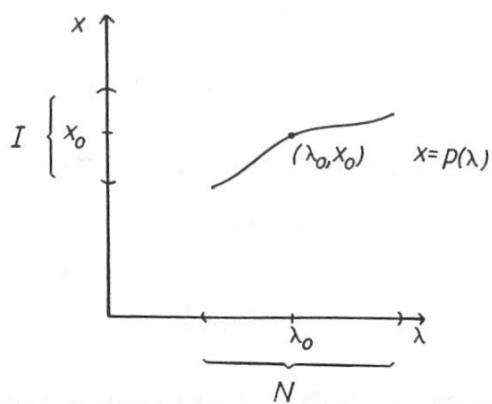
۳. قضیه بالا (همین‌طور همه مطالب بعدی) برای نقاط متناوب با تعویض f با f^n برقرار است. اکنون به حالت کلی نظریه انشعاب برمی‌گردیم.



شکل ۱۲.۸. نمای فاز $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ برای الگوی $\mu < 1$ ، $\mu = 1$ و $\mu > 1$.



شکل ۹.۱۲



شکل ۶.۱۲. نمودار انشعاب برای $f'_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$

قضیه ۶.۱۲ (انشعاب زینی-گرهای). فرض کنید

$$f'_{\lambda_0}(0) = 0.$$

$$f'_{\lambda_0}(0) = 1.$$

$$f''_{\lambda_0}(0) \neq 0.$$

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0.$$

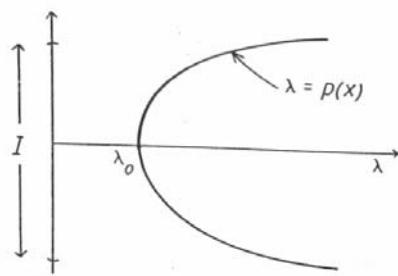
آنگاه بازه‌ای چون I حول 0 و نگاشت هموار $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است به طوری که

$$f_{p(x)}(x) = x.$$

$$p''(0) \neq 0 \quad \text{و} \quad p'(0) = 0.$$

ملاحظه. علامتهای $f''_{\lambda_0}(0)$ و

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}$$



شکل ۱۱.۱۲. نمودار انشعاب برای انشعابهای زینی-گرهای و دوره-دو برابر ساز.
منحنی $\lambda = p(x)$ نقاط ثابت λ را در حالت زینی-گرهای و نقاط با تناوب دو را در
حالت دوره-دو برابر ساز نشان می‌دهد.

”جهت“ انشعاب را تعیین می‌کند. اگر این دو دارای علامتهای مخالف باشند، آنگاه نمودار انشعاب، مانند شکل ۱۱.۱۲ است.

برهان. فرض کنید $G(x, \lambda) = f_\lambda(x) - x$. توجه کنید که از $G(x, \lambda) = 0$ نتیجه می‌شود که f_λ در x دارای یک نقطه ثابت است. قضیه تابع ضمنی را برای G به کار می‌بریم.
توجه کنید که $G(0, \lambda_0) = 0$ و

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(0, \lambda_0) = \frac{\partial f_\lambda}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0) \neq 0.$$

بنابراین نگاشت هموار $p(x)$ موجود است به‌طوری‌که $G(x, p(x)) = 0$. از قضیه مشتق زنجیری نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \lambda} p'(x) = 0.$$

درنتیجه

$$p'(x) = \frac{-\frac{\partial G}{\partial x}(x, p(x))}{\frac{\partial G}{\partial \lambda}(x, p(x))}.$$

با مشتق‌گیری از این عبارت و استفاده از رابطه بالا داریم

$$\begin{aligned} p''(0) &= \frac{-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(0, \lambda) \frac{\partial G}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0, \lambda)}{\left(\frac{\partial G}{\partial \lambda}\right)^2} \\ &= -\frac{f''_{\lambda_0}(0)}{\frac{\partial f}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0}(0)}. \end{aligned}$$

□

این برهان را کامل می کند.

قضیه ۷.۱۲ (انشعاب دوره دو برابر ساز) فرض کنید

۱. برای همه λ ها در بازه ای حول λ_0 :

$$f'_{\lambda_0}(\circ) = -1.2$$

$$\cdot \frac{\partial(f_{\lambda}^r)'|_{\lambda=\lambda_0}}{\partial \lambda}(\circ) \neq 0.3$$

در این صورت بازه ای چون I حول \circ و نگاشت $p : I \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است به طوری که

$$f_{p(x)}(x) \neq x$$

ولی

$$f_{p(x)}^r(x) = x.$$

برهان. برای اثبات قضیه قرار دهید $G(x, \lambda) = f_{\lambda}^r(x) - x$. نمی توانیم به صورت مستقیم از قضیه تابع ضمنی استفاده کنیم چون

$$\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\circ, \lambda_0) = 0.$$

بنابراین قرار می دهیم

$$H(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{G(x, \lambda)}{x} & x \neq 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\circ, \lambda) & x = 0. \end{cases}$$

به راحتی می توان بررسی کرد که H هموار بوده و در روابط زیر صدق می کند

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(\circ, \lambda_0) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(\circ, \lambda_0) \\ \frac{\partial^r H}{\partial x^r}(\circ, \lambda_0) &= \frac{1}{3} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}(\circ, \lambda_0). \end{aligned}$$

حال قضیه تابع ضمنی را برای H به کار می بریم. توجه کنید

$$\begin{aligned} H(\circ, \lambda_0) &= \frac{\partial G}{\partial x}(\circ, \lambda_0) \\ &= (f_{\lambda_0}^r)'(\circ) - 1 \\ &= f'_{\lambda_0}(\circ) \cdot f'_{\lambda_0}(\circ) - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

با توجه به فرض داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\circ, \lambda_0) &= \frac{\partial}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0} \left((f_\lambda')'(\circ) - 1 \right) \\ &= \frac{\partial (f_\lambda')'}{\partial \lambda}(\circ) \\ &\neq \circ.\end{aligned}$$

بنابراین نگاشت هموار $p(x)$ روی یک همسایگی \circ موجود است به طوری که $\lambda_0 = p(\circ)$ و $H(x, p(x)) = \circ$. به ویژه برای $x \neq \circ$ داریم

$$\frac{1}{x}G(x, p(x)) = \circ$$

و درنتیجه x یک نقطه با تناوب دو برای $f_{p(x)}$ است. توجه کنید که با توجه به قضیه ۵.۱۲، x نقطه ثابتی برای $f_{p(x)}$ نیست. از آنجاکه

$$(f_{\lambda_0}')''(\circ) = f_{\lambda_0}''(\circ) \cdot (f_{\lambda_0}'(\circ))' + f_{\lambda_0}''(\circ) \cdot f_{\lambda_0}'(\circ) = \circ$$

و $1 - f_{\lambda_0}'(\circ)$ همانند بالا داریم

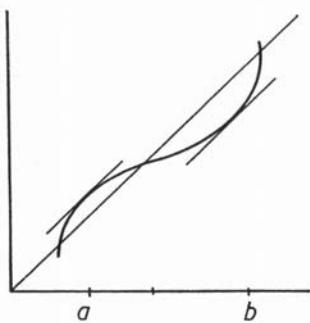
$$p'(\circ) = \frac{-\frac{\partial H}{\partial x}(\circ, \lambda_0)}{\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\circ, \lambda_0)} = \circ.$$

این برهان را کامل می‌کند. \square

ما می‌توانیم به صورت زیر از وضعیت خم نقاط متناوب اطلاعات بیشتری به دست آوریم. با استفاده از نمادهای برهان قبل داریم

$$\begin{aligned}p''(\circ) &= \frac{-\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(\circ, \lambda_0) \cdot \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\circ, \lambda_0)}{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(\circ, \lambda_0)\right)^2} \\ &= \frac{\frac{\lambda}{\lambda_0} f_{\lambda_0}'''(\circ) + \left(f_{\lambda_0}''(\circ)\right)'}{\frac{\partial}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0} (f_\lambda')'(\circ)}.\end{aligned}$$

توجه کنید از آنجاکه $1 - f_{\lambda_0}'(\circ)$ صورت این کسر دقیقاً برابر با $(-\frac{\lambda}{\lambda_0})Sf_{\lambda_0}(\circ)$ است. بنابراین نتیجه زیر حاصل می‌شود.



شکل ۱۲.۱۲. از آنجاکه f'_λ دارای مینیمم نسبی مثبت بین a و b است،
نگاشت Sf_λ مشتق شوارتسی منفی ندارد.

نتیجه ۸.۱۲ علاوه بر مفروضات قضیه ۷.۱۲، فرض کنید $0 \neq (0)Sf_\lambda$. در این صورت خم $p''(x) = p(x)$ در $\lambda = 0$ صدق می‌کند.

ملاحظات.

۱. این بدین معنی است که $p(x) = \lambda$ مقعر است و جهت تقری آن یا درجهٔ تواند 11.12 نشان می‌دهد یا درجهٔ عکس آن است.

۲. اگر برای همه λ ‌های نزدیک به 0 داشته باشیم $0 < \lambda$ در Sf_λ خانواده f_λ در λ نمی‌تواند یک انشعاب دوره-دو برابر ساز "معکوس" داشته باشد. منظورمان از این عبارت، انشعابی به صورت زیر است. اگر $0 < \lambda$, f_λ دارای یک نقطه ثابت دافع یکتا (به صورت موضعی) است. اگر $0 = \lambda$, آنگاه f_λ دارای یک نقطه ثابت یکتا با مرتبه ۱- است. اگر $0 > \lambda$, آنگاه f_λ دارای یک نقطه ثابت جاذب یکتا به همراه یک نقطه متناوب دافع با تناوب دو است. شکل ۱۲.۱۲ نشان می‌دهد که چرا چنین چیزی ناممکن است چون با توجه به لم ۵.۱۱ این نمودار اتفاق نمی‌افتد.

تمرین.

۱. انشعابها را تعیین کرده و روی نمای فاز قبل و بعد از انشعابی که در مقدار پارامتر مشخص شده در خانواده نگاشتهای زیر رخ می‌دهد بحث کنید.

الف. $\mu = 3$, $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$.

ب. $\lambda = 1$, $F_\lambda(x) = \lambda x - x^3$.

ج. $\lambda = -1$, $F_\lambda(x) = \lambda x - x^3$.

د. $c = -\frac{3}{4}$, $Q_c(x) = x^2 + c$.

ه. $\lambda = -1$, $A_\lambda(x) = \lambda \arctan(x)$.

و. $\lambda = 1$, $H_\lambda(x) = \lambda \sinh(x)$.

۲. فرض کنید $0 < \lambda$. نشان دهید نمای فاز E_λ همان‌طوری است که در شکل ۲.۱۲ داده شده است.

۳. فرض کنید $0 < \lambda$. نشان دهید $E_\lambda(x)$ دارای یک نقطه ثابت جاذب یکنائب هرگاه $-e < \lambda < 0$ و دارای یک نقطه ثابت دافع یکنائب هرگاه $0 < \lambda < e$.

۴. ثابت کنید E'_λ برای x هایی با $1 - E'_\lambda(x) > 0$ دارای تقریر رو به بالا و برای x هایی با $0 < E'_\lambda(x) < -1$ دارای تقریر رو به پایین است.

۵. درمورد نمای فاز و نمودار انشعاب $S_\lambda(x) = \lambda \sin x$ برای $-\pi < x < \lambda$ بحث کنید.

۶. نگاشت درجه دو $Q_\lambda(x) = x^2 + \lambda$ را در نظر بگیرید. چه موقع این خانواده دارای یک انشعاب زینی-گرهای یا دوره-دو برابر ساز است؟ درمورد نمای فاز و نمودار انشعاب هر حالت بحث کنید.

۷. با استفاده از قضیه شارکوفسکی و تحلیل نموداری، درمورد نمای فاز $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ هنگامی که μ به ۳ افزایش می‌یابد بحث کنید. با استفاده از تحلیل نموداری توضیح دهید که چرا F_μ باید متحمل یک سری انشعاب دوره-دو برابر ساز پشت سر هم شود.

۱۳ نگاه دیگری به تناوب ۳

در این بخش، ما به بحث درمورد نگاشت درجه دو $(x - 1)^{-\mu} F_\mu(x) = \mu x$ می‌گردیم. این بار پارامتر $\mu = 3.839$ را برای دنبال کردن ایده‌های اسمیل^{۱۰} و ولیامز^{۱۱} درنظر می‌گیریم. تا انتهای این بخش اندیس μ را حذف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $F(x) = 3.839x(x - 1)^{-\mu}$. هدف ما بررسی دقیق‌تر نتایج بخش ۱۰.۱ درمورد مفهوم وجود نقاط متناوب با تناوب ۳ است. با یک ماشین حساب می‌توان به راحتی بررسی کرد که مدار زیر یک مدار جاذب با تناوب ۳ برایتابع F است که تا ۶ رقم اعشار داده شده است.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.149888 \\ a_2 &= 0.489172 \\ a_3 &= 0.959299. \end{aligned}$$

به علاوه، $-0.78 \approx (F^3)'(a_i)$. اثبات وجود چنین نقطه متناوبی می‌تواند با سختی با محاسبات دستی انجام شود. می‌توان یک همسایگی کوچک حول a_1 پیدا کرد که تحت F^3 به درون خودش نگاشته شود و مشتق آن همه‌جا کمتر از ۱ باشد. جزئیات ملال آور را به تمرینات موكول می‌کنیم ولی تأکید می‌کنیم که همه این محاسبات با دست به صورت دقیق قابل انجام است.

طبق قضیه شارکوفسکی F دارای نقاط متناوب با هر متناوبی است. با توجه به نتایج بخش ۱۱.۱، هیچ‌یک از نقاط نزدیک a_i جاذب نیستند. بنابراین، برای محاسبات کاربردی‌تر، این نقاط برای کامپیوتر قابل تشخیص نیستند. این سوال پیش می‌آید: بقیه نقاط متناوب کجا هستند و دقیقاً چند تا از آنها موجود است؟ با معرفی یک مفهوم کلی تراز دینامیک نمادین با عنوان تغییرجا از نوع متناهی به این سوالها پاسخ می‌دهیم. ابتدا تغییرجا روی N نماد را تعریف می‌کنیم. فرض کنید Σ_N مجموعه همه دنباله‌های اعداد طبیعی بین ۱ تا N باشد، به عبارت دیگر،

$$\Sigma_N = \{(s) = (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j \in \mathbb{Z}, 1 \leq s_j \leq N\}.$$

توجه کنید برخلاف Σ_2 که قبلاً معرفی شد، به عنوان یک درایه در دنباله‌های N مورد قبول نیست و برای ساماندهی بیشتر در آینده، به جای آن از نمادهای ۱ تا N استفاده می‌کنیم. همانند بخش ۱.۶، یک متریک طبیعی یا نگاشت فاصله روی Σ_N با تعریف

$$d_N[s, t] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|s_n - t_n|}{N^n}$$

که $(s_0 s_1 s_2 \dots) = s$ و $(t_0 t_1 t_2 \dots) = t$ موجود است. برهان قضیه زیر مشابه قضیه‌های ۲.۶ و ۳.۶ است و بنابراین آن را به تمرین واگذار می‌کنیم.

Smale^{۱۰}
Williams^{۱۱}

قضیه ۱.۱۳

۱. d_N یک متریک روی Σ_N است.

۲. اگر برای k , $\sigma(s_i = t_i, i = 0, \dots, k)$, آنگاه $d_N[s, t] \leq \frac{1}{N^k}$.

۳. اگر برای k , $\sigma(s_i = t_i, i \leq k)$, آنگاه $d_N[s, t] < \frac{1}{N^k}$.

همانند حالت Σ_2 , نگاشت تغییرجا به صورت $(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots) \sigma$ تعریف می‌شود. قضیه ۶.۵ را می‌توان کلمه به کلمه دراین حالت برای اثبات پیوستگی σ به کار برد.

هدف ما توصیف زیرمجموعه‌هایی از Σ_N است که به‌طور طبیعی پدید می‌آیند و صورت عمومی‌تری از دینامیک نمادین را رائه می‌کند. فرض کنید A یک ماتریس $N \times N$ بوده و درایه سطر i ام و ستون j ام آن که با a_{ij} نمایش داده می‌شود $= 1$ باشد. یعنی، A یک آرایه مربعی از $N \times N$ از 0 ها و 1 ها است. ماتریس A , ماتریس تغییر وضعیت سیستم نامیده می‌شود. از A برای توصیف دنباله‌هایی از Σ_N استفاده می‌کنیم که در داخل مجموعه‌ای که آن را با Σ_A نمایش می‌دهیم قرار می‌گیرند. یک دنباله $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ در Σ_A قرار می‌گیرد هرگاه از قانون زیرپیروی کند. هر جفت مجاز از درایه‌ها در دنباله s یک وضعیت در ماتریس A یعنی درایه $a_{s_i s_{i+1}}$ را مشخص می‌کنند. یک دنباله در Σ_A قرار می‌گیرد اگر و تنها اگر چنین درایه‌ای 1 باشد. به‌طور خلاصه،

$$\Sigma_A = \{(s) = (s_0 s_1 s_2 \dots) \mid a_{s_i s_{i+1}} = 1, \forall i\}.$$

در واقع، از ماتریس تغییر وضعیت برای منع کردن جفتهایی از درایه‌ها، در دنباله‌های موجود در Σ_A استفاده می‌کنیم.

مثال ۲.۱۳ فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 0 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}.$$

از آن‌جا که $a_{12} = a_{21} = 0$, نتیجه می‌شود که 1 و 2 هرگز نمی‌توانند در یک دنباله در Σ_A مجاور باشند. بنابراین، فقط دو دنباله مجاز در Σ_A موجود است که دنباله‌های ثابت $(111\dots)$ و $(222\dots)$ هستند.

مثال ۳.۱۳ فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ 0 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}.$$

در این مثال، ۲ می تواند پس از ۱ قرار گیرد ولی عکس آن درست نیست. بنابراین Σ_A شامل دنباله های ثابت به علاوه دنباله هایی به شکل (... ۱۱۲۲۲۱...) است که در آن تعداد بی نهایت ۲ می تواند پس از تعداد دلخواهی ۱ قرار بگیرد.

مثال ۴.۱۳ فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

هر ترکیبی از ۱ ها و ۲ ها در دنباله ای از Σ_A به استثنای یک جفت مجاور از اعداد ۲ مجاز است. از نماد σ_A برای تحدید σ به مجموعه Σ_A استفاده می کنیم. قضیه بعدی این موضوع را نشان می دهد.

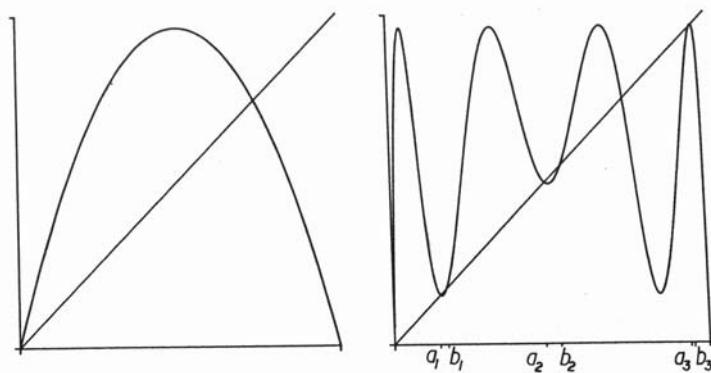
قضیه ۵.۱۳ مجموعه Σ_A یک زیرمجموعه بسته از Σ_N است که تحت σ_A پایاست.

برهان. پایابی واضح است. برای اثبات بسته بودن Σ_A ، فرض می کنیم که s_i یک دنباله از اعضای Σ_A باشد، یعنی، یک دنباله از دنباله ها، که به t میل می کند. اگر $t \notin \Sigma_A$ ، کوچکترین عددی مانند a موجود است که $a_{t_\alpha t_{\alpha+1}} = 0$. از آنجاکه s_i به t میل می کند، عدد صحیح دیگری چون K هست که اگر $K > i$ ، آنگاه $d_N[s_i, t] < \frac{1}{N^{\alpha+1}}$. با استفاده از قضیه ۱.۱۳، باید $t_0, t_1, \dots, t_{\alpha+1}$ با درایه های متناظر از s_i برای $i \geq K$ یکسان باشند. به ویژه، از آنجاکه $s_i \in \Sigma_A$ باید داشته باشیم $a_{t_\alpha t_{\alpha+1}} = 1$. این تناقض، برهان را به دست می دهد. \square

نگاشت σ_A : یک زیرتغییرجا از نوع متناهی نامیده می شود چون با تعدادی متناهی شرط که توسط ماتریس تغییر وضعیت A القاء می شود تعیین می گردد. زیرتغییرجا هایی موجودند که از نوع متناهی نیستند ولی در این کتاب درمورد آنها بحث نمی کنیم. به نگاشت درجه دو که از نوع $F(x) = ۳.۸۳۹x(1-x)$ باز می گردیم. یادآوری می کنیم که یک مدار متناوب جاذب در نزدیکی $a_1 = ۰.۱۴۹۸۸۸$ و $a_2 = ۰.۹۵۹۲۹۹$ موجود است. نمودارهای F و F^3 در شکل ۱.۱۳ رسم شده اند.

یک مدار متناوب دومی از تناوب ۳ برای F موجود است که آن را با b_1 , b_2 و b_3 نمایش می دهیم. این نقاط به طور تقریبی برابرند با

$$\begin{aligned} b_1 &= ۰.۱۶۹۰۴۰ \\ b_2 &= ۰.۵۳۹۲۴۷ \\ b_3 &= ۰.۹۵۳۸۳۷ \end{aligned}$$

شکل ۳.۱۳. نمودارهای $F(x)$ و $F^3(x)$

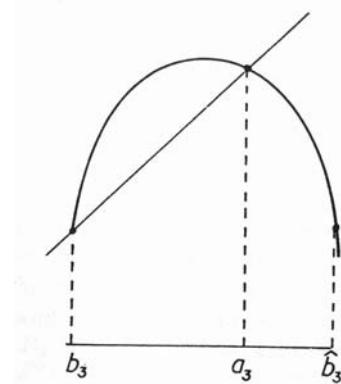
که $F(b_1) \approx b_2$ و $F(b_2) \approx b_3$. ممکن است کسی نتیجه بگیرد که $(F^3)'(b_i) \approx 2.66$. باز هم، وجود چنین نقطه متناوی را می‌توان با محاسبه هر دوی F^3 و $(F^3)'$ روی یک بازه کوچک حول b_i و توجه به اینکه F^3 این بازه را روی خودش اببساط می‌دهد اثبات کرد.

از بخش ۱۱.۱ یادآوری می‌کنیم که یک بازه باز ماکسیمال حول هر a_i وجود دارد به طوری که شامل همه نقاطی است که تحت تکرارهای F^3 به a_i میل می‌کنند. این بازه را با $W(a_i)$ نمایش می‌دهیم. از برهان قضیه ۱۱.۴ دیده می‌شود که یکی از نقاط انتهایی هر $W(a_i)$ توسط F^3 ثابت می‌ماند. بنابراین b_i یکی از نقاط انتهایی $W(a_i)$ است. فرض کنید \hat{b}_i نقطه‌ای در طرف دیگر a_i از b_i باشد که توسط F^3 به b_i نگاشته می‌شود. شکل ۳.۱۳ را بینید.

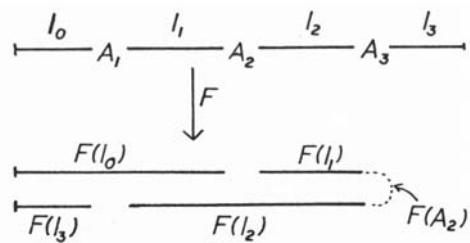
فرض کنید $(\hat{b}_1, b_1), A_1 = (\hat{b}_2, b_2)$ و $A_2 = (\hat{b}_3, b_3)$. توجه کنید که F و A_3 را به ترتیب به صورت یکنوا به روی A_2 و A_1 می‌نگارد ولی F دارای یک نقطه بحرانی در $\in A_2 \setminus A_1$ است و بنابراین F روی این بازه یکنوا نیست. اگرچه از آنجاکه بیشترین مقدار F ، برابر با 0.95975 است

نتیجه می‌شود که $F(A_2)$ مشمول در A_2 است. همچنین توجه کنید که $F(b_2) = F(\hat{b}_2) = b_3$. مطابق بخش ۵.۱ می‌توان به سادگی نشان داد که اگر $x < 1$ یا $x > 1$ آنگاه $F^n(x) \rightarrow -\infty$. به علاوه، اگر برای نای، $x \in A_i$ ، آنگاه $(F^n(x))$ به مدار a_i میل می‌کند. درنتیجه، همه نقاط متناوب دیگر باید در متمم A_i در I قرار گیرند. چهار بازه بسته در متمم A_i از I قرار می‌گیرند و آنها را از چپ به راست I_0, I_1, I_2 و I_3 می‌نامیم. از آنجاکه رفتار b_i را تحت تکرار F می‌دانیم، نحوه نگاشته شدن این چهار بازه توسط F مشخص است. تصاویر آنها در شکل ۳.۱۳ نشان داده شده است.

از آنجاکه هیچ نقطه متناوب دیگری برای F در $W(a_i)$ وجود ندارد، نتیجه می‌شود که همه بی‌نهایت نقطه متناوب باید در I_j قرار گیرند. در واقع، می‌توان بیشتر از این گفت.



شکل ۲.۱۳. قسمتی از نمودار $F^3(x)$ شامل a_3 و \hat{b}_3



شکل ۳.۱۳. تصاویر I_0, I_1, I_2 و I_3

قضیه ۶.۱۳ همه نقاط متناوب F به جز نقطه ثابت \circ و نقاط متناوب a_1, a_2 و a_3 با تناوب ۳ در $I_1 \cup I_2$ قرار می‌گیرند.

برهان. توجه کنید که F روی هریک از بازه‌های I_j یکنواست. از شکل ۳.۱۳، دیده می‌شود که I_0 را به هردوی I_1 و I_2 ، I_1 را به هردوی I_2 و I_3 ، I_2 را به هردوی I_1 و I_3 و در آخر I_3 را به روی I_0 می‌نگارد. از این نتیجه می‌شود که اگریک نقطه متناوب x عضو $I_1 \cup I_2$ باشد، آنگاه $F(x) \in I_1 \cup I_2$. بنابراین اگر $x \in I_1 \cup I_2$ روی یک مدار متناوب قرار گیرد، آنگاه کل مدار x در $I_1 \cup I_2$ قرار می‌گیرد.

اکنون توجه می‌کنیم که اگر $x \in I_0$ و $x \neq \circ$ ، آنگاه $F(x) > x$. بنابراین n ای موجود است که $F^n(x) \notin I_0$. درنتیجه $F^n(x) \in A_1$ که در این صورت x متناوب نیست و یا برای آن $F^n(x) \notin I_1$.

در حالت آخر، مدار پیشروی $F^n(x)$ هرگز نمی‌تواند I_1 یا I_2 را ترک کند و به x بازگردد. پس باز هم x نمی‌تواند متناوب باشد. در آخر، اگر $x \in I_2$ ، آنگاه $F(x) \in I_1$ و باز هم x متناوب نمی‌شود. \square نتیجه می‌شود که باقیمانده همه نقاط متناوب F در $I_2 \cup I_1$ قرار می‌گیرند. مجموعه نقاطی را که کل مدار آنها مشمول در این بازه است با Λ نشان می‌دهیم. برای درک دینامیک F روی Λ ، دوباره از دینامیک نمادین کمک می‌گیریم. دنباله متناظر با x یعنی

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$$

را با این قانون مشخص می‌کنیم که $s_j = 1$ هرگاه $F^j(x) \in I_1$ و $s_j = 2$ هرگاه $F^j(x) \in I_2$. فقط می‌تواند پشت سر یک ۲ قرار گیرد، یعنی، S مقادیرش را از Σ_A می‌گیرد که توسط

$$A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

مشخص می‌شود. توجه کنید که ما در برهان قضیه شارکوفسکی به پدیده مشابهی برخورد کردیم. در واقع، وجود یک نقطه با تناوب ۳ باعث وجود یک جفت از بازه‌ها می‌شود که تحت تکرارهای F رفتاری مشابه با I_1 و I_2 دارند. در این حالت می‌توانیم نتیجه بیشتری بگیریم.

قضیه ۷.۱۳ تحدید F به Λ مزدوج توپولوژیکی با زیرتغییرجا از نوع متناهی است که با σ_A روی Σ_A داده می‌شود.

برهان. اثبات پوشایی و پیوستگی S دقیقاً مشابه آن چیزی است که در بخش ۷.۱ انجام دادیم و جزئیات را حذف می‌کنیم. تنها تفاوت با بخش ۷.۱ در اثبات یک‌به‌یک بودن S است که روی آن تمرکز می‌کنیم. مشکلی که اینجا وجود دارد این است که $|F'(x)|$ همه‌جا روی بازه $I_1 \cup I_2$ بزرگتر از یک نیست. اگرچه از آنچاکه $< F''(b_2, b_2)$ که شامل نقطه بحرانی است حذف شده است، می‌توانیم بگوییم که $0.3 < F'(\hat{b}_2) < \nu = F'(\hat{b}_1)$. بنابراین، $|F'(x)|$ از پایین کران دار است.

ادعا می‌کنیم که $1 > \lambda$ موجود است به طوری که اگر $x \in \Lambda$ ، آنگاه $\lambda > |F'(x)|$. برای اثبات این مطلب، توجه کنید که سه بازه بسته در $I_2 \cup I_1$ موجود است که برای آنها $1 \leq |F'(x)| < |F'(x)|$. دو تا از آنها B_1 و B_2 ، نسبت به $\frac{1}{\lambda}$ متقارن هستند و سومی یعنی B_3 ، در I_2 قرار می‌گیرد. تصویر B_2 تحت F^3 مشمول در (\hat{b}_1, b_1) بوده و بنابراین $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. شکل ۱.۱۳ را ببینید.

ادعا می‌کنیم که B_1 و B_2 توسط F^3 به توالی (b_3, \hat{b}_3) نگاشته می‌شوند. در واقع، می‌توان به راحتی بررسی کرد که B_2 مشمول در بازه $x < 0.661 < F^3(0.661)$ بوده و $1 > |F^3(x)|$. این بازه را به درون (b_3, \hat{b}_3) می‌نگارد. از تقارن نتیجه می‌شود که $B_1 \cap \Lambda = \emptyset$ و $B_2 \cap \Lambda = \emptyset$. بنابراین $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

اکنون نشان می دهیم که Λ یک مجموعه هذلولوی است. K را طوری انتخاب کنید که $1 < \nu^2 \lambda^K$. فرض کنید $n > N = 3K + 2$. اگر $N > n$, آنگاه برای اعداد صحیح $\alpha > 0$ و $2 \leq i \leq n$, قرار می دهیم $i = 3(K + \alpha) + x$, با استفاده از قاعده زنجیری داریم

$$|(F^n)'(x)| = |(F^i)'(F^{3(K+\alpha)}(x))| \cdot |(F^{3(K+\alpha)})'(x)| > \nu^2 \lambda^{K+\alpha} > 1.$$

این نشان می دهد که Λ یک مجموعه هذلولوی دافع است.

حال که هذلولوی بودن به دست آمد، بقیه برهان مشابه آنچه در برهان قضیه ۲.۷ انجام دادیم است و اثبات کامل می شود. \square

توجه کنید که تأکید می کنیم این برهان با داشتن یک ماشین حساب، ساده است و اعداد آن چنان بزرگ نیستند که محاسبه دستی ناممکن باشد.

ملاحظه. روشایی را که در این اثبات به کار رفت می توان برای نشان دادن اینکه نگاشت درجه دو $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ $\leq 2 + \sqrt{5}$ یک مجموعه هذلولوی است به کار برد. ما آن را در بخش ۵.۱ حذف کرده بودیم. تمرین ۷ را ببینید.

اکنون می بینیم که همان گونه که قضیه شارکوفسکی تضمین می کند، F دارای نقاط متناوب با هر تناوبی است. در واقع، برای تولید یک نقطه متناوب با تناوب k در Σ_A ، فقط لازم است یک رشته از $1 - k$ عدد ۱ می آیند فهرست کرده و سپس این دنباله را تکرار کنیم. اینها دقیقاً مدارهایی هستند که در برهان قضیه شارکوفسکی تولید شدند. البته تعداد بسیار زیادی دنباله تکرار شونده مجاز دیگر نیز در Σ_A موجود است و این سوال پیش می آید که F دقیقاً چه تعداد نقاط متناوب از تناوب k دارد.

برای جواب دادن به این پرسش ابتدا به یک تعریف نیاز داریم.

تعریف ۸.۱۳ فرض کنید (a_{ij}) یک ماتریس $N \times N$ باشد. اثر ماتریس A با رابطه

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^N a_{ii}$$

یعنی، با مجموع درایه های قطری A داده می شود.

اثر ماتریس، یکی از مهم ترین پایاها، تحت ردۀ تزویج یک ماتریس است که در جبر خطی پیشرفته مطالعه می شود. برای ما هدف کاملاً متفاوتی وجود دارد: اثر توانهای A تعداد دقیق نقاط متناوب در Σ_A را به دست می دهد. یادآوری می کنیم که اگر (a_{ij}) و (b_{ij}) دو ماتریس $N \times N$ باشند،

آنگاه حاصل ضرب $A \cdot B = (c_{ij})$ در B ماتریس است که از رابطه

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^N a_{ik} b_{kj}.$$

حاصل می‌شود. به ویژه، اگر

$$A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 0 & & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

آنگاه

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

قضیه ۹.۱۳ فرض کنید A یک ماتریس تبدیل وضعیت $N \times N$ باشد. در این صورت

$$\text{card Per}_K \sigma_A = \text{Tr}(A^K).$$

برهان. یادآوری می‌کنیم که یک دنباله s در Σ_A با σ^K ثابت نگه داشته می‌شود اگر و تنها اگر s یک دنباله تکرار شونده از نوع $(i_0, i_1, \dots, i_{K-1}, i_0, i_1, \dots, i_{K-1}, \dots)$ باشد. چنین دنباله‌ای در Σ_A قرار می‌گیرد اگر و تنها اگر $a_{i_0, i_1} = a_{i_1, i_2} = \dots = a_{i_{K-1}, i_0} = 1$ و با به صورت معادل $a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \dots a_{i_{K-1}, i_0} = 1$. بنابراین حاصل ضربهای $a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \dots a_{i_{K-1}, i_0}$ برابر با ۱ است اگر و تنها اگر رشته $i_0, i_1, \dots, i_{K-1}, i_0$ یک قطعه مجاز از یک دنباله در Σ باشد و در غیر این صورت برابر با صفر است. درنتیجه

$$\sum_{i_0, i_1, \dots, i_{K-1}} a_{i_0, i_1} a_{i_1, i_2} \dots a_{i_{K-1}, i_0}$$

تعداد اعضای $\text{Per}_K \sigma_A$ را به دست می‌دهد. از طرف دیگر، می‌توان بررسی کرد که این تعداد برابر با مجموع $\text{Tr}(A^K)$ است. \square

توجه کنید که می‌توانیم به سادگی محاسبه کنیم که برای

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

داریم

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A) &= 1 \\ \text{Tr}(A^1) &= 3 \\ \text{Tr}(A^2) &= 4 \\ \text{Tr}(A^3) &= 2 \\ \text{Tr}(A^4) &= 11. \end{aligned}$$

به طورکلی، برای $K > 2$ ،

$$\text{Tr}(A^K) = \text{Tr}(A^{K-1}) + \text{Tr}(A^{K-2}).$$

این رابطه بازگشتی به صورت جالبی مشابه رابطه بازگشتی معروف فیبوناچی است یعنی برای $k > 2$

$$p_k = p_{k-1} + p_{k-2}.$$

دنباله فیبوناچی معمولی با $p_1 = p_2 = 1$ شروع می‌شود و برای حالت ما، $p_1 = 1$ و لی $p_2 = 3$ است.

تمرین.

۱. فرض کنید $\mu = 3.839$ و $a_1 = 0.149888$. نشان دهید که یک بازه کوچک حول a_1 هست که به داخل خودش تحت F_μ^3 نگاشته می‌شود.

۲. نشان دهید یک بازه کوچکتر حول a_1 است که به داخل خودش نگاشته می‌شود و روی آن $1 < |F_\mu'|$. این نشان می‌دهد که یک نقطه متناوب یکتای جاذب با تناوب ۳ نزدیک a_1 موجود است.

۳. یک متريک روی Σ_A به صورت

$$d_n[\mathbf{s}, \mathbf{t}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|s_k - t_k|}{n^k}.$$

تعریف کنید.

الف. نشان دهید d_n یک متریک است.

ب. مشابه قضیه ۲.۶ را اثبات کنید، یعنی، اگر برای $s_i = t_i$ ، $i = 0, \dots, k$ ، آنگاه نشان دهید $d_n[s, t] < \frac{1}{n^k}$. به صورت مشابه اگر $s_i = t_i$ ، $i \leq k$ ، آنگاه برای $d_n[s, t] \leq \frac{1}{n^k}$

$$4. \text{ فرض کنید } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ نشان دهید } \text{Tr}(A^K) = \text{Tr}(A^{K-2}) + \text{Tr}(A^{K-1}).$$

۵. با استفاده از بازه‌های I_1 و I_2 و همچنین I_3 نشان دهید که مجموعه نقاطی که مدار آنها برای همیشه در این چهار بازه قرار می‌گیرند نیز با یک زیرتغییرجا از نوع متناهی مشخص می‌شوند. ماتریس تغییر وضعیت آنها چیست؟

۶. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

فرمولی برای اثر A^K بیابید.

۷. نشان دهید که $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ برای $\mu \leq 2 + \sqrt{5}$ دارای یک مجموعه هذلولوی در $[0, 1]$ است.

۱۴ نگاشتهای روی دایره

در این بخش، بعضی از نتایج بدست آمده از بخش‌های گذشته را به‌طور خاص برای نگاشتهای روی دایره بررسی می‌کنیم. از آنجاکه دایره کران دار است دینامیک این نگاشتها تا حدودی متفاوت از نگاشتهای روی \mathbb{R} است. به ویژه، دیفیومورفیسم‌های روی S^1 به دلیل اینکه دایره دارای نقاط بازگشتی نابدیهی است و محور حقیقی چنین خاصیتی ندارد بسیار جالب‌تر هستند. دیفیومورفیسم‌های روی S^1 ممکن است دارای نقاط متناوب با هر تناوبی باشند در حالی که دیفیومورفیسم‌های روی \mathbb{R} فقط دارای نقاط ثابت یا متناوب از تناوب ۲ می‌باشند. برای سادگی، در این بخش فقط به دیفیومورفیسم‌های حافظ جهت روی S^1 یعنی آن دسته از دیفیومورفیسم‌های $f : S^1 \rightarrow S^1$ که ترتیب نقاط را روی دایره حفظ می‌کنند، می‌پردازیم.

برای مطالعه دینامیک یک نگاشت روی دایره، بالا برده آن به \mathbb{R} مفید است. برای این کار نگاشتی بالابر همچون $\pi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ را با ضابطه

$$\pi(x) = \exp(2\pi i x) = \cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)$$

تعریف ۱.۱۴ نگاشت $F : S^1 \rightarrow S^1$ یک بالابرده است هرگاه

$$\pi \circ F = f \circ \pi.$$

توجه کنید از آنجاکه π نگاشتی چندبه یک است، نمی‌تواند یک تزویج توپولوژیکی بین F و f ایجاد کند.

مثال ۲.۱۴ فرض کنید $\tau_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega$ انتقالی با زاویه $2\pi\omega$ باشد. برای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، نگاشت $T_{\omega,k}(x) = x + \omega + k$ یک بالابرده از τ_ω است. به صورت مشابه، اگر $f(\theta) = \theta + \epsilon \sin(\theta)$ ، آنگاه $F_{\epsilon,k}(x) = x + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi x) + k$ یک بالابرده از f است.

ملاحظات.

۱. همیشه بین نهایت بالابرده متفاوت برای نگاشت داده شده $S^1 \rightarrow S^1$ وجود دارد. در واقع، می‌توان به سادگی نشان داد که هر دو بالابرده از f فقط به اندازه یک عدد صحیح تفاوت دارند (تمرین ۳ را ببینید).

۲. در مثالهای فوق، تشابهی بین فرمولهای نگاشت روی دایره و بالابرده آنها وجود دارد. اگر چه باید دقیق کنیم که این نگاشتها روی فضاهای مختلفی تعریف شده‌اند و باید انتظار داشت که دینامیک بسیار متفاوتی از هم داشته باشند. در واقع، اگر ω گویا باشد، آنگاه همه نقاط S^1 تحت τ_ω متناوب بوده ولی هیچ نقطه‌ای از \mathbb{R} تحت T_ω متناوب نیست (به جز $\omega = 0$).

۳. اگر F یک بالابرده از f باشد، آنگاه باید داشته باشیم $(F'(x), 0) > (f'(x), 0)$ ، درنتیجه F صعودی است. به علاوه، باید $F(x+1) = F(x) + 1$ و به طور کلی برای هر $k \in \mathbb{Z}$ ، $F(x+k) = F(x) + k$ تأکید می‌کنیم این نتایج فقط تا زمانی که f یک دیفرانسیل ریسم حافظ جهت روی دایره باشد، برقرارند. برای انواع دیگر نگاشتها، می‌توان بالابردهایی به محور حقیقی تعریف کرد ولی لزوماً تساوی اخیر برقرار باقی نمی‌ماند. درنتیجه،

$$F(x+1) - (x+1) = F(x) - x.$$

بنابراین $F - \text{id}$ یک نگاشت متناوب با تناوب ۱ است. در اینجا $x = \text{id}(x)$ نگاشت همانی است. به طور مشابه، $F^n - \text{id}$ نیز متناوب با تناوب ۱ است چون F^n بالابرده f^n است. با استفاده از این مطالب به راحتی دیده می‌شود اگر $1 < |x - y| < |\epsilon|$ ، آنگاه باید داشته باشیم $|F^n(x) - F^n(y)| < 1$.

مهمترین پایابی که به یک نگاشت دایره نسبت داده می‌شود، عدد چرخشی است. این عدد، که عددی بین 0 و 1 است، متوسط دورانی را که نقاط تحت یک تکرار تابع انجام داده‌اند اندازه می‌گیرد. قبل از تعریف دقیق عدد چرخشی، یک مفهوم اولیه را معرفی می‌کنیم.

فرض کنید $S^1 \rightarrow S^1 : f$ یک دیفریومورفیسم حافظ جهت باشد. یک بالابرده F از f را انتخاب کنید. تعریف کنید

$$\rho_\circ(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n}.$$

توجه کنید که این حد در صورت وجود، به انتخاب x وابسته نیست. در واقع از آنجاکه $F^n - \text{id}$ متناوب است،

$$|F^n(x) - F^n(y)| \leq |(F^n(x) - x) - (F^n(y) - y)| + |x - y| \leq 1 + |x - y|.$$

نامساوی دوم، از ملاحظه ۳ در بالا نتیجه می‌شود. بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x) - F^n(y)|}{n} = 0.$$

در نتیجه ρ_\circ مستقل از x است. اگرچه، ρ_\circ به انتخاب بالابرده وابسته است.

مثال ۳.۱۴ فرض کنید $\omega = \theta + 2\pi\omega(\theta)$ یک انتقال و $T_k(x) = x + \omega + k$ تربيعی از آن باشد. داریم

$$\rho_\circ(T_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + n\omega + nk}{n} = \omega + k.$$

بنابراین بالابردهای مختلف، مقادیر مختلف ρ_\circ را ایجاد می‌کنند. توجه کنید که همه آنها فقط در یک عدد صحیح با هم تفاوت دارند.

مثال ۴.۱۴ فرض کنید $S^1 \rightarrow S^1 : f$ دارای نقطه ثابتی در $\theta = 0$ باشد (همیشه می‌توانیم این کار را از طریق تزویج با یک انتقال انجام دهیم). فرض کنید F یک بالابرده از f باشد. در این صورت یک عدد صحیح مانند $k = F(0)$ است. نتیجه می‌شود $F^n(0) = nk$ و بنابراین $\rho_\circ(F) = k$. در نتیجه به ازای هر $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x)}{n} = k.$$

همانند قبل، توجه می کنیم که هردو بالابرده، یک تفاوت به صورت عدد صحیح در مقدار ρ ایجاد می کنند. این از یک مسئله کلی تر نتیجه می شود. فرض کنید F_1 و F_2 دو بالابرده از f باشند. با توجه به تمرین ۳، عدد صحیحی چون k موجود است به طوری که $F_2(x) = F_1(x) + k$. به راحتی نتیجه می شود که $F_2^n(x) = F_1^n(x) + nk$ و بنابراین $\rho(F_2) = \rho(F_1) + k$. بنابراین می توان وابستگی ρ را به بالابرده با حذف قسمت صحیح ρ از بین برد.

تعریف ۵.۱۴ عدد چرخشی f ، یعنی $\rho(f)$ ، قسمت اعشاری $(F)\rho$ برای هر بالابرده F از f است. بدین معنی که $\rho(f)$ عدد یکتا بی در بازه $[1, 0]$ است به طوری که $\rho(F) - \rho(f)$ یک عدد صحیح باشد.

در حقیقت هیچ چیز در تعاریف ما از $\rho(f)$ یا $\rho(F)$ نیازی به مشتق پذیری ندارد. اعداد چرخشی برای نگاشتهایی که فقط همسان ریختی هستند، نیز خوش تعریف است. هنوز بررسی نکردیم که حد $(F)\rho$ لزوماً وجود دارد. اگر f دارای یک نقطه متناوب باشد، بررسی آن ساده است. فرض کنید $\theta = f^m(\theta) = \theta$ و $\pi(x) = x + k$. آنگاه برای یک عدد صحیح j

$$F^{jm}(x) = x + jk \quad \text{و} \quad F^m(x) = x + k$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{jm}(x)|}{jm} = \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{jm} + \frac{k}{m} \right) = \frac{k}{m}.$$

به طور کلی، هر عدد صحیح n را می توان به صورت $n = jm + r$ نوشت که $0 \leq r < m$. توجه کنید یک عدد ثابت M موجود است به طوری که به ازای هر $y \in \mathbb{R}$ و $0 \leq r < m$

$$|F^r(y) - y| \leq M.$$

بنابراین

$$\frac{|F^n(x) - F^{jm}(x)|}{n} = \frac{|F^r(F^{jm}(x)) - F^{jm}(x)|}{n} \leq \frac{M}{n}.$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|F^{mj}(x)|}{mj} = \frac{k}{m}.$$

این نشان می دهد که عدد چرخشی $\rho(f)$ هنگامی که f دارای یک مدار متناوب باشد موجود است. در واقع، $\rho(f)$ در این حالت یک عدد گویاست.

اگر f هیچ نقطه متناوبی نداشته باشد، به بحث پیچیده تری نیاز است. از آنجاکه $F^n(x) - x$ برای $x \in \mathbb{R}$ یک عدد صحیح نیست، عدد صحیح k_n موجود است به طوری که به ازای هر

$$k_n < F^n(x) - x < k_n + 1.$$

با اعمال مکرر این نامساوی روی حالتهای $x = F^n(\circ), F^{2n}(\circ), \dots$ داریم

$$k_n < F^n(\circ) < k_n + 1$$

$$k_n < F^{2n}(\circ) - F^n(\circ) < k_n + 1$$

⋮

$$k_n < F^{mn}(\circ) - F^{(m-1)n}(\circ) < k_n + 1.$$

با جمع این نامساویها

$$mk_n < F^{mn}(\circ) < m(k_n + 1)$$

به دست می‌آید. بنابراین

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^{mn}(\circ)}{mn} < \frac{(k_n + 1)}{n}.$$

از نامساوی اصلی بی‌درنگ نتیجه می‌شود

$$\frac{k_n}{n} < \frac{F^n(\circ)}{n} < \frac{k_n + 1}{n}.$$

با ترکیب این دو عبارت، داریم

$$\left| \frac{F^{mn}(\circ)}{mn} - \frac{F^n(\circ)}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$

اکنون می‌توان کل بحث فوق را با جایگزینی n با m تکرار کرد. خواهیم داشت

$$\left| \frac{F^{mn}(\circ)}{mn} - \frac{F^m(\circ)}{m} \right| < \frac{1}{m}.$$

نتیجه می‌شود که

$$\left| \frac{F^n(\circ)}{n} - \frac{F^m(\circ)}{m} \right| < \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

این بدین معنی است که دنباله $\{\frac{F^n(\circ)}{n}\}$ مثالی از یک دنباله کوشی است. به راحتی دیده می‌شود که چنین دنباله‌ای در \mathbb{R} همگراست. تمرین ۲ را ببینید. بنابراین ثابت کردیم:

قضیه ۷.۱۴ فرض کنید $f : S^1 \rightarrow S^1$ یک دیفیومورفیسم حافظ جهت با بالابرده F باشد.
در این صورت

$$\rho_\circ(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|F^n(x)|}{n}$$

موجود و مستقل از x است. درنتیجه، عدد چرخشی $\rho(f)$ خوش تعریف است.

برهان این قضیه نشان می‌دهد که $\rho(f)$ به طور پیوسته به f وابسته است.

نتیجه ۷.۱۴ فرض کنید $f : S^1 \rightarrow S^1$ یک دیفیومورفیسم حافظ جهت باشد. فرض کنید $\epsilon > 0$. عددی چون $\delta > 0$ موجود است به طوری که اگر $g : S^1 \rightarrow S^1$ یک دیفیومورفیسم به طور C^δ -نزدیک به f باشد، آنگاه $|\rho(f) - \rho(g)| < \epsilon$.

برهان. n را طوری انتخاب کنید که $\epsilon < \frac{2}{n}$. بالابرده F از f برای عدد صحیحی چون r را طوری انتخاب می‌کنیم که $1 < F^n(\circ) < r + 1$. مقدار r را آنقدر کوچک می‌گیریم که بالابرده G از g چنان باشد که $1 < G^n(\circ) < r + 1$. همانند برهان قبل داریم

$$m(r - 1) < F^{nm}(\circ) < m(r + 1),$$

$$m(r - 1) < G^{nm}(\circ) < m(r + 1).$$

درنتیجه، برای هر m

$$\left| \frac{F^{nm}(\circ)}{nm} - \frac{G^{nm}(\circ)}{nm} \right| < \frac{2}{n} < \epsilon.$$

از آنجاکه

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^{nm}(\circ)}{nm} = \rho_\circ(F),$$

نتیجه حاصل می‌شود.

همان‌طور که در بالا اشاره کردیم، عدد چرخشی، متوسط دورانی را که یک دیفیومورفیسم روی S^1 القاء می‌کند اندازه می‌گیرد. برای مثال، $\tau_\omega(\theta) = \theta + 2\pi\omega$ دورانی با زاویه $2\pi\omega$ است. برای نگاشت $f(\theta) = \theta + \sin^2(\frac{\theta}{\varphi})$ ، داریم $\circ = f(\theta) = \rho(f)$. در واقع، f نقطه $\theta = 0$ را ثابت نگه می‌دارد، ولی همه نقاط دیگر توسط f کمی به جلو رانده می‌شوند. می‌توان به راحتی دید که اگر $n \rightarrow \pm\infty$ ، آنگاه $\circ \rightarrow f^n(\theta)$ و بنابراین نقاط تحت تکرارهای f ، یک دور کامل در S^1 تشکیل

نمی‌دهند. یک خاصیت مهم (f, ρ) , پایا بودن آن تحت تزویج توبولوژیکی است. اگر f و g هر دو دیفیومورفیسم‌های حافظ جهت روی S^1 باشند، آنگاه می‌توان به راحتی بررسی کرد که $\rho(g^{-1}fg) = \rho(fg)$. تمرین ۴ را بینید.

در بالا نشان دادیم که اگر f دارای یک نقطه متناوب باشد، آنگاه (f, ρ) یک عدد گویاست. اگر ω غیرگویبا باشد، تبدیل τ_ω طبق قضیه ژاکوبی، هیچ نقطه متناوبی ندارد. بنابراین حدس می‌زنیم که (f, ρ) غیرگویاست اگر f دارای نقطه متناوبی نباشد. در واقع این حالتی است که اکنون نشان می‌دهیم.

قضیه ۸.۱۴ عدد (f, ρ) غیرگویاست اگر و تنها اگر f هیچ نقطه متناوبی نداشته باشد.

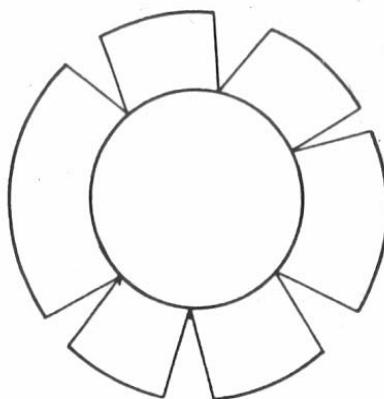
برهان. با توجه به نتایج قبلی، کافیست نشان دهیم که اگر f هیچ نقطه متناوبی نداشته باشد، آنگاه (f, ρ) غیرگویاست. فرض می‌کنیم که (f, ρ) گویا باشد و به یک تناقض می‌رسیم. می‌توان به راحتی دید که برای هر بالابرد F , $F(F^m) = mF$. بنابراین می‌توانیم از ابتدا فرض کنیم که $\circ = F^k$, ولی f هیچ نقطه ثابتی ندارد. بالابرد F نیز هیچ نقطه ثابتی ندارد، پس می‌توان فرض کرد که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$, $F(x) > x$ (حالت دیگر نیز به صورت مشابه قابل انجام است). پس یا برای هر n, k موجود است که برای آن $1 < F^k(\circ) < F^n(\circ)$ یا $1 < F^k(\circ) < m$. در حالت اخیر، درنتیجه $\frac{1}{k} < F(\circ) < \frac{1}{n}$, که یک تناقض است.

در حالت اول، دنباله $(F^n(\circ))$ به طور یکنوا برابر باشد، آنگاه نقطه حدی این دنباله باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} F(p) &= F\left(\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(\circ)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} F^{n+1}(\circ) = p. \end{aligned}$$

بنابراین p نقطه ثابتی برای F است. این نیز تناقض است و حکم به دست می‌آید. \square
اکنون حالت نگاشت با عدد چرخشی گنگ را با جزئیات بیشتر بررسی می‌کنیم. طبق نتایج قبلی این نگاشت نمی‌تواند هیچ نقطه متناوبی داشته باشد. چنین نگاشتی، یک دوران $\theta + 2\pi\tau_\omega$ با گنگ است. ممکن است پیدا کردن مثال دیگری از یک همسان‌ریختی با عدد چرخشی گنگ سخت باشد، ولی مثالهای زیادی از چنین نگاشتهایی که با دوران گنگ مزدوج توبولوژیکی نیستند وجود دارد. یادآوری می‌کنیم که طبق قضیه ژاکوبی، همه مدارهای هر دوران گنگ در S^1 چگال هستند. این خاصیت برای هر نگاشتی که با دوران گنگ مزدوج است برقرار است. بنابراین، برای تولید یک نگاشت متفاوت روی S^1 , کافیست که نگاشتی بیاپیم که یک مدار غیرچگال داشته باشد. مثال زیر، منسوب به دنجوی ۱۲، نشان می‌دهد که چگونه می‌توان چنین نگاشتی را ساخت.

مثال ۹.۱۴ (یک نگاشت دنجوی). یک "جراحی" روی ω برای گنگ انجام می‌دهیم. نقطه‌ای مانند $S^1 \in \theta$ انتخاب کنید. هر نقطه از مدار θ روی S^1 را بربده و آن را با یک بازه



شکل ۱.۱۴. باز کردن یک دایره به منظور ساختن یک همسان ریختی دنجوی.

کوچک جایگزین می‌کیم. یعنی، در هر نقطه $\tau_\omega^n(\theta_0)$ ، دایره را بریده و یک "باره" کوچک I_n را در آن مکان قرار می‌دهیم. بازه‌های I_n را به اندازه کافی کوچک می‌گیریم به طوری که طولهای $\ell(I_n)$ مثبت باشد و

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell(I_n) < \infty.$$

نتیجه این "عمل" هنوز یک "دایره" است فقط کمی بزرگ‌تر از قبل شده و می‌توان آن را به عنوان یک خم بسته ساده در نظر گرفت. شکل ۱.۱۴ را ببینید.
حال نگاشت را روی اجتماع I_n ‌ها با انتخاب هر دیفیومورفیسم h_n حافظ جهت که I_n را به I_{n+1} می‌برد گسترش می‌دهیم. این عمل، نگاشت اصلی را به یک همسان ریختی روی کل دایره تبدیل می‌کند. توجه کنید که نگاشت جدید هیچ نقطه متناوبی ندارد پس عدد چرخشی آن غیرگویاست. به علاوه، هیچ نقطه‌ای از درون I_n هرگز تحت تکرار تابع به I_n باز نمی‌گردد بنابراین مدار این نقاط چگال نیستند.

ملاحظات.

۱. مثال دنجوی یک همسان ریختی روی دایره است ولی ساختن آن ممکن است در ذهن خواننده این تردید را ایجاد کند که چطور این نگاشت می‌تواند دیفیومورفیسم باشد. در واقع، می‌توان نگاشتهای h_n را طوری با دقت انتخاب کرد به طوری که نگاشت حاصل یک دیفیومورفیسم C^1

شود. تمرین ۵ را ببینید. البته این ساختن نمی‌تواند یک دیفیومورفیسم C^3 به دست دهد. ثابت شده است که هر دیفیومورفیسم C^2 با عدد چرخشی گنج، همیشه با یک نگاشت τ_ω برای یک ω مناسب مزدوج توپولوژیکی است. بنابراین به طرز شگفتانگیزی، اختلاف پیچیده‌ای بین دیفیومورفیسم‌های C^1 و C^2 روی دایره موجود است.

۲. مثال دنجوی، مثالی از یک دامنه سرگردان برای یک نگاشت روی دایره است. برای حذف این نوع رفتار برای نگاشتهای روی \mathbb{R} ، بعضی از فرضهای خاص مانند مشتق شوارتسی نامنفی و محاسبات پیچیده نیاز است. بخش ۱۱.۱ را ببینید.

در اینجا، مفید است که بینیم چطور بحث قبلی به ما این اجازه را می‌دهد که ساختار انشعاب یک خانواده دوپارامتری مهم از دیفیومورفیسم‌های روی دایره را تحلیل کنیم. این خانواده از توابع با نام خانواده استاندارد یا کانونی شناخته می‌شود.

مثال ۱۰.۱۴ خانواده دوپارامتری از نگاشتهای روی S^1 با ضابطه

$$f_{\omega, \epsilon}(\theta) = \theta + 2\pi\omega + \epsilon \sin \theta$$

را در نظر بگیرید. این نگاشتها دارای بالا برده

$$F_{\omega, \epsilon}(x) = x + \omega + \frac{\epsilon}{2\pi} \sin(2\pi x)$$

هستند که با آنها هنگام بحث روی f کار می‌کنیم.

هنگامی که $\epsilon = 0$ ، این نگاشت به نگاشت دوران T_ω تبدیل می‌شود. برای $1 < \epsilon \leq \epsilon_0$ یک دیفیومورفیسم روی S^1 است؛ هنگامی که $\epsilon = 1$ ، این نگاشت فقط یک همسان‌ریختی می‌شود. اگر $\epsilon > 1$ ، نگاشت حتی یک‌به‌یک هم نیست. توجه کنید که اگر $\omega_2 > \omega_1$ ، آنگاه برای هر $x \in \mathbb{R}$

$$F_{\omega_1, \epsilon}(x) > F_{\omega_2, \epsilon}(x).$$

نتیجه می‌شود که

$$F_{\omega_1, \epsilon}^n(x) > F_{\omega_2, \epsilon}^n(x).$$

بنابراین $(F_{\omega_2, \epsilon}, \rho_0) \geq (F_{\omega_1, \epsilon}, \rho_0)$. درنتیجه یک نگاشت غیرنیزولی از ω برای ϵ ثابت است. به علاوه، بنابر نتیجه ۷.۱۴، ρ به صورت پیوسته نسبت به ω تغییر می‌کند. $\rho_0 \neq \rho_\epsilon$ را ثابت در نظر گرفته و فرض می‌کنیم $f_\omega = f_{\omega, \epsilon}$.

فرض کنید $\rho(f_{\omega_0}) = \frac{p}{q}$ گویا باشد. نتیجه می‌شود که f_{ω_0} دارای نقطه متناوب با تناوب q است. درنتیجه $x_0 \in \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری که برای یک عدد صحیح k ,

$$F_{\omega_0}^q(x_0) = x_0 + k.$$

در واقع، $p = k$. ادعا می‌کنیم بازه‌ای از مقادیر ω وجود دارد که عدد چرخشی F_{ω_0} روی این بازه، برابر با $\frac{p}{q}$ است. برای دیدن این مطلب، نمودار $F_{\omega_0}^q$ را در نظر بگیرید. این نمودار خط راست $y = x + k$ را در نقطه $(x_0, x_0 + k)$ قطع می‌کند. اگر $1/(F_{\omega_0}^q)'(x_0) \neq 1$ ، آنگاه بلafاصله از قضیه تابع ضمنی نتیجه می‌شود که یک بازه باز حول ω موجود است به‌طوری که هر نمودار $F_{\omega_0}^q$ نیز خط $y = x + k$ را قطع می‌کند. بنابراین برای همه این مقادیر داریم $\rho(f_{\omega_0}) = \frac{p}{q}$. اگر $1/(F_{\omega_0}^q)'(x_0) = 1$ ، بحث بسیار پیچیده‌تر است. برای اثبات این قسمت، توجه می‌کنیم از آنجاکه F_{ω_0} تحلیلی است، عدد صحیح ω موجود است به‌طوری که مشتق زام یعنی $(F_{\omega_0}^q)'(x_0)$ مخالف صفر است. درغیراین صورت، $(F_{\omega_0}^q)'(x_0)$ متعدد با $x + k$ می‌شود. اگر ω فرد باشد، بلafاصله نتیجه می‌شود که نمودارهای نزدیک $F_{\omega_0}^q$ نیز باید خط $y = x + k$ را قطع کنند. اگر ω زوج باشد، آنگاه $F_{\omega_0}^q$ دارای تقریر بالا یا تقریر رو به پایین در x_0 است. در هر صورت، نمودارهای نزدیک $F_{\omega_0}^q$ برای $\omega < \omega$ یا $\omega > \omega$ باید خط $y = x + k$ را قطع کنند. بررسی جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

بنابراین مشاهده می‌کنیم برای هر عدد گویای $\frac{p}{q}$ ، یک بازه با درون ناتهی موجود است که روی آن $\rho(f_{\omega_0}) = \frac{p}{q}$. از طرف دیگر، یک ω یکتا موجود است که برای آن $\rho(f_{\omega_0}) = \frac{p}{q}$ ، یک عدد گنگ داده شده است. این مطلب، یک نتیجه نسبتاً خوب است که از برهان آن صرف نظر می‌کنیم. نمودار (f_{ω_0}) مثالی از یک تابع کانتور است؛ روی بازه‌های متناظر با عدد چرخشی گویا، تابع ثابت است و در عین حال همه جا پیوسته است. این نمودار "پلکان شیطان" نیز نامیده می‌شود. شکل ۲.۱۴ را ببینید.

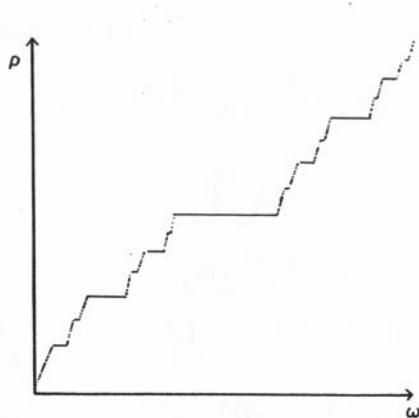
نمودار انشعباب برای خانواده استاندارد بسیار جالب است. برای عدد چرخشی (f_{ω_0}) ، این نواحی را در صفحه ω رسم می‌کنیم. این نواحی لزوماً "زبانه‌هایی" هستند که از نقاطی مانند $\omega = \epsilon$ و $\omega = \frac{p}{q}$ خارج می‌شوند. هیچ کدام از این زبانه‌ها هنگامی که $\epsilon < \omega$ همپوشانی ندارند و دارای درون ناتهی هستند. شکل ۳.۱۴ را ببینید.

نمودار انشعباب برای $\epsilon < \omega$ که برای آن f_{ω_0} دیگر همسان ریختی نیست نیز جالب است. تمرین ۶ را ببینید.

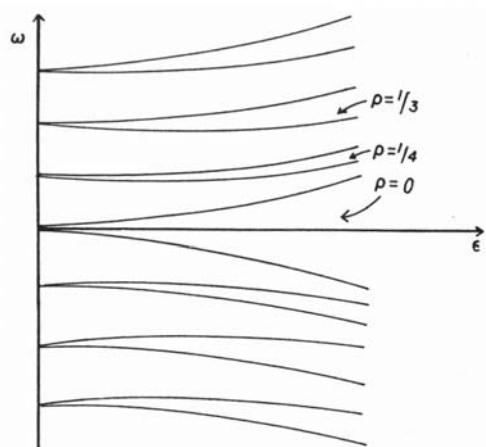
دینامیک نگاشتهای f_{ω_0} برای $\epsilon > 0$ ثابت، براساس بحثهای قبلی درمورد نظریه انشعباب به راحتی قابل توصیف است. توجه کنید که f_{ω_0} دارای نقطه ثابت است در صورتی که

$$\sin \theta = \frac{-2\pi\omega}{\epsilon}.$$

با توجه به نمودار $\sin(\theta)$ روی بازه $2\pi \leq \theta \leq 0$ متوجه می‌شویم که این معادله دارای دو جواب است هرگاه $\epsilon < 2\pi\omega$ ؛ یک جواب دارد هرگاه $\epsilon = 2\pi\omega$ و بی‌جواب است هرگاه $\epsilon > 2\pi\omega$. می‌توان



شکل ۲.۱۴. نمودار $f_{\omega}(p)$ ، یک تابع کانتور است.



شکل ۳.۱۴. نمودار انشعاب خانواده استاندارد.

به راحتی محاسبه کرد که در نقاط ثابت $i = 1, 2, \theta_i = \epsilon / 2\pi\omega$ اتفاق می‌افتد، $|f'_\omega(\theta_i)| \neq 1$ و در نقطه ثابت یکتای حالت $\epsilon = |2\pi\omega| / f'_\omega(\theta) = 1$ داریم. از نظر دینامیکی این موضوع را به صورت زیر تفسیر می‌کنیم. یک نقطه ثابت برای f_ω در انشعاب زینی-گرهای در $\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\theta = -\frac{\pi}{2}$ متولد می‌شود. این نقطه ثابت، به دونقطه ثابت مجزا تبدیل می‌شود که با افزایش ω دور دایره واحد در دو جهت مختلف حرکت می‌کنند. درنهایت، این دونقطه ثابت در یک انشعاب زینی-گرهای دیگر در $\theta = \frac{\pi}{2}$ به هم می‌رسند و ناپدید می‌شوند. پدیده مشابهی در هر یک از زبانه‌های دیگر رخ می‌دهد.

تمرین.

۱. نشان دهید هر دیفیومورفیسم حافظ جهت روی S^1 باید دارای دونقطه ثابت باشد.
۲. یک دنباله اعداد حقیقی چون $\{a_n\}$ کوشی نامیده می‌شود هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ عدد صحیح N موجود باشد به طوری که برای هر $n, m > N$ داشته باشیم $|a_n - a_m| < \epsilon$. نشان دهید هر دنباله کوشی در \mathbb{R} همگراست.
۳. نشان دهید هر دو بالابرده متفاوت از یک نگاشت روی دایره باید حداقل در یک عدد صحیح $k \in \mathbb{Z}$ متفاوت باشند. بر عکس، ثابت کنید اگر $F(x)$ تربيعی از f باشد، آنگاه $F(x) + k$ برای $x \in \mathbb{R}$ تربيعی از f است.
۴. فرض کنید f و g دو دیفیومورفیسم حافظ جهت روی S^1 باشند. نشان دهید $\rho(f) = \rho(g^{-1}fg)$.
۵. بازبینی مثال دنجوی. در این سری از تمرینها نشان می‌دهیم که همسان‌ریختی ساخته شده در این بخش می‌تواند C^1 باشد.

الف. برای هر عدد صحیح n قرار دهید

$$\ell_n = \frac{1}{(|n|+1)(|n|+2)}.$$

نشان دهید

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ell_n < \infty,$$

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1.$$

ب. برای هر n فرض کنید $I_n = [a_n, b_n]$ بازه‌ای با طول ℓ_n باشد. نگاشت f را روی $[a_n, b_n]$ به صورت

$$f(x) = a_{n+1} + \int_{a_n}^x 1 + \frac{\ell_{n+1} - \ell_n}{\ell_n^3} (b_n - t)(t - a_n) dt$$

تعریف کنید. نشان دهید $f'(a_n) = f'(b_n) = 1$.

ج. ثابت کنید که f یک نگاشت دیفریومورفیسم از $[a_n, b_n]$ به روی $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ است.
د. نشان دهید

$$f''\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) = 0,$$

ولی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a_n} |f''(x)| \right) \rightarrow \infty.$$

نتیجه بگیرید f یک نگاشت C^2 نیست.

ه. تغییرات f' روی I_n را به صورت

$$V_n = \left| f'(a_n) - f'\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \right|$$

تعریف کنید. نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

بی کران است و $(x) f'$ دارای تغییرات کران دار نیست.

اکنون اگر بازه‌های I_n را در مکان مداریک دوران گنگ همانند کاری که در این بخش انجام دادیم، بچسبانیم و f را روی I_n همانند بالا تعریف کنیم، نگاشت دایره حاصل، C^1 است.

۶. عدد چرخشی را می‌توان حتی در حالتی که $f : S^1 \rightarrow S^1$ یک همسان‌ریختی نباشد تعریف کرد.
اگرچه در این حالت، عدد چرخشی به x وابسته است. برای خانواده استاندارد در حالت $\epsilon > 1$ ثابت کنید که مجموعه اعداد چرخشی حاصل، بازه‌ای در \mathbb{R} را تشکیل می‌دهند.

۱۵ دیفیومورفیسم‌های مورس-اسمیل

این بخش بحث دیفیومورفیسم‌های روی دایره را که در بخش قبل شروع شد ادامه می‌دهد. در این بخش دیدگاه نسبتاً متفاوتی داریم: هدف ما بررسی تا حد امکان کامل رده وسیعی از دیفیومورفیسم‌های روی دایره است که به عنوان دیفیومورفیسم‌های مورس-اسمیل شناخته می‌شوند. این رده از نگاشتها دارای دو خاصیت مهم هستند. اول، هر عضو این رده، دارای پایداری ساختاری است و نمای فاز آن به راحتی توصیف می‌شود. برخلاف نگاشتها درجه دو، دیفیومورفیسم‌های مورس-اسمیل به هیچ وجه رفتار آشوبناک ندارند. دوم اینکه می‌توان هر دیفیومورفیسم روی دایره را با یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل به اندازه دلخواه نزدیک تقریب زد. بنابراین یک دیفیومورفیسم "جنریک"^{۱۳} از S^1 ، مورس-اسمیل بوده و دارای پایداری ساختاری است.

تعریف ۱.۱۵ یک دیفیومورفیسم حافظ جهت از S^1 ، مورس-اسمیل است، هرگاه دارای عدد چرخشی گویا بوده و همه نقاط متناوب آن هذلولوی باشند.

مثال ۲.۱۵ دیفیومورفیسم $f(\theta) = \theta + \frac{\pi}{n} + \epsilon \sin(2n\theta)$ برای $\theta \in [0, 2\pi]$ کوچک، مورس-اسمیل است. ۲ مدار متناوب از متناوب $2\pi/n$ موجودند که عبارتند از یک نقطه متناوب جاذب که مدار آن شامل $\frac{\pi}{n}$ است و یک نقطه متناوب دافع در $\theta = 0$. نقاط این مدارها حول دایره به متناوب تغییر می‌کنند.

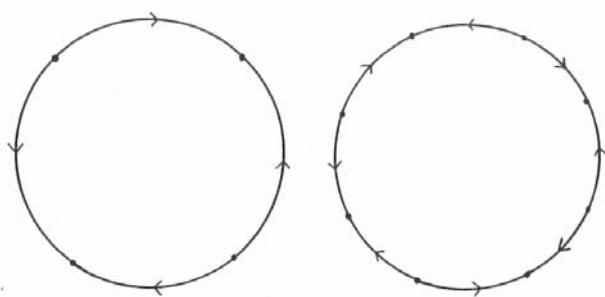
اگر f یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل با عدد چرخشی $\frac{p}{q} = f(\theta)$ باشد، آنگاه همانند مثال بالا، همه نقاط متناوب f دارای متناوب q هستند. بنابراین f^q فقط دارای نقاط ثابت است. از آنجاکه همه این نقاط ثابت هذلولوی هستند، باید حول دایره به ترتیب به صورت چشم و چاهک باشند. بنابراین نمای فاز تکرار یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل بسیار ساده است و در شکل ۱.۱۵ نشان داده شده است. بنابراین این حقیقت که این نگاشتها دارای پایداری ساختاری هستند جای تعجب ندارد.

قضیه ۳.۱۵ یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل روی S^1 ، دارای پایداری ساختاری C^1 است.

برهان. قضیه را برای حالتی که f حافظ جهت بوده و $f(\theta) = \theta$ ثابت می‌کنیم که در این حالت f فقط شامل نقاط ثابت است. حالتهای دیگر را به عنوان تمرین و اگذار می‌کنیم.

فرض کنید F آن ترفیعی از f باشد که دارای نقاط ثابت است؛ تنها یک بالابرد از f دارای این خاصیت است. نشان می‌دهیم که اگر G, C^1 ، به طور ϵ -نزدیک به F باشد، آنگاه G با F مزدوج توپولوژیکی است. سپس نتیجه برای دایره، به سرعت بدست می‌آید.

^{۱۳} یک خاصیت جنریک، خاصیتی است که روی یک اشتراک شمارا از مجموعه‌های باز چگال برقرار است.



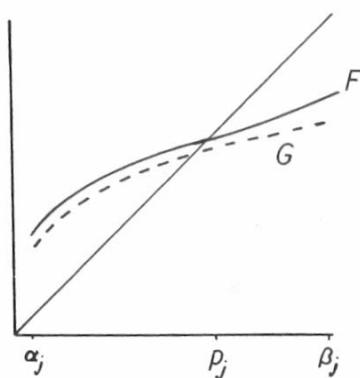
شکل ۱.۱۵. نمایی فاز بعضی از دیفیومورفیسمهای مورس-اسمیل.

از آنچاکه f مورس-اسمیل است، F فقط دارای تعداد متناهی نقطه ثابت در $[1, \infty)$ است. فرض کنید p_1, p_2, \dots, p_n نقاط ثابت F باشند. برای j ، همسایگی‌های مجزای (α_j, β_j) با $x \in U_j$ را داشتند. $\epsilon_j > 0$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $x \in U_j$ با $|F'(x) - 1| > \epsilon_j$ و در واقع، $|F(\alpha_j) - \alpha_j| > \epsilon_j$ و $|F(\beta_j) - \beta_j| > \epsilon_j$. درنتیجه اگر دیفیومورفیسم G ، روی U_j به‌طور C^1 -نزدیک به F باشد، روی U_j ، $G'(x) \neq 1$ و G دارای یک نقطه ثابت یکتا روی U_j است. شکل ۲.۱۵ را ببینید.

حال F دارای هیچ نقطه ثابتی در متمم U_j نیست. بنابراین $\epsilon > 0$ موجود است به‌طوری‌که به‌ازای هر $(U_j)_{j=1}^n, U_j \subset I - (U_j^n, F(x) - x) > \epsilon$. اگر G ، روی این بازه‌ها، به‌طور C^1 -نزدیک به F باشد، آنگاه G نیز در این نواحی، نقطه ثابتی ندارد.

اگر برای $n = 0, \dots, n$ $\epsilon_j = \min \epsilon_j, j = 0, \dots, n$ انتخاب کنیم، آنگاه هر دیفیومورفیسم G که به‌طور C^1 -نزدیک به F باشد دارای همان نمای فاز F است. اگر G ترفعی از یک دیفیومورفیسم g روی S^1 باشد، همه نکات بالا روی کل \mathbb{R} برقرار است. درنتیجه g ، مورس-اسمیل بوده و دارای همان نمای فاز f است. بنابراین می‌توان یک تزویج بین f و g با استفاده از دامنه‌های اساسی به‌همان‌گونه که در بخش ۹.۱ بحث شد تعریف کرد و این اثبات را کامل می‌کند. \square

حال به سوال اندازه مجموعه نگاشتهای دیفیومورفیسم دارای پایداری ساختاری روی S^1 باز می‌گردد. نگاشتهای روی دایره به دو شکل ساده دیده می‌شوند: نگاشتهایی با عدد چرخشی گویا و نگاشتهایی با عدد چرخشی گنگ. در قضیه ۴.۱۵ نشان دادیم که دیفیومورفیسمهایی با عدد چرخشی گنگ نمی‌توانند دارای پایداری ساختاری باشند. به علاوه، چنین دیفیومورفیسمهایی را می‌توان به اندازه دلخواه نزدیک (نسبت به متريک C^r -فاصله)، با یک نگاشت دارای نقاط متناوب تقریب زد. این نتیجه، که به عنوان لم تنگاتنگی شناخته می‌شود دارای یک برهان سرراست برای دایره است ولی برهان برای ابعاد بالاتر بسیار سخت‌تر است. در واقع، برای ابعاد بزرگ‌تر از یک، فقط برای حالت C^1



شکل ۲.۱۵. اختلالهایی از دیفیومورفیسمهای مورس-اسمیل

شناخته شده است. توجه کنید که از آنجاکه یک زیرمجموعه باز و چگال از صفحه $w\epsilon$, یک نگاشت $f_{w,\epsilon}$ با عدد چرخشی گویا می‌دهد، نمودار انشعاب برای خانواده استاندارد حاکی از نتیجه فوق است. قبل از اینکه این نتیجه را اثبات کنیم، تعریف یک نقطه بازگشتی را پادآوری می‌کنیم (تمرین ۳.۷). نقطه $\theta \in S^1$ تحت f بازگشتی است هرگاه برای همسایگی U از θ ، $0 < n < \infty$ موجود باشد به‌طوری‌که $U \in f^n(\theta)$. یعنی، تصویر یک نقطه بازگشتی برای f موجود باشد. درواقع، از آنجاکه f هیچ نقطه متناوبی ندارد، باید حداقل یک نقطه بازگشتی هم نداشته باشد، آنگاه باید $0 < n < \infty$ موجود باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $\theta \in S^1$ و هر $0 < n < \infty$ ، $|f^n(\theta) - \theta| > \delta$. نتیجه می‌شود که همه تصاویر هر نقطه $\theta \in S^1$ باید با کمان به طول δ جدا شود. از آنجاکه θ متناوب نیست باید بی‌نهایت تصویر مجزا از θ موجود باشد و این موجب تناقض است.

لم تنگاتنگی فقط برای این وضعیت به کارگرفته می‌شود و اجازه می‌دهد که یک مدار بازگشتی را "محصور" کرده و با یک اختلال C^r -کوچک دلخواه، آن را به یک مدار متناوب تبدیل کنیم.

قضیه ۴.۱۵ (لم تنگاتنگی). فرض کنید f یک دیفیومورفیسم روی S^1 با عدد چرخشی گنگ باشد. در این صورت برای هر $\theta \in S^1$ ، یک دیفیومورفیسم $g : S^1 \rightarrow C^1$ نزدیک به f است موجود است که دارای عدد چرخشی گویاست.

برهان. فرض کنید θ یک نقطه بازگشتی برای f بوده و $(\theta_0 + \delta, \theta_0 - \delta) \subset U$ کمانی از دایره حول θ_0 باشد. از آنجاکه θ بازگشتی است، دنباله‌ای از اعداد صحیح $n_i \rightarrow \infty$ موجود است به‌طوری‌که

$f^{n_i}(\theta_0) \in U$. فرض می‌کنیم که همه f^{n_i} ‌ها متعلق به کمان $(\theta_0 - \delta, \theta_0)$ باشند؛ f را روی U کمی تغییر می‌دهیم به طوری که θ_0 برای نگاشت اختلال یافته، یک نقطه متناوب باشد. فرض کنید $V \subset U$ همسایگی از θ_0 باشد. فرض کنید ϕ یک نگاشت برآمدگی روی V همانند تمرین ۸.۲ باشد. به این معنی که اگر $V = \theta \in S^1$ و اگر $\phi(\theta) = 1$ باشد. اگر $\phi(\theta) = 0$ باشد. اگر $\phi(\theta) < 1$ باشد. برای $\epsilon > 0$ به اندازه کافی کوچک، f_ϵ نیز دیفیومورفیسمی از S^1 است. C^r -فاصله بین f_ϵ و f با

$$\sup_{\theta \in U} \epsilon |\phi^{[r]}(\theta)|$$

داده می‌شود که $\phi^{[r]}(\theta)$ ، ϵ امین مشتق ϕ در θ است. بنابراین با انتخاب ϵ کوچک می‌توان f_ϵ را به دلخواه نزدیک به f ساخت. به طور شهودی f_ϵ خارج از همسایگی U دقیقاً مانند f رفتار می‌کند. هر بار که f نقطه‌ای را به $\theta \in U$ می‌نگارد، f_ϵ نقاط را به اندازه $\epsilon \phi(\theta)$ به جلو هل می‌دهد. به ویژه، هر بار که مداری V را قطع کند، به اندازه ϵ واحد به جلو می‌رود.

تاکید می‌کنیم که f_ϵ فقط نقاطی را که وارد U می‌شوند به جلو هل می‌دهد. از آنجاکه f و f_ϵ روی S^1 حافظ جهت هستند، ما هرگز با اعمال اختلال، "چیزی از دست نمی‌دهیم" (این همان چیزی است که لم تنگاتنگی را روی دایره ساده می‌کند). از آنجاکه $f^{n_i}(\theta_0)$ روی θ_0 انباسته می‌شوند، کوچکترین n_i که $\geq \theta_0$ موجود است. با کاهش دادن ϵ به صفر، باید ϵ ای موجود باشد که برای آن $\theta_0 = f_\epsilon^{n_i}(\theta_0)$. بنابراین یک نقطه متناوب برای f_ϵ موجود است. توجه کنید که در اینجا از وابستگی پیوسته خانواده f_ϵ به ϵ استفاده شده است. \square

حال توجه مان را به تقریب دیفیومورفیسمهای روی دایره با نگاشتهای مورس-اسمیل معطوف می‌کنیم. قضیه زیر را که حالت خاصی از نتیجه‌ای به اسم قضیه کوپکا-اسمیل^{۱۴} است اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵.۱۵ فرض کنید f یک دیفیومورفیسم حافظ جهت روی S^1 باشد. به ازای هر $\epsilon > 0$ ، یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل C^1 مانند g موجود است به طوری که به صورت C^1 -نزدیک به f است.

اثبات را با چند حالت ساده شروع می‌کنیم. طبق لم تنگاتنگی، می‌توان از ابتدا فرض کرد که (f) گویاست. در واقع می‌توانیم فرض کنیم $f = (f)$ و بنابراین f فقط شامل اعداد ثابت است. برمان برای حالت کلی تر نقاط متناوب به صورت مشابه است.

برمان این قضیه را به سه گام کوچکتر تقسیم می‌کنیم. ابتدا، نشان می‌دهیم که چگونه باید f را دچار اختلال کرد به طوری که شامل هیچ بازه‌ای از نقاط متناوب نباشد. دوم، نشان می‌دهیم که هر نگاشت دیفیومورفیسم را می‌توان با نگاشتی که دارای نقاط متناوب تنها است، تقریب زد. درنهایت دوباره f را دچار اختلال می‌کنیم به گونه‌ای که همه نقاط متناوب تنها آن هذلولوی شوند.

برای دیفیومورفیسم f از S^1 با $\rho(f)$ ، می‌توان یک بالابرده چون F که دارای نقاط ثابت است انتخاب کرد؛ تنها یک بالابرده با این خاصیت موجود است. قضیه بعدی نشان می‌دهد که همیشه می‌توان بازه‌های نقاط ثابت را با یک اختلال کوچک از بین برداشت.

قضیه ۶.۱۵ فرض کنید $S^1 \rightarrow S^1 : f$ یک دیفیومورفیسم حافظ جهت باشد که برای همه θ های موجود در بازه $2\pi\delta \leq |\theta - \theta_0| < \epsilon$ ، برای هر θ ، $f(\theta) = \theta$. یک نگاشت دیفیومورفیسم g که به طور C^r نزدیک به f است می‌توان یافت به طوری که

$$1. \text{ برای } g(\theta) = f(\theta), |\theta - \theta_0| \geq 2\pi\delta;$$

$$2. \text{ برای } g(\theta_0) = \theta_0;$$

$$3. \text{ برای } g(\theta) \neq \theta, |\theta - \theta_0| < 2\pi\delta.$$

برهان. ابتدا فرض کنید که بالابرده F برای همه x های بازه J که در آن $\delta \leq |x - x_0|$ ، در رابطه $F(x) = x$ صدق می‌کند. با اختلال در F ، می‌توان نگاشت جدید \hat{F} ای به دست آورد که به طور C^r نزدیک به F بوده و تنها نقطه ثابت F در درون J باشد. برای تعریف \hat{F} ، از یک نگاشت برآمدگی ϕ روی J با این خاصیت که روی J ، $\phi(x_0) = 1$ و روی $\delta < |x - x_0|$ ، $\phi(x) \neq 1$ استفاده می‌کنیم. سپس برای هر θ داده شده قرار می‌دهیم

$$\hat{F}(x) = F(x) + \nu\phi(x) \sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{\delta}\right).$$

□

سپس، از آنجاکه ν به اندازه کافی کوچک انتخاب شده است، نتیجه می‌شود که \hat{F} ، به طور C^r نزدیک به F بوده و \hat{F} دارای خواص موردنظر است.

گام بعدی اثبات قضیه کوپکا-اسمیل این است که نشان دهیم هر دیفیومورفیسم را می‌توان با دیفیومورفیسمی با نقاط متناوب تنها تقریب زد. قضیه قبلی نشان می‌دهد که بازه‌های نقاط متناوب را می‌توان حذف کرد؛ قضیه بعدی نشان می‌دهد که چگونه نقاط انباسته شده یک نقطه متناوب را می‌توان با یک اختلال کوچک از بین برداشت. همانند قبل، فقط با نقاط ثابت کار می‌کنیم.

قضیه ۶.۱۵ فرض کنید f یک دیفیومورفیسم حافظ جهت روی دایره بوده و $\rho(f) = 0$. در این صورت یک دیفیومورفیسم C^1 چون g که با متريک C^1 فاصله، به اندازه دلخواه نزدیک به f است موجود است به طوری که دارای نقاط ثابت تنهاست.

برهان فرض کنید x_0 یک نقطه انباستگی نقاط ثابت بالابرده F از f باشد. بنابراین $F'(x_0) = 1$ و $F''(x_0) = 0$. فرض کنید $J = [a, b]$ به طوری که $a \leq x_0 \leq b$ و روی آن

$$|F'(x) - 1| < \frac{\epsilon}{4}$$

$$|F(x) - x| < \frac{\epsilon}{\varphi}.$$

فرض می‌کنیم که $F'(a) = F'(b) = 1$. نگاشت F را با یک نگاشت C^1 روی این بازه که حداکثر دارای یک نقطه ثابت در (a, b) است عوض می‌کنیم.
فرض کنید $|G(x) - G(y)| \leq \frac{\epsilon}{\varphi}$, $x, y \in J$. توجه کنید که به ازای هر $G(x) = F(x) - x$. فرض می‌کنیم که $G(b) - G(a) = 0$. حالتهای $G(b) - G(a) > 0$ و $G(b) - G(a) < 0$ به طور مشابه انجام می‌شود. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، برای $x \in J$

$$\frac{G(b) - G(a)}{b - a} \leq \max |G'(x)| < \frac{\epsilon}{\varphi}.$$

فرض کنید $\phi(x)$ یک نگاشت برآمدگی روی J باشد که

$$1. \text{ به ازای هر } x \in J, \phi(x) \leq \frac{\epsilon}{\varphi};$$

$$2. \int_a^b \phi(x) dx = G(b) - G(a).$$

از آنچاکه

$$G(b) - G(a) \leq \frac{\epsilon}{\varphi}(b - a),$$

نتیجه می‌شود که می‌توان ϕ را طوری برگزید به‌طوری که در هر دوی ۱ و ۲ صدق کند. تابع h را به صورت زیر تعریف کنید

$$h(x) = G(a) + \int_a^x \phi(t) dt.$$

با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، h یک نگاشت C^1 روی بازه J است. داریم

$$|h(x) - G(x)| \leq |G(a) - G(x)| + \left| \int_a^b \phi(t) dt \right| \leq \epsilon$$

و

$$|h'(x) - G'(x)| = |\phi(x) - G'(x)| \leq \epsilon.$$

بنابراین G و h روی J ، به‌طور C^1 -نzdیک هستند. پس F و $x + h(x)$ نیز روی J ، به‌طور C^1 -nzdیک هستند. از آنچاکه روی J , $h'(x) = \phi(x) > 0$ ، نتیجه می‌شود که $h(x) + x$ حداکثر یک نقطه ثابت در J دارد. بنابراین نگاشت جدید \hat{F} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} F(x) & x \notin J, \\ h(x) + x & x \in J. \end{cases}$$

از آنجاکه $h'(a) = h'(b) = 0$ ، نتیجه می شود که مشتقهای \hat{F} در a و b یکسان بوده و \hat{F} یک نگاشت C^1 با خواص مطلوب است. \square

به طور شهودی، در اثبات قضیه قبل، همه "ناهمواریها" را از نمودار F روی J بریده و جای آن یک نگاشت هموار که قطر را حداکثر یک بار قطع می کند، جایگزین کرده ایم. با استفاده از این روش در هر نقطه ای که یک نقطه ابیاشتگی نقاط ثابت است، می توان یک نگاشت اختلال یافته به دست آورد که تعداد نقاط ثابت آن تنها و درنتیجه متناهی است.

آخرین گام در اثبات قضیه کوپکا-اسمیل، ایجاد اختلالی در f است به طوری که همه نقاط متناوب آن هذلولوی شوند. قضیه قبلی تضمین می کند که همه نقاط متناوب تنها هستند و درنتیجه یک "هل دادن" کوچک موضعی تنها چیزی است که برای هذلولوی کردن نقاط متناوب نیاز است.

قضیه ۸.۱۵ فرض کنید که f یک دیفیومورفیسم حافظ جهت روی دایره باشد که دارای نقاط متناوب تنهاست. یک دیفیومورفیسم g ، به طور C^r -نزدیک به f موجود است که فقط دارای نقاط متناوب هذلولوی است.

برهان. فقط حالتی را درنظر می گیریم که نگاشت بالا بردۀ دارای نقاط ثابت تنها x_0 باشد. سه حالت موجود است: x_0 یک جاذب ضعیف باشد، یک دافع ضعیف باشد یا حالت دوگانه داشته باشد یعنی از یک طرف جذب کند و از طرف دیگر دفع کند. چندین مثال از نمای فاز چنین نگاشتهایی در شکل ۵.۴ نشان داده شده است.

ما فقط درمورد حالت اول بحث می کنیم و بقیه به عنوان تمرین واگذار می شود. از آنجاکه x_0 یک نقطه ثابت جاذب است، $|x - x_0| < \delta$ موجود است به طوری که برای $\delta \leq |x - x_0|$ داریم $|F(x) - F(x_0)| < |x - x_0|$. نگاشت F را در این بازه به گونه ای اختلال می دهیم به طوری که نگاشت \hat{F} دارای یک نقطه ثابت هذلولوی جاذب یکتا در این بازه باشد. فرض کنید $\phi(x)$ یک نگاشت برآمدگی روی $\delta \leq |x - x_0|$ باشد. تعریف کنید

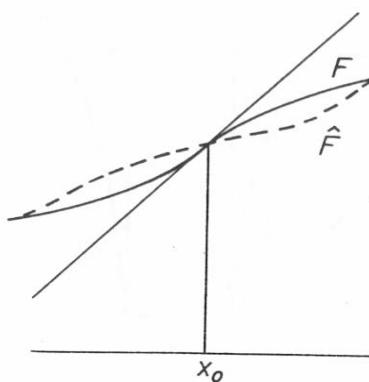
$$\hat{F}(x) = F(x) - \epsilon\phi(x) \sin\left(\frac{\pi(x - x_0)}{\delta}\right).$$

داریم x_0 و از آنجاکه $\hat{F}(x_0) = x_0$ به اندازه کافی کوچک است، اگر $x \neq x_0$ ، آنگاه $|\hat{F}(x) - x_0| < |x - x_0|$. به علاوه،

$$\hat{F}'(x_0) = 1 - \frac{\pi\epsilon}{\delta}$$

و بنابراین x_0 هذلولوی است. بهوضوح، اگر ϵ انتخاب شده به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه \hat{F} به طور C^r -نزدیک به F است. \square

این، اثبات قضیه کوپکا-اسمیل را کامل می کند. بحث قضیه اخیر در شکل ۳.۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۳.۱۵. اختلال یک نقطه ثابت غیرهذلولوی.

توجه کنید که که قضیه کوپکا-اسمیل برای اختلالهای C^r کوچک نیز برقرار است. تنها جایی که ما از دیفیومورفیسمهای C^1 استفاده کردیم، برهان قضیه ۷.۱۵ بود در حالی که این محدودیت قابل رفع است. تمرین ۶ را ببینید.

تمرین.

۱. برهان پایداری ساختاری دیفیومورفیسمهای مورس-اسمیل را به حالت نقاط متناوب تعمیم دهید.

۲. نشان دهید که یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل که جهت را معکوس می‌کند دارای پایداری ساختاری است.

۳. نشان دهید C^r -فاصله بین دیفیومورفیسمهای روی S^1 ، یک متريک روی مجموعه همه دیفیومورفیسمهای C^r روی S^1 به دست می‌دهد.

۴. قضیه ۵.۱۵ را برای حالتی که f به جای نقاط ثابت دارای نقاط متناوب است ثابت کنید.

۵. فرض کنید $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در $x_0 = F(x_0) = 1$ صدق کرده و x_0 از یک طرف جاذب و از طرف دیگر دافع باشد. برای ϵ به دلخواه کوچک، یک اختلال ϵ -کوچک C^r از F بسازید که هیچ نقطه ثابتی در یک همسایگی از x_0 نداشته باشد.

۶. یک دیفیومورفیسم C^∞ چون g بسازید که به صورت C^r -نزدیک به f بوده و در حکم قضیه ۷.۱۵ صدق کند.

۷. یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل روی S^1 بسازید که دقیقاً دارای k نقطه متناوب جاذب و n نقطه متناوب دافع با تناوب باشد.

۸. یک دیفیومورفیسم مورس-اسمیل روی دایره بسازید که جهت را معکوس می‌کند و دارای ۲ نقطه ثابت و k نقطه متناوب با تناوب ۲ باشد.

۱۶ نقاط هموکلینیک و انشعابها

در این بخش به مطالعه انشعابهای دینامیکی یک بعدی اتفاق می‌افتد بازمی‌گردیم. در اینجا تأثیر عمیقی را که حضور یک نقطه هموکلینیک منفرد روی دینامیک یک سیستم می‌گذارد بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که وجود یک نقطه هموکلینیک معمولاً وجود یک مجموعه پایایی هذلولوی را نتیجه می‌دهد که منجر به آشوبناک شدن تابع آن می‌شود. علاوه بر آن، هنگامی که یک خانواده از سیستم‌های دینامیکی دارای یک نقطه هموکلینیک باشد، آنگاه شامل دنباله‌ای از انشعابهای هموکلینیک شناخته می‌شود.

فرض کنید که p یک نقطه ثابت دافع باشد. برای سادگی، در این بخش فرض می‌کنیم $1 > f'(p)$ (در غیراین صورت f را با f^2 جایگذاری کنید). تأکید می‌کنیم که همه نتایج پایین به صورت مشابه برای نقاط متناوب دافع با تغییرات کوچک برقرار است. یادآوری می‌کنیم که اگر p یک نقطه ثابت دافع باشد، آنگاه یک همسایگی حول p موجود است که f روی آن یک بهیک بوده و دارای خاصیت انساطی

$$|f(x) - p| > |x - p|$$

باشد. مجموعه ناپایدار موضعی در p را بزرگترین بازه باز حول p که به شکل فوق تعریف شده در نظر می‌گیریم و آن را با $W_{loc}^u(p)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۱۶ فرض کنید $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ نگاشت درجه دو برای $\mu > 4$ باشد. F_μ در $W_{loc}^u(0) = (-\infty, \frac{1}{\mu})$ دارای نقطه ثابت دافع است. به سادگی دیده می‌شود که

تعریف ۲.۱۶ فرض کنید $p = f(q)$ و $1 > f'(q)$. نقطه q یک نقطه هموکلینیک به نقطه p نامیده می‌شود هرگاه $W_{loc}^u(p) \cap W_{loc}^u(q) = \emptyset$ و $f^n(q) = p$. نقطه q

هتروکلینیک نامیده می‌شود هرگاه $(p) \in W_{loc}^u$ و $\exists n > 0$ موجود باشد به قسمی که $(q) f^n$ روی مدار متناوب دیگری قرار گیرد.

توجه کنید که اگر p یک نقطه هموکلینیک باشد، آنگاه p گاهی اوقات یک "داعع پاس به عقب"^{۱۵} نامیده می‌شود. از آنجاکه طبق تعریف، نقطه هموکلینیک q در مجموعه ناپایدار موضعی حول p قرار می‌گیرد، می‌توانیم دنباله‌ای از پیش تصویرهای q تعریف کنیم که هریک از آنها در مجموعه ناپایدار موضعی، نزدیکتر به p قرار بگیرند. از آنجاکه f روی مجموعه ناپایدار موضعی یک بهیک است، این پیش تصویرها به طور یکتا تعریف می‌شوند. یک نقطه هموکلینیک همراه با مدار پسروی خود که همانند بالا توسط پیش تصویرها مشخص می‌شود و مدار پیشروی خود (متناهی)، یک مدار هموکلینیک نامیده می‌شود. بنابراین یک مدار هموکلینیک تحت تکرارهای پسرو به یک نقطه ثابت میل می‌کند و تحت تکرار پیشرو به همان نقطه ثابت نگاشته می‌شود.

مثال ۳.۱۶ اگر $(x - 1) = \mu x$ که $\mu < 4$ ، آنگاه دو نقطه ثابت 0 و p_μ موجودند که هر دوی آنها، بی‌نهایت نقطه هموکلینیک و هتروکلینیک می‌باشند.

شکل ۱.۱۶، چندین نقطه هموکلینیک و هتروکلینیک را نمایش می‌دهد.

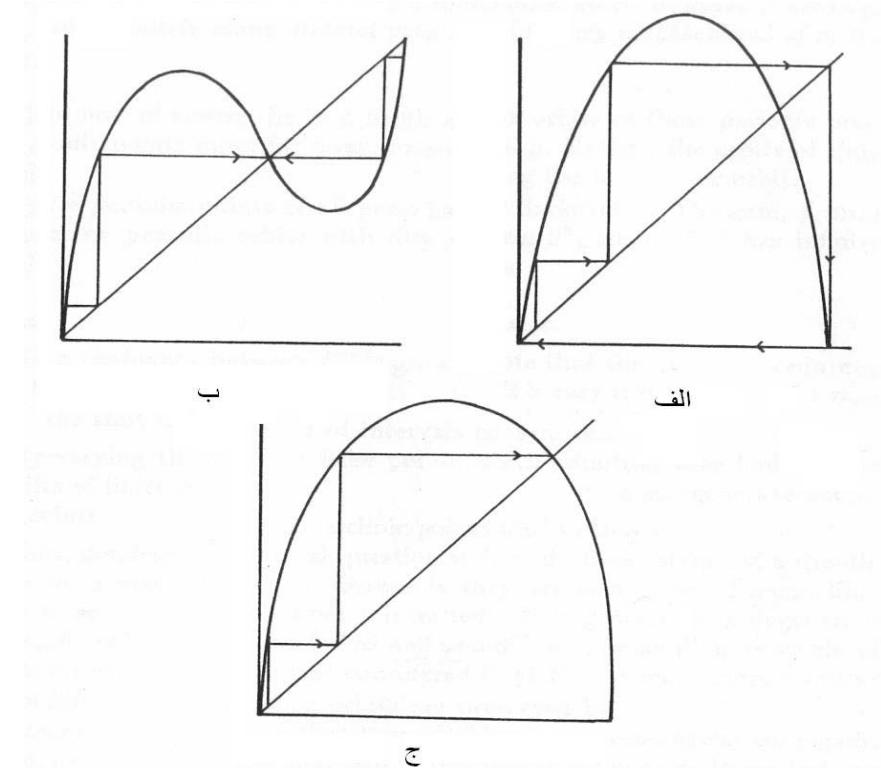
تعریف ۴.۱۶ یک مدار هموکلینیک، ناتبھگون نامیده می‌شود هرگاه بهازای هر x از مدار آن، $0 \neq (x')$. درغیراین صورت، مدار تبھگون است.

توجه کنید که برای نگاشت درجه دو بالا برای $\mu < 4$ ، همه نقاط هموکلینیک به هر دو نقطه 0 و p_μ ناتبھگون هستند. درواقع، از بخش ۵.۱ می‌دانیم که تنها نقطه بحرانی به بی‌نهایت میل می‌کند. اگر $4 = \mu$ ، نقطه $\frac{1}{\mu}$ روی یک مدار تبھگون هموکلینیک به صفر قرار می‌گیرد. در زیر می‌بینیم که مدارهای هموکلینیک ناتبھگون معمولاً حداقل روی یک زیرمجموعه پایا رفتار آشوبناک دارند درحالی که مدارهای هموکلینیک تبھگون با تغییر پارامتر، اغلب به انشعابهای پیچیده‌ای منجر می‌شوند.

قضیه ۵.۱۶ فرض کنید q روی مدار ناتبھگون هموکلینیک به یک نقطه ثابت p قرار گرفته باشد. دراین صورت، برای هر همسایگی U از p ، عدد صحیح $n > 0$ موجود است به طوری که f^n شامل یک زیرمجموعه پایایی هذلولوی در U بوده و f^n روی این زیرمجموعه، مزدوج توپولوژیکی با یک خودریختی تغییر جاست.

برهان. فرض کنید W یک همسایگی از p مشمول در U باشد به طوری که برای هر x در آن $1 < \delta > (x')$. در صورت لزوم با استفاده از پیش تصویرها می‌توان فرض کرد که $q \in W$. عدد

^{۱۵} عبارت "پاس به عقب" از اصطلاحی در فوتbal گرفته شده است که در آن بازیکن توب را به پشت سر خود پاس می‌دهد.



شکل ۱.۱۶. در شکل ۱.۱۶ الف، f دارای یک نقطه هموکلینیک است.
ولی در ب و ج، f دارای نقاط هتروکلینیک است.

۰ $n > p = f^n(q)$. از آنجاکه فقط تعداد متناهی نقطه روی مدار q موجود است که در W قرار نمی‌گیرند و از آنجاکه بهازای هر $\epsilon > 0$ ، می‌توان یک همسایگی V از q در W و یک $\epsilon > 0$ یافت به طوری که بهازای هر $x \in V$ ، $|f^n(x) - f^n(q)| < \epsilon$. از آنجاکه بهازای هر $x \in V$ ، $f^n(x) \neq f^n(q)$ ، نگاشت f^n ، همسایگی V را به طور دیفیومورفیک به روی بازه $(f^n(V))$ که p در درون آن قرار دارد می‌نگارد.

عدد صحیح j را طوری انتخاب می‌کنیم که $1 < j < n$. در صورت لزوم با انتخاب یک همسایگی V کوچک‌تر، می‌توانیم فرض کنیم که برای j ، $f^{n+i}(V) \subset W$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، ولی $f^{n+i}(V) \cap V = \emptyset$. یعنی، هر نگاشت $f^n(V)$ بازه p را انبساط می‌دهد. از آنجاکه خود V متعلق به یک مجموعه ناپایدار موضعی است، عدد صحیح $k > j$ موجود است به طوری که $f^{n+k}(V)$ را پوشاند و بهازای هر $x \in V$ ، $|f^{n+k}(x) - f^n(x)| < \epsilon$. به طور دقیق‌تر، $f^{n+k} : V \rightarrow f^{n+k}(V)$ یک دیفیومورفیسم به روی تصویرش است که شامل هر دوی p و V می‌شود. برای معرفی دینامیک نمادین، همسایگی D چون V' حول p مشمول در W را طوری انتخاب می‌کنیم به طوری که

$$1. \text{ روی } V' \text{ یک به یک است و } f^{n+k}(V') \subset W$$

$$2. \text{ بهازای هر } x \in V', |(f^{n+k})'(x)| > 1$$

$$3. f^{n+k}(V') \supset V$$

$$4. V \cap V' = \emptyset. \text{ بهوضوح } f^{n+k}(V') \text{ نیز } V' \text{ را می‌پوشاند.}$$

بنابراین نگاشت f^{n+k} هر دوی V و V' را انبساط می‌دهد و تصاویر آنها شامل هر دوی V و V' است. با استفاده از تکنیک‌های بخش ۷.۱، اکنون می‌توان به سادگی یک تزویج توبولوژیکی بین f^{n+k} و تابع تغییرجا ساخت و برهان کامل می‌شود. \square

نتیجه ۶.۱۶ فرض کنید f شامل یک نقطه هموکلینیک به p ناتبهگون باشد. در این صورت در هر همسایگی از p ، بی‌نهایت نقطه متناوب مجزا موجود است.

البته، مدار این نقاط متناوب در یک همسایگی از p قرار نمی‌گیرد. بلکه مدارهای نقاط متناوب دور می‌شوند و تقریباً مدار هموکلینیک را دنبال می‌کنند. از آنجاکه f^{n+k} دارای بی‌نهایت مدار متناوب با تناوبهای متفاوت است، طبق قضیه شارکوفسکی، f باید دارای نقاط متناوب با همه تناوبهای 2^k باشد.

ملاحظات.

۱. توجه کنید که روند بالا یک تزویج بین f^{n+k} و تغییرجا به دست می‌دهد. می‌توان به راحتی ساختن بالا را تغییر داد تا یک تزویج بین f^i و تغییرجا بهارای هر $i > k + n$ تعریف کرد.

۲. با تغییر تعداد بارهای انتخاب شده، می‌توان نزدیک نقاط ثابتی که دارای مدارهای هموکلینیک ناتبھگون هستند، زیرتغییرجاهای از نوع متناهی متفاوتی یافت.

بنابراین، نقاط هموکلینیک ناتبھگون منجر به وجود رفتار آشوبناک برای یک نگاشت می‌شوند. یک سوال طبیعی این است که چگونه چنین انواع نقاط هموکلینیک پدید می‌آیند. در حالت کلی جواب این است که آنها با تغییر پارامتر در یک مدار هموکلینیک تبھگون تولید می‌شوند. این، مثال دیگری از این مطلب است که چگونه یک پایداری ساختاری یا انواع پیچیده‌تری از انشعابهای بخش ۱۲.۱ ممکن است از بین برond.

توجه کنید که مدارهای هموکلینیک تحت تزویج توبولوژیکی پایا هستند. در واقع، می‌توان نشان داد که نقاط هموکلینیک، غیرسرگردان بوده ولی بازگشتی نیستند (تمرینهای ۲.۷ و ۳.۷ را ببینید).

مدارهای هموکلینیک تبھگون در سیستم‌های دارای پایداری ساختاری رخ نمی‌دهند. در توابع درجه دو $F_4(x) = 4x(1 - x)^4$ می‌توان این مطلب را نشان داد. بهوضوح نقطه $\frac{1}{4}$ روی یک مدار هموکلینیک تبھگون قرار می‌گیرد. هنگامی که $4 < \mu$ ، نگاشت $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)^4$ دارای مقدار ماکسیمم $1 < \frac{\mu}{4}$ است. بنابراین برای این مقادیر μ ، هیچ نقطه هموکلینیک به وجود ندارد. از طرف دیگر، هنگامی که $4 > \mu$ ، بی‌نهایت مدار هموکلینیک متفاوت موجود است (تمرین ۳). درنتیجه، F_4 دارای پایداری ساختاری نیست. به طورکلی، اگر f دارای یک مدار هموکلینیک تبھگون باشد، یک تغییر C^1 کوچک در f می‌تواند تعداد مدارهای هموکلینیک را تغییر دهد (شکل ۲.۱۶ را ببینید).

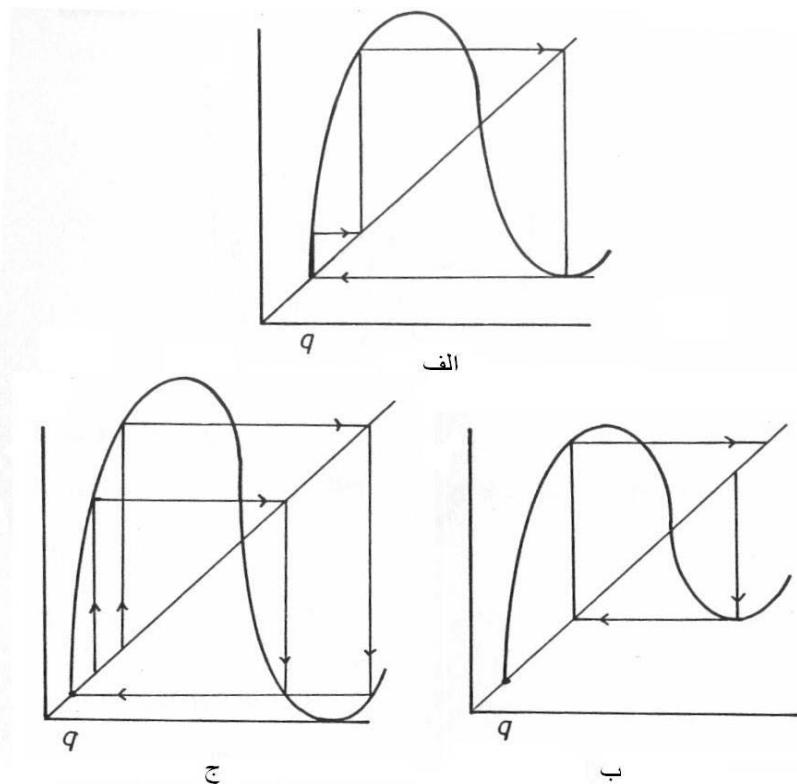
برای توصیف این مطلب که چگونه یک نقطه هموکلینیک تبھگون پدید می‌آید از نگاشت درجه دو به عنوان یک مدل استفاده می‌کنیم. نشان می‌دهیم در هر همسایگی از مقدار پارامتر بحرانی $4 = \mu$ ، مقادیری از μ موجود است به طوری که نگاشت متناظر با آنها دارای انشعاب زینی-گرهای یا دوره-دو برابر ساز باشد. بنابراین، این انشعابها نقاط ابشارتگی برای انشعابهای ساده هستند. ما از عبارت انشعاب هموکلینیک برای توصیف این پدیده استفاده می‌کوییم.

با قیمانده این بخش با توجه به اینکه با خانواده خاصی از نگاشتها کار می‌کنیم تا حدودی تکنیکی است ولی ایده‌های ارائه شده در ادامه، تا حدودی کلی هستند. ابتدا به یک لم نیاز داریم.

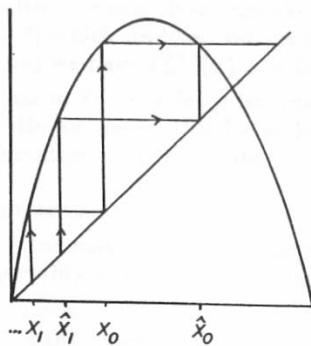
$$\text{لم ۷.۱۶} \quad F_\mu(x) = \mu x(1 - x)^4$$

$$\mu > \frac{4}{\mu} \text{ هرگاه } \frac{d}{d\mu} F_\mu^2(\frac{1}{4}) < 0. \quad .1$$

$$(F_\mu^2)''(\frac{1}{4}) = \mu^2(\mu - 2). \quad .2$$



شکل ۲.۱۶. در شکل ۲.۱۶ الف، یک نقطه تبهگون هموکلینیک به q موجود است.
اختلالهای کوچک یا هیچ نقطه هموکلینیک دیگری همچون شکل ارائه شده در قسمت ب
به دست نمی‌دهند یا اینکه همچون شکل ارائه شده در قسمت ج بی‌نهایت نقطه هموکلینیک
تولید می‌کنند.



شکل ۳.۱۶

در قسمت ۲ لم، مشتق نسبت به x گرفته شده است نه نسبت به μ . هر دو قسمت این لم با محاسبات ابتدایی ثابت می‌شوند. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

یک μ را که $4 < \mu < \frac{4}{3}$ ، ثابت نگه دارید. نشان می‌دهیم بی‌نهایت مقدار از μ در بازه $[\mu_0, 4]$ موجود است که برای آنها F_μ دارای انشعاب زینی-گرهای است. از آنجاکه $2 > \mu$ ، می‌توان همسایگی J از $\frac{1}{\mu}$ یافت به‌طوری که به‌ازای هر $x \in J$ و هر $\mu \in [\mu_0, 4]$ ، داشته باشیم $0 > (F_\mu^2)''(x)$. فرض می‌کنیم J حول $\frac{1}{\mu}$ متقارن باشد، مثلاً قرار دهید $J = [x_0, \hat{x}_0]$. از آنجاکه $2 > \mu$ ، داریم $\frac{1}{\mu} > (F_\mu(\frac{1}{\mu}))^2$. می‌توانیم فرض کنیم $\hat{x}_0 > (\frac{1}{\mu})^{1/2}$. از آنجاکه F_μ روی بازه $(\frac{1}{\mu}, 0]$ و بنابراین روی بازه $[0, x_0]$ صعودی است یک دنباله خوش‌تعریف

$$0 < \dots < x_2 < \hat{x}_2 < x_1 < \hat{x}_1 < x_0 < \hat{x}_0.$$

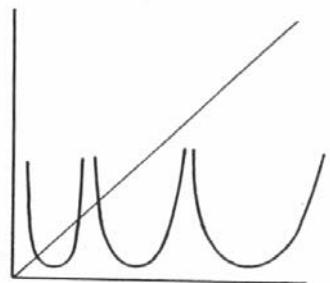
موجود است که $I_{j-1} = F_\mu(x_{j-1})$ و $I_j = F_\mu(x_j) = \hat{x}_j$ بازه $[x_j, \hat{x}_j]$ باشد. شکل ۳.۱۶ را ببینید.

به‌وضوح $I_j = F_\mu$ را به‌صورت یک‌به‌یک به‌روی I_{j-1} می‌نگارد. بنابراین نتیجه می‌شود که نمودار $F_\mu^{j+2} = F_\mu^2 \circ F_\mu^j$ روی I_j همانند F_μ^2 روی I_0 است. این مطلب به‌صورت دقیق‌تر در زیر بیان شده است.

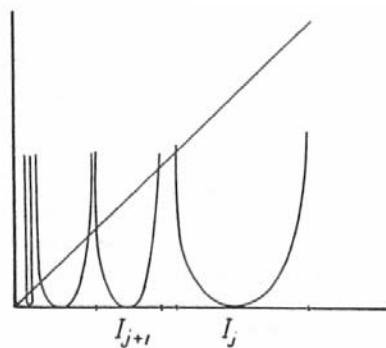
قضیه ۸.۱۶

۱. برای هر $j \geq 0$ دارای نقطه بحرانی یکتای $c_j(\mu)$ در I_j است و F_μ^{j+2} در این نقطه دارای یک مینیمم است. همچنین، $F_\mu^{j+2}(c_j(\mu)) = F_\mu^2(\frac{1}{\mu})$

$$. F_\mu^{j+2}(x_j) = F_\mu^{j+2}(\hat{x}_j) = F_\mu^2(x_0). \quad 2$$



شکل ۴.۱۶.



شکل ۵.۱۶. نمودار F_p^{j+2} روی I_j

برهان. برای قسمت اول توجه کنید که روی I_j داریم $F_\mu^{j+2} = F_\mu^2 \circ F_\mu^j$. بنابراین

$$(F_\mu^{j+2})'(x) = (F_\mu^2)'(F_\mu^j(x)) \cdot (F_\mu^j)'(x).$$

از آنجاکه $F_\mu^j : I_j \rightarrow I_0$ یک دیفیومورفیسم است، برای هر $x \in I_j$ داریم $(F_\mu^j)'(x) > 0$. بنابراین تنها نقطه بحرانی، فقط زمانی اتفاق می‌افتد که $(F_\mu^2)'(x)$ صفر شود، یعنی در $\frac{1}{\mu} = F_\mu^j$. اگنون نتیجه به سرعت به دست می‌آید. قسمت دوم، از این نکته که $(F_\mu^j)'(x) = F_\mu(x)$ به دلیل تقارن برقرار است نتیجه می‌شود. این قضیه در شکل ۴.۱۶ نشان داده شده است. \square

هنگامی که $\mu = 4$ ، توصیف وضعیت ساده‌تر است. مقدار مینیمم F_μ^{j+2} روی هر I_j برابر صفر است. از آنجاکه

$$F_\mu^{j+2}(x_j) = F_\mu^{j+2}(\hat{x}_j) = F_\mu^2(x_0) > 0,$$

نتیجه می‌شود که برای زهای به اندازه کافی بزرگ، F_μ^{j+2} روی I_j دارای دقیقاً دو نقطه ثابت است. (شکل ۴.۵.۱۶ را ببینید).

برای نشان دادن اینکه بی‌نهایت انشعاب موجود است، توجه کنید که با افزایش μ ، نمودار F_μ^{j+2} روی I_j "نزول" کرده و درنهایت قطر را قطع می‌کند و یک انشعاب پدید می‌آورد. این موضوع را دقیق‌تر توضیح می‌دهیم. برای هر μ ، بازه‌های I_j به صفر همگرا هستند. ادعا می‌کنیم یک عدد صحیح $N = N(\mu)$ موجود است به‌طوری که به‌ازای هر $x \in I_j$ و $j > N$ $x > x_j$. در واقع، طبق قضیه ۴.۱۶، کمترین مقدار F_μ^{j+2} روی I_j برابر است با $(\frac{1}{\mu})^{\frac{1}{2}}$. بنابراین اگر $N(\mu)$ طوری انتخاب شود که $[0, F_\mu^2(\frac{1}{\mu})] \subset I_N$ ، نتیجه به سرعت حاصل می‌شود.

اگنون نشان می‌دهیم که بی‌نهایت نگاشت F_μ ، $\mu \in [\mu_0, 4]$ موجود است که دارای انشعاب هستند. $N(\mu_0)$ را همانند بالا انتخاب کنید. برای هر $j > N(\mu_0)$ و هر $x \in I_j$ داریم $F_\mu^{j+2}(x) > N(\mu_0)$. درنتیجه، F_μ^{j+2} هیچ نقطه ثابتی در I_j ندارد. حالا μ را افزایش دهید. هنگامی که $\mu = 4$ دارای ۲ نقطه ثابت در I_j است. بنابراین باید حداقل یک μ در $[\mu_0, 4]$ موجود باشد که برای آن F_μ^{j+2} دارای انشعابی در نقاط ثابت باشد.

ملاحظات.

۱. می‌توان نشان داد که باید یک انشعاب زینی-گرهای روی I_j (که ممکن است تبهگون باشد) با افزایش μ موجود باشد.

۲. از آنجاکه یکی از نقاط ثابت F_μ^{j+2} در I_j دارای مشتق منفی است، باید یک انشعاب دوره-دو برابر ساز با افزایش μ موجود باشد.

۳. در واقع، می‌توان بازه‌ای یافت که روی آن، F_μ^{j+2} ”قابل بازنگاری“ باشد همانند آنچه در بخش بعد توصیف می‌شود. به ویژه، نتیجه می‌شود بی‌نهایت مقدار پارامتر در بازه $[\mu_0, \mu]$ موجود است به‌طوری‌که برای آنها F_μ دارای یک نقطه هموکلینیک تبھگون است.

تمرین.

۱. نشان دهید مدارهای هموکلینیک تحت تزویج تپیولوژیکی پایا می‌مانند.
۲. ثابت کنید مدارهای هموکلینیک غیرسرگردان هستند ولی بازگشتی نیستند (تمرینهای ۲.۷ و ۳.۷ را ببینید).

۳. فرض کنید $(x - 1 - x)F_\mu(x) = \mu x$. نشان دهید برای $\mu > 4$ دارای بی‌نهایت مدار هموکلینیک به \circ است که همه آنها ناتبھگون هستند. ثابت کنید F_4 دارای بی‌نهایت مدار هموکلینیک تبھگون است.

۴. لم ۷.۱۶ را ثابت کنید.

۵. فرض کنید p_1 و p_2 دو نقطه ثابت دافع بوده و هر دوی این نقاط دارای مدار ناتبھگون هتروکلینیکی باشند که آن دو را به یکدیگر وصل می‌کند. یعنی، فرض کنید $q_i \in W_{\text{loc}}^u(p_i)$ و اعداد صحیح n_1 و n_2 موجودند به‌طوری‌که

$$f^{n_1}(q_1) = p_2, \quad f^{n_2}(q_2) = p_1.$$

ثبت کنید f دارای یک مجموعه پایایی هذلولوی است که نگاشت روی آن آشوبناک است.

۶. نشان دهید نتایج تمرین ۵ درمورد خانواده نگاشتهای $x^3 - \lambda x$ برای λ ‌های به اندازه کافی بزرگ صدق می‌کند.

۱۷ مسیر دوره-دو برابر ساز به آشوب

همان‌گونه که در بخش ۵.۱ دیدیم، نگاشت درجه دو $(x - 1 - x)F_\mu(x) = \mu x$ برای $\mu \leq 0$ دارای دینامیک ساده و برای $\mu \geq 4$ آشوبناک است. سوال طبیعی این است که چگونه F_μ با افزایش μ آشوبناک می‌شود؟ این تعداد نامتناهی نقطه متنابض که برای μ ‌های بزرگ ظاهر می‌شوند از کجا

می آیند؟ در این بخش به این سوال یک جواب هندسی و شهودی می دهیم و در بخش بعدی از یک رهیافت سخت تر استفاده می کنیم. لازمه این موضوع معرفی نسخه قدرتمندتری از دینامیک نمادین به نام نظریه آمیختگی است.

قضیه شارکوفسکی یک پاسخ جرئی برای این سوال که چگونه با تغییر پارامتر، بی نهایت نقطه متناوب حاصل می شود ارائه می دهد. پیش از اینکه F_μ بتواند بی نهایت نقطه متناوب با تناوبهای متفاوت داشته باشد باید نقاط متناوبی با تناوبهایی به صورت $\begin{pmatrix} 2 \\ \mu \end{pmatrix}$ داشته باشد. قضیه انشعاب موضعی، دو روش برای اینکه چگونه این نقاط متناوب حاصل می شوند ارائه می کند: انشعابهای زینی-گرهای و دوره-دو برابر ساز. سوالی که پس از آن پیش می آید این است که با آشوبناک شدن F_μ ، چه نوع انشعابهایی رخ می دهند.

همانگونه که خواهیم دید یک روش معمول برای آشوبناک شدن F_μ این است که F_μ متحمل یک سری از انشعابهای دوره-دو برابر ساز شود. البته همیشه این چنین نیست ولی این یک مسیر نوعی برای آشوبناک شدن است. توجه کنید که اگرچه ما در اینجا از نگاشتهای درجه دو استفاده می کنیم ولی ایده های به کار برده شده به رده بسیار بزرگ تری از نگاشتهای تک پیمانه ای که در بخش بعدی توصیف می شوند قابل تعمیم است.

یادآوری می کنیم که نمودارهای F_μ برای مقادیر مختلف μ در شکل ۱.۱۷ نشان داده شده است. برای $3 < \mu < 1$ ، F_μ دارای یک نقطه یکتای ثابت جاذب در $\frac{(\mu-1)}{\mu} = p_\mu$ است که $1 < p_\mu < 0$. توجه کنید تا زمانی که $0 < F'_\mu(p_\mu)$ ، یک "شریک" \hat{p}_μ برای p_μ موجود است. به طوری که $F_\mu(\hat{p}_\mu) = p_\mu$ و $\hat{p}_\mu < p_\mu$.

با تحلیل نموداری برای F_μ می توان نمودارهای F_μ^2 را برای مقادیر مختلف μ رسم کرد که در شکل ۲.۱۷ نشان داده شده است. به ویژه به قسمتی از نمودار F_μ^2 که در بازه $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ فرار دارد توجه کنید. این قسمت از نمودار را داخل یک مربع قرار داده ایم. سه ملاحظه زیر در مورد نمودار برقرارند.

۱. نمودار F_μ^2 اگرچه "وارونه" است ولی به نمودار نگاشت درجه دوم اصلی (برای مقادیر مختلف μ) به صورتی که در ادامه مشخص می کیم شباهت دارد.

۲. در واقع، در داخل مربع، F_μ^2 دارای یک نقطه ثابت در یک انتهای بازه $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ و یک نقطه بحرانی یکتا در داخل این بازه است.

۳. با افزایش μ ، "برآمدگی" این نگاشت که مشابه نگاشت درجه دوم است رشد می یابد تا در نهایت، برآمدگی از پایین مرتع بگذرد.

یعنی، رفتار F_μ^* روی بازه $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ بسیار شبیه به رفتار F_μ روی دامنه اصلی آن، یعنی، $[1^\circ, 5^\circ]$ است. به ویژه با افزایش μ ، ابتدا انتظار می‌رود یک نقطه "ثابت جدید" برای F_μ^* (یعنی یک نقطه با تناوب ۲ برای F_μ) در بازه $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ تولید شود. سرانجام، همان‌گونه که برای F_μ عمل کرد، این نقطه ثابت، خودش دارای تناوب دو برابر می‌شود و درنتیجه یک نقطه با تناوب ۴ حاصل می‌شود. با ادامه این روند، به مرتبه کوچکی می‌رسیم که در آن نمودارهای F_μ^* ، F_μ^4 و غیره شبیه نگاشت درجه دوم اولیه است. بنابراین انتظار داریم با افزایش μ یک سری تناوب دو برابر پیدارد.

برای روشن کردن این ایده، عملگر بازنگارش R را معرفی می‌کنیم. R یک نگاشت روی فضای نگاشته‌است: R نگاشته‌ای داده شده خاص روی I را به نگاشتهای جدیدی روی I تبدیل می‌کند. برای تعریف R ابتدا فرض می‌کنیم که μ به اندازه کافی بزرگ است و بنابراین \hat{p}_μ تعریف شده و $p_\mu < \hat{p}_\mu$. برای L_μ ، کافیست $2 > \mu$. فرض کنید L_μ نمایانگر نگاشت خطی باشد که p_μ را به 0° و \hat{p}_μ را به 1° می‌نگارد. یعنی

$$L_\mu(x) = \frac{1}{\hat{p}_\mu - p_\mu}(x - p_\mu).$$

به راحتی می‌توان دید که وارون L_μ به صورت

$$L_\mu^{-1}(x) = (\hat{p}_\mu - p_\mu)x + p_\mu$$

است. توجه کنید که L_μ ، بازه کوچک $[\hat{p}_\mu, p_\mu]$ را منبسط کرده و با یک تغییر جهت به روی بازه $[1^\circ, 5^\circ]$ می‌نگارد.

اکنون بازنگارش R را به صورت

$$(RF_\mu)(x) = L_\mu \circ F_\mu^* \circ L_\mu^{-1}(x)$$

تعریف می‌کنیم. نگاشت بازنگارش RF_μ روی I تعریف شده و بسیاری از خواص F_μ را دارد است که در قضیه زیر به آن می‌پردازیم.

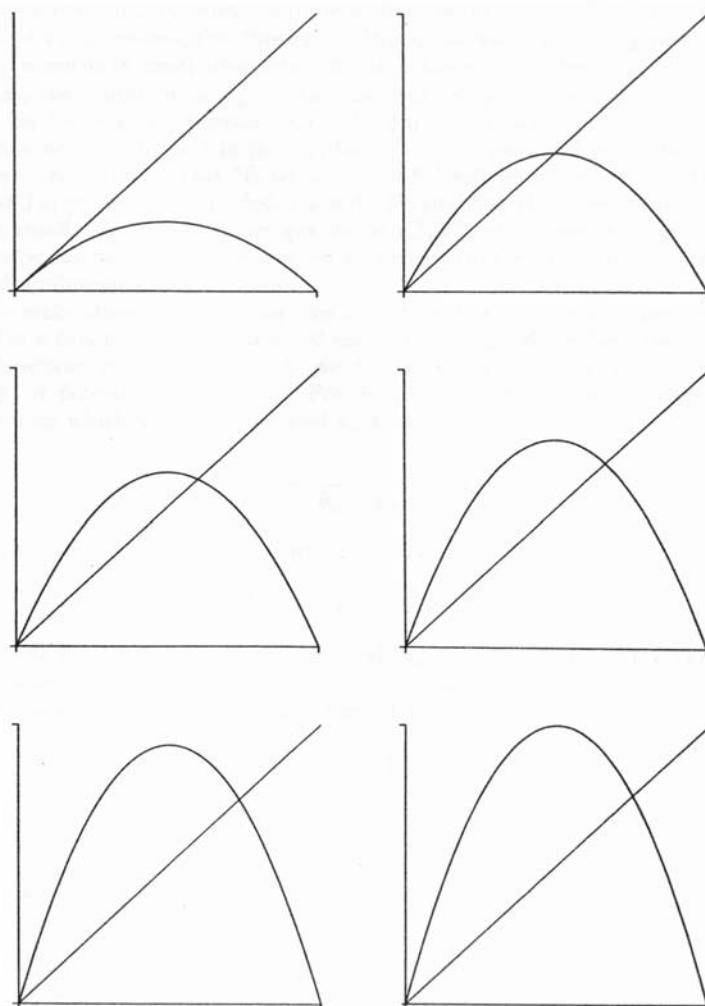
قضیه ۱.۱۷

$$\cdot RF_\mu(1^\circ) = 0^\circ \quad . RF_\mu(5^\circ) = 0^\circ \quad .$$

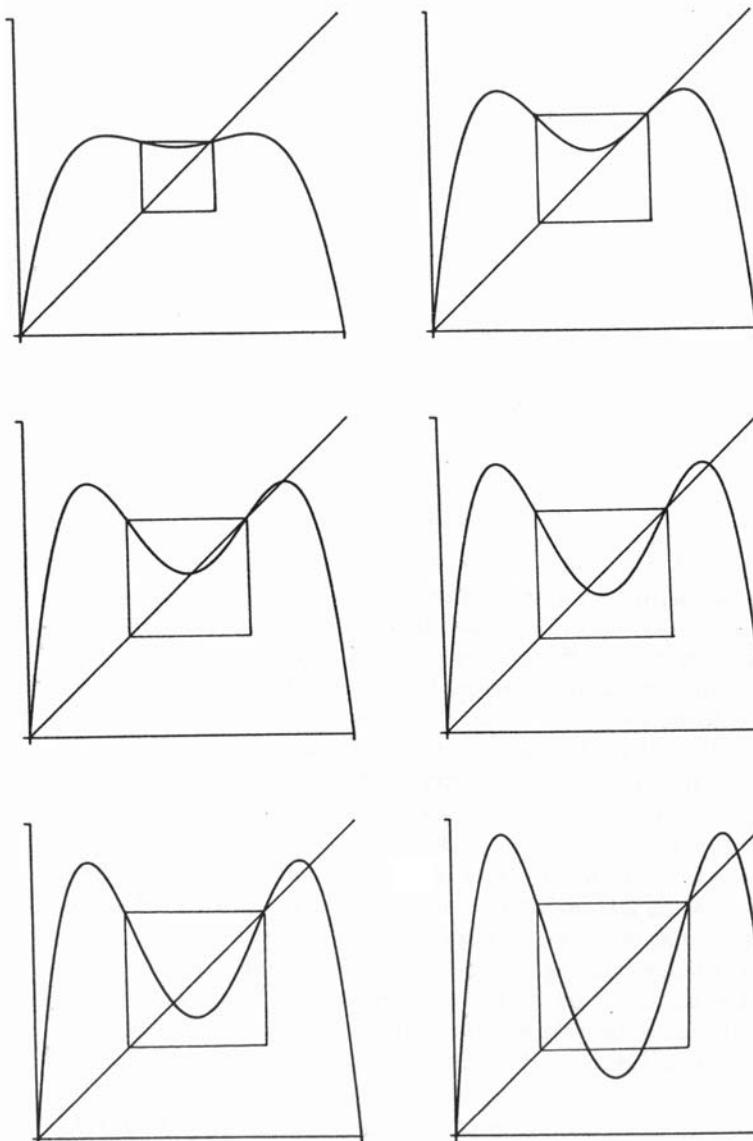
$$\cdot \text{ تنها نقطه بحرانی } RF_\mu'(\frac{1}{2}) = 0^\circ \quad .$$

$$\cdot S(RF_\mu) < 0 \quad .$$

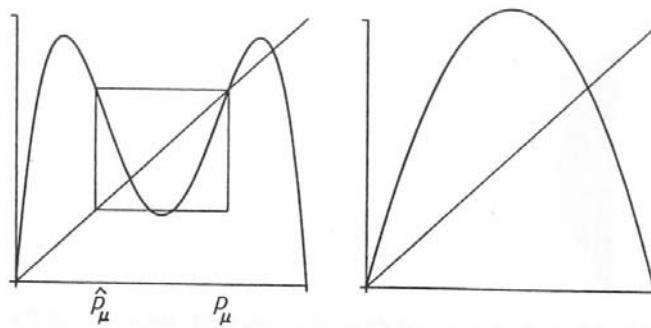
برهان هریک از قسمت‌ها ساده بوده و به خواننده واگذار می‌شود. ملاحظه می‌کنیم که بازنگارش F_μ ، نقاط متناوب با تناوب ۲ از F_μ را به نقاط ثابت RF_μ تبدیل می‌کند. همچنین قبل از اینکه μ به ۴ برسد، نقطه اوج نمودار RF_μ از بالای مرتبه ۴ گذشته است. شکل ۳.۱۷ را ببینید.



شکل ۱.۱۷. نمودارهای $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ برای $\mu = 1, 2, 2.5, 3, 3.5$ و 4 به ترتیب از چپ به راست.



شکل ۲.۱۷. نمودارهای $F_\mu^*(x)$ برای، $\mu = ۳.۴$ ، $\mu = ۳.۲$ ، $\mu = ۳$ ، $\mu = ۲.۵$ و $\mu = ۳.۸$ به ترتیب از چپ به راست.

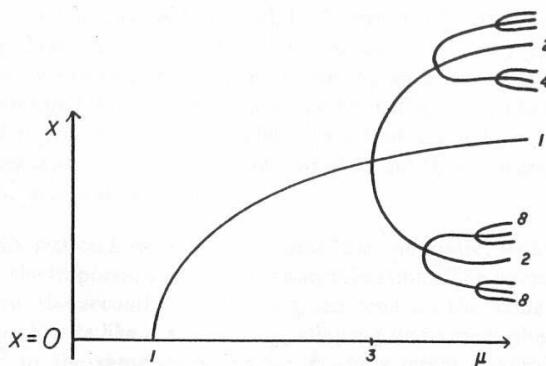


شکل ۳.۱۷. نمودار F_μ^2 در سمت چپ و RF_μ برای $\mu = ۳.۷$.

بنابراین، با افزایش μ انتظار می‌رود که RF_μ متتحمل یک انشعاب دوره‌دو برابر ساز شود. در واقع، هنگامی که RF_μ دارای یک نقطه ثابت (μ_1, p_1) با مشتق منفی باشد، آنگاه می‌توان همانند قبل (μ_1, p_1) را پافت و باز هنجارش دومی را تعریف کرد. در این حالت، نگاشت خطی، (μ_1, p_1) را به صفر و (μ_1, p_1) را به ۱ می‌نگارد و بنابراین یک نگاشت خطی متفاوت است. درنتیجه کل شکل خودش را تکرار می‌کند و یک انشعاب دوره‌دو برابر ساز دیگر این بار برای تابع F_μ^2 حاصل می‌شود. با ادامه این روند، و با افزایش μ یک سری انشعابهای دوره‌دو برابر ساز پیاپی حاصل می‌شود. بنابراین انتظار داریم که نمودار انشعاب برای F_μ حداقل شامل پیچیدگی نشان داده شده در شکل ۴.۱۷ باشد.

با استفاده از کامپیوتر می‌توان این حقایق را به طور تجربی بررسی کرد. "نمودار مدار" را برای F_μ محاسبه می‌کنیم. نمودار مدار، تصویری از رفتار مجانبی مدار $\frac{1}{\mu}$ را برای μ های مختلف بین 0° و 40° به دست می‌دهد. برای هر μ ، 50° نقطه اول از مدار $\frac{1}{\mu}$ را تحت تکرارهای F_μ محاسبه می‌کنیم. ما تنها 400° نقطه آخر از این مدار را رسم کردیم؛ این رفتار "نایابیدار" اولیه را حذف می‌کند. 150° مقدار از μ با فاصله‌های یکسان بین 0° و 40° انتخاب می‌کنیم. مقادیر μ روی محور افقی و نقاط مدار متناظر به صورت عمودی رسم شده است. مقادیر این آزمایش در شکل ۴.۱۷ نشان داده شده است. توجه کنید که چگونه نمودار انشعاب F_μ در این تصویر به نمایش در آمده است.

ملاحظه. با رسم مدار هر نقطه دیگر چون $x_0 < 1 < x_1$ ، تصویر مشابهی به دست می‌آید. ترجیح می‌دهیم که با نقطه بحرانی $\frac{1}{\mu}$ کار کنیم چون همان‌طور که در قضیه ۴.۱۱ دیدیم، این نقطه همیشه به یک مدار متناوب جاذب، جذب می‌شود. در شکل ۵.۱۷، بسیاری از نکاتی که از قبل راجع به آن بحث کردیم به وضوح دیده می‌شود. برای



شکل ۴.۱۷. نمودار انشعاب برای F'_μ ، تکررتناوب دو برابر را نشان می‌دهد.
اعداد نماینده تناوب هستند.

مثال، هنگامی که $1 \leq \mu \leq 0$ ، همه مدارها به تنها نقطه ثابت جاذب در \circ همگرا می‌شوند. توجه کنید که این همگرایی هنگامی که $(0) F'_\mu$ به ۱ نزدیک باشد (هنگامی که μ به ۱ نزدیک باشد) کند است. این موضوع در نمودار مدار نزدیک این نقطه، ناحیه سیاه‌رنگی از نقاط قابل رویت ایجاد می‌کند. برای $3 \leq \mu < 1$ ، همه مدارها جذب نقطه ثابت \circ $\neq p_\mu$ می‌شوند و این از نمودار مدار واضح است. پس از آن، چند انشعاب دوره-دو برابر ساز پشت سرهم دیده می‌شود که آنچه را در بالا توضیح دادیم تأیید می‌کند.

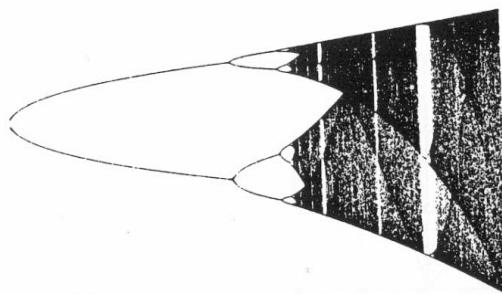
توجه کنید که برای بسیاری از مقادیر μ ، پس از آنجایی که دوره-دو برابر ساز حادث می‌شود، مشاهده می‌شود که مدار نقطه $\frac{1}{2}$ ، یک بازه را پر می‌کند. البته در این حالت به سختی می‌توان مشخص کرد که آیا مدار، واقعاً جذب یک مدار متناوب با تناوب بالا می‌شود و یا اینکه در یک بازه چگال است. کامپیوتر به خاطر داشتن دقت محدود نمی‌تواند این دو حالت را از هم متمایز کند با این وجود نمودار مدار یک وسیله تجربی است که نشان می‌دهد اکثر مقادیر μ بعد از دوره-دو برابر ساز، به دینامیک آشوبناک منتهی می‌شوند.

این موضوع در شکل ۶.۶ بسیار متقاعد کننده‌تر است چون بخشی از نمودار مدار که متناظر با $4 \leq \mu \leq 3$ است بزرگ‌تر نشان داده شده است. توجه کنید که توالی دوره-دو برابر ساز در این شکل به وضوح قابل مشاهده است.

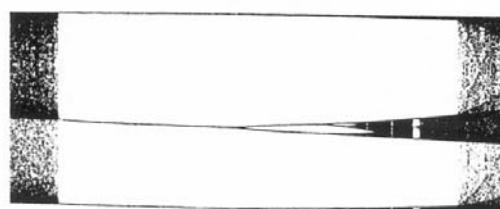
ملاحظه. ما خواننده‌ای را که به یک کامپیوتر با ظرفیت گرافیکی خوب دسترسی دارد تشویق می‌کنیم که با جزئیات، بقیه نواحی کوچک‌تر در نمودار مدار را کشف کند. به طور مثال، در



شکل ۵.۱۷. نمودار مدار برای F_μ برای $4 \leq \mu \leq 5^\circ$ که به صورت افقی رسم شده است.



شکل ۶.۱۷. نمودار مدار برای F_μ برای $4 \leq \mu \leq 3^\circ$



شکل ۷.۱۷. نمودار مدار برای F_μ برای $3.825 \leq \mu \leq 3.86$

”پنجره‌هایی“ که مدار $\frac{1}{\mu}$ به یک مدار جاذب با تناب n جذب می‌شود چه اتفاقی می‌افتد؟ با بزرگ‌نمایی و محاسبه دوباره این بخش‌های نمودار مدار، به‌سادگی دیده می‌شود که با افزایش μ ، پدیده مشابهی اتفاق می‌افتد: F_μ متتحمل دنباله دیگری از انشعابهای دوره-دو برابر ساز می‌شود. این موضوع در شکل ۷.۱۷ با نمایش تناب 3 برای $3.825 \leq \mu \leq 3.86$ نمایش داده شده است. توجه کنید تنها مدار قابل مشاهده برای بسیاری از مقادیر μ ، یک مدار جاذب با تناب 3 است و این مدار متتحمل دنباله‌ای از انشعابهای دوره-دو برابر ساز می‌شود.

با وجود اینکه بیشتر این بخش به صورت اکتشافی ارائه شده است ولی مقدمه‌ای برای معرفی مفهوم مهم بازنگارش به دست می‌دهد. عملگر R این اجازه را می‌دهد که تکرار دوم یک نگاشت داده شده را روی همان مقیاس نگاشت اصلی انجام دهیم. R مانند یک میکروسکوپ عمل می‌کند و این اجازه را می‌دهد که پدیده‌ای را که برای f^2 پیش می‌آید با همان جزئیات که برای f وجود دارد ببینیم. یک سوال طبیعی که پیش می‌آید این است که اگر R بارها و بارها روی نگاشت داده شده اثر کند، در حد چه اتفاقی می‌افتد. این در واقع هدف نهایی تحلیل گروه بازنگارش در فیزیک است و به مفهوم مهم جامعیت منجر می‌شود. این ایده‌ها فراتر از هدف این کتاب است ولی ما روی این عملگر از نقطه نظر دینامیک نمادین بحث می‌کنیم. برای این منظور به نوع قدرتمندتری از دینامیک نمادین، به نام نظریه آمیختگی نیاز داریم که موضوع بحث بخش بعدی است.

تمرین. ماشین جمع کننده (میسیور ویج). هدف این دسته از تمرین‌ها ساخت و تحلیل یکتابع پیوسته روی I است که برای هر x ، دقیقاً یک نقطه متنابض با تناب 2 دارد و هیچ نقطه متنابض دیگری ندارد. ساختار این نگاشت براساس مفهوم دو برابر کردن یک نگاشت است که در بخش ۱۰.۱ روی آن بحث شد. با $\frac{1}{f} = f_0(x)$ شروع می‌کنیم. فرض کنید $f_1(x)$ نشان‌دهنده دو برابر f_0 باشد، یعنی، $f_1(x)$ از f_0 از طریق مراحل زیر به دست آمده باشد:

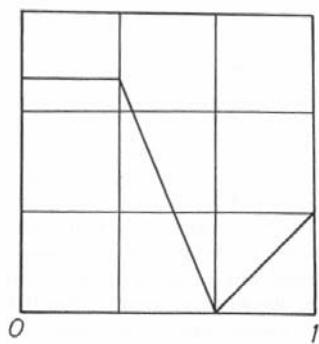
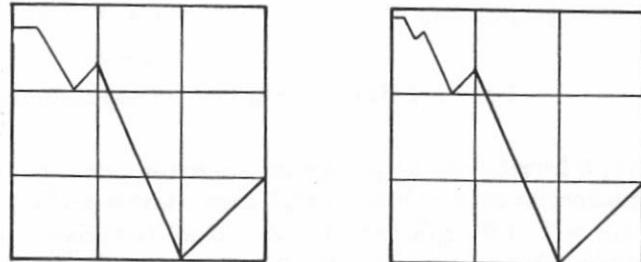
$$1. \text{ اگر } \frac{1}{x} \leq 0, \text{ آنگاه } \frac{2}{3} + f_0(3x) \leq x \leq 0.$$

$$2. \text{ } f_1(1) = \frac{1}{3}; f_1(\frac{2}{3}) = 0.$$

$$3. \text{ روی بازه‌های } \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \text{ و } \frac{1}{3} \leq x \leq 0 \text{ پیوسته و خطی است.}$$

منظور این است که نمودار f_1 از f_0 به صورتی که در شکل ۸.۱۷ نمایش داده شده به دست آمده است. با استقراء $f_{n+1}(x)$ را به صورت دو برابر $f_n(x)$ تعریف می‌کنیم. شکل ۹.۱۷ را ببینید.

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

شکل ۸.۱۷. دو برابر f .شکل ۹.۱۷. نمودار f_1 , f_2 و f_3 .

۱. برای $x \geq \alpha^{\frac{1}{\alpha}}$ نشان دهید $f_{n+\alpha}(x) = f_n(x)$. نتیجه بگیرید که اگر $F(0)$ را تعریف کنیم، آنگاه $F(x)$ یک نگاشت خوش تعریف پیوسته روی I است.

۲. نشان دهید $f_n(x) \leq z$ دارای یک مدار متناوب یکتا^j است. ثابت کنید اگر $n < j$ ، آنگاه هریک از این نقاط متناوب، دافع هستند.

۳. ثابت کنید $f_n(x)$ هیچ نقطه متناوب دیگری ندارد.

۴. نشان دهید $F(x)$ برای هر ز دارای یک مدار متناوب یکتا با تناوب^j بوده و هیچ نقطه متناوب دیگری ندارد. نشان دهید این مدار متناوب، دافع است.

از مثال ۵.۵، ساختن مجموعه یک سوم میانی کانتور را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید $A_0 = I - A_1$ یک سوم وسط بازه یکه I باشد. قرار دهید $I_0 = I - A_0$. فرض کنید $A_1 = I_0 - A_2$ یک سوم وسط از دو بازه I_0 باشد. قرار دهید $I_1 = I_0 - A_1$. با استقراء فرض کنید A_n نشان دهنده یک سوم میانی از بازه‌های داخل I_{n-1} بوده و قرار دهید $I_n = I_{n-1} - A_n$. درنهایت قرار دهید

$$I_\infty = \bigcap_{n \geq \infty} I_n.$$

مجموعه I_∞ ، مجموعه یک سوم میانی کانتور کلاسیک است.

۵. نشان دهید نقاط متناوب F با تناوب^j داخل اجتماع بازه‌هایی که شامل A_j هستند قرار می‌گیرند.

۶. نشان دهید $F(I_n) = I_n$.

۷. ثابت کنید اگر $x \in A_n$ و x متناوب نباشد، آنگاه $\exists k > n$ مثبت موجود است که

۸. ثابت کنید I_∞ تحت F پایاست.

۹. ثابت کنید اگر $x \notin I_\infty$ و x متناوب نباشد، آنگاه مدار x یا نهایتاً به I_∞ میل می‌کند یا در I_∞ قرار می‌گیرد.

بنابراین همه نقاط غیر متناوب F جذب مجموعه I_∞ می‌شوند و برای دیدن دینامیک F ، لازم است دینامیک F روی I_∞ بررسی شود. برای هر $p \in I_\infty$ ، $s \in I_\infty$ ، s_0, s_1, s_2, \dots نسبت می‌دهیم به طوری که $s_0 = p$ ، اگر p متعلق به مؤلفه چپ I_0 باشد؛ و $s_0 = p$ متعلق به مؤلفه راست باشد. توجه کنید که این کمی با کد کردن نگاشت درجه

دوم تفاوت دارد! اکنون p متعلق به مؤلفه‌ای از I_{n-1} است و I_n با حذف $\frac{1}{p}$ وسط از این باره به دست می‌آید. بنابراین $s_n = 1$ اگر p متعلق به سمت چپ بازه I_n باشد و در غیر این صورت $s_n = 0$. فرض کنید Σ_2 مجموعه همه دنباله‌های 0 و 1 باشد. ماشین جمع کننده را به صورت $\Sigma_2 \rightarrow A$ با ضابطه^(پیمانه ۲) $A(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_0 s_1 s_2 \dots) + (100\dots)$ تعریف کنید، یعنی A با اضافه کردن 1 به s در پیمانه 2 به دست می‌آید و نتیجه حاصل می‌شود. برای مثال، $A(\overline{111\dots}) = (\overline{001110110\dots}) = (\overline{001110\dots})$

۱۰. فرض کنید d فاصله معمولی روی Σ_2 باشد (قضیه ۱.۶ را ببینید). نشان دهید Σ_2 روی F یک تزویج توپولوژیکی بین I_∞ و A است.

۱۱. نشان دهید A هیچ نقطه متناوبی ندارد.

۱۲. نشان دهید هر مدار A در Σ_2 چگال است.

از آنجاکه Σ_2 هیچ زیرمجموعه سره بسته پایا تحت A ندارد، Σ_2 مثالی از یک مجموعه مینیمال است.

۱۸ نظریه آمیختگی

در بخش‌های قبلی، نشان دادیم که چگونه از دینامیک نمادین برای درک کامل دینامیک بعضی از نگاشتهای درجه دوم خاص استفاده می‌شود. هنگامی که μ به اندازه کافی بزرگ باشد یا وقتی $\mu = 3.839$ دیدیم که همه دینامیک جالب $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ روی یک مجموعه کانتور اتفاقی می‌افتد. نگاشت F_μ روی این مجموعه با نگاشت تغییرجا یا یک زیرتغییرجا از نوع متناهی هم ارز است. برای سایر مقادیر این پارامتر، این موضوع بسیار پیچیده‌تر است. برای مثال، هر دوی نگاشتهای آنها، نگاشت آشوبناک است (تمرینهای ۹.۱۱ و ۹.۱۲ را ببینید).

یکی از تفاوت‌های این دو مثال، رفتار نقطه بحرانی آنها تحت تکرارهای نگاشت است. در حالت F_μ ، مدار نقطه بحرانی به $-\infty$ میل می‌کند در حالی که در حالت $\mu = 3.839$ ، به یک مدار متناوب جاذب جذب می‌شود. در دو مثال اخیر، نقطه بحرانی درنهایت روی یک نقطه ثابت دافع فرود می‌آید. بنابراین، با یک دیدگاه، مدار نقطه بحرانی، دینامیک نگاشت را مشخص می‌کند. هدف ما در این بخش روشن کردن این مطلب است. در اینجا نوع پیچیده‌تر دینامیک نمادین، یعنی نظریه آمیختگی را معرفی می‌کنیم که با آن می‌توان مدار یک نقطه بحرانی را دنبال کرده و درنتیجه بسیاری از پیچیدگی‌های دیگر را بررسی کرد. همچنین، نظریه آمیختگی به ما این توانایی را می‌دهد

که تغییر وضعیت از دینامیک ساده به دینامیک آشوبناک را که در بخش قبل توصیف شد، در سطح نمادها ببینیم.

تعریف ۱.۱۸ نگاشت $I \rightarrow I^f$ ، یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای نامیده می‌شود هرگاه

$$f(\circ) = f(1) = \circ.$$

۲. f دارای نقطه بحرانی یکتای c که $\circ < c < 1$ باشد.

بهوضوح، نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای روی بازه $[0, c]$ صعودی و روی بازه $(c, 1)$ نزولی هستند. نگاشت درجه دوم $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ برای $0 < \mu \leq 4$ و نگاشت $S_\lambda(x) = \lambda \sin(\pi x)$ برای $1 < \lambda < 0$ تک‌پیمانه‌ای هستند. شکل ۱.۱۸ را ببینید. در بقیه این بخش با یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای ثابت کار می‌کنیم.

توجه کنید، برای یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای مدار یک نقطه بحرانی در بازه یکه دنبال می‌شود و مانند حالت $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ برای $\mu > 4$ نمی‌تواند به $-\infty$ فرار کند ولی این مدار ممکن است سرنوشهای دیگری پیدا کند. برای پررنگ‌تر کردن نقشه بحرانی، تعریف‌مان از راهنماء را با اضافه کردن یک نماد سوم "C" کمی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۲.۱۸ فرض کنید $I \in \mathcal{X}$. راهنماء x تحت f دنباله نامتناهی (s_0, s_1, s_2, \dots) است که

$$s_j = \begin{cases} \circ & f^j(x) < c, \\ 1 & f^j(x) > c, \\ C & f^j(x) = c. \end{cases}$$

برای ما، راهنماء نقطه بحرانی اهمیت بیشتری دارد.

تعریف ۳.۱۸ دنباله آمیخته $K(f)$ از f ، راهنماء $f(c)$ است، یعنی، $K(f) = S(f(c))$

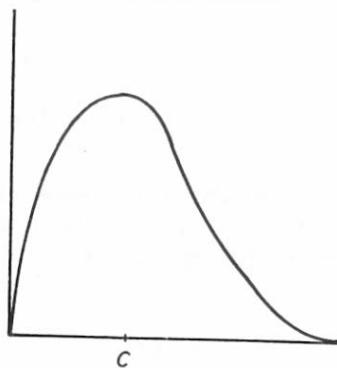
مثال ۴.۱۸ اگر $f(x) = F_4(x) = 4x(1-x)$ و برای هر $j > 1$ ، $f^j(x) = c$ ، آنگاه $f^j(c) = 1$ ، $f^{j+1}(c) = 0$ و درنتیجه $f^j(c) = \circ$.

$$K(f) = (\circ \circ \circ \circ \dots).$$

اگر $f(x) = F_2(x) = 2x(1-x)$ و برای هر j ، $f^j(c) = c$ ، آنگاه $f^j(c) = \frac{1}{2}$. بنابراین

$$K(f) = (CC\overline{C}\dots).$$

در اینجا علامت بار به این معنی است که نماد یا مجموعه نمادهای موردنظر تابی نهایت تکرار می‌شود.



شکل ۱.۱۸. نمودار یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای

تعداد زیادی راهنامه ممکن برای یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای موجود است، ولی محدودیتها بی نیز وجود دارد. برای مثال، اگر $s_j = C$ ، آنگاه باید داشته باشیم $s_{j+k} = \alpha_k$ که

$$K(f) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots).$$

یک دنباله، منظم نامیده می‌شود اگر برای هر j ، s_j برابر ۰ یا ۱ باشد، یعنی برای هر j ، $C \neq s_j$. نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای داده شده که خصوصیات یک دنباله منظم را نمایش می‌دهند قابل ساختن هستند ولی همه دنباله‌ها لازم نیست برای یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای داده شده اتفاق بیفتد. در واقع، یک نگاشت ممکن است تعداد بسیار کمی راهنامه داشته باشد.

مثال ۵.۱۸ فرض کنید $f(x) = F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ که $0 < \mu < 1$. از تحلیل نموداری (بخش ۵.۱ را ببینید)، دیده می‌شود که تنها راهنامه‌های این نگاشت عبارتند از

$$(0\ 0\ \overline{0}\ \dots),$$

$$(1\ 0\ \overline{0}\ \dots),$$

$$(C\ 0\ 0\ \overline{0}\ \dots).$$

مثال ۶.۱۸ برای $\mu > 3$ در مثال بالا، تعداد راهنامه‌های بیشتری موجود است:

$$(C\ 1\ 1\ \overline{1}\ \dots),$$

$$(0\ 0\ \overline{0}\ \dots),$$

$$\begin{aligned} & (1\bar{1}\bar{1}\dots), \\ & (0\dots 0\bar{1}\bar{1}), \\ & (0\dots 0\bar{C}\bar{1}\bar{1}), \end{aligned}$$

به اضافه همه دنباله‌های فوق که پس از یک عدد ۱ قرار گرفته‌اند. در دو دنباله آخر، تعداد دلخواه ولی متناهی صفر وجود دارد.

به سادگی می‌توان دنباله‌های ممکن برای $\mu = 3 = \mu$ و همچنین حالتی که مدار متناوب جاذب از تناوب ۲، برای μ کمی بزرگ‌تر از ۳ موجود است را شمرد. تمرین ۱ را ببینید.

توجه کنید با وجود اینکه F_μ دارای تنها یک نقطه ثابت جاذب برای $\mu < 1$ است، ولی تعداد دنباله‌های ممکن تغییر کرده است. این تغییر در $\mu = 2$ می‌دهد که نقطه بحرانی، متناوب است یعنی، دنباله آمیخته به صورت $(CCC\dots)$ است. به این دلیل، حالت دنباله آمیخته متناوب، پیچیدگی‌هایی را که در ادامه می‌آید سبب می‌شود.

اکنون یک ترتیب به صورت \prec روی مجموعه راهنمای تعریف می‌کنیم. فرض کنید $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ و $t = (t_0 t_1 t_2 \dots)$. می‌گوییم $s \prec t$ دارای اختلاف n هستند هرگاه برای $s_0, s_1, \dots, s_n \neq t_n$ ولی $s_i = t_i$ ، $0 \leq i < n$ باشد. این عدد به دلیل زیر برای ما اهمیت دارد. علامت مشتق f^n در x ، دینامیک موضعی نزدیک x را معین می‌کند. توجه کنید که $(f'(x))'$ منفی است هرگاه $[c, 1] \ni x \in (c, 1]$. بنابراین، با توجه به قاعده زنجیری، تعداد ۱ ها در راهنامه x ، علامت $(f^n)'(x)$ را معین می‌کند (مشروط به آن که برای هر i ، $(f'(f^i(x)))' \neq 0$).

ترتیب را روی دنباله‌ها به صورت استقرایی تعریف می‌کنیم. برای شروع، قرار دهید $1 < C < 0$.

تعریف ۷.۱۸ فرض کنید s و t دارای اختلاف n باشند. گوییم $t \prec s$ ، هرگاه هریک از این دو برقرار باشد

$$1. \quad \tau_{n-1}(s) \text{ زوج باشد و } s_n < t_n.$$

$$2. \quad \tau_{n-1}(s) \text{ فرد باشد و } s_n > t_n.$$

مثال ۸.۱۸ تعریف قبل سبب می‌شود

$$(0101\dots) \prec (010C\dots) \prec (0100\dots)$$

$$(110\dots) \prec (11C\dots) \prec (111\dots).$$

این ترتیب، با وجود اینکه کمی طاقت فرساست ولی روی خط حقیقی تصویر می‌شود. به طور دقیق‌تر، اگر $x, y \in I$ و $x < y$ آنگاه $S(x) \preceq S(y)$. برعکس اگر $S(x) \prec S(y)$ آنگاه $y < x$. قبل از اثبات این مطلب، این ترتیب را در یک مثال ساده بررسی می‌کنیم.

مثال ۹.۱۸ فرض کنید برای $\mu < 3 < \nu$. در مثال ۶.۱۸ دیدیم که

$$(0\ 0\ \bar{0}\dots) \prec (C\ 1\ 1\ \bar{1}\dots) \prec (1\ 1\ \bar{1}\dots) \prec (1C\ 1\ 1\ \bar{1}\dots) \prec (10\ 0\ \bar{0}\dots).$$

بین $(0\ 0\ \bar{0}\dots)$ و $(C\ 1\ 1\ \bar{1}\dots)$ ، بی‌نهایت راهنمای به صورت زیر موجود است:

$$\ell_n = (\underbrace{0\ \dots\ 0}_{n\text{ تا}}\ 1\ 1\ \bar{1}\dots)$$

$$\ell'_n = (\underbrace{0\ \dots\ 0}_{n\text{ تا}}\ C\ 1\ 1\ \bar{1}\dots).$$

به راحتی می‌توان بررسی کرد که

$$(0\ 0\ \bar{0}\dots) \prec \dots \prec \ell'_2 \prec \ell_2 \prec \ell'_1 \prec \ell_1 \prec (C\ 1\ 1\ \bar{1}\dots).$$

آمدن عدد ۱ جلوی این مدارها، ترتیب را برعکس می‌کند:

$$(1C\ 1\ 1\ \bar{1}\dots) \prec 1\ell_1 \prec 1\ell'_1 \prec 1\ell_2 \prec 1\ell'_2 \prec \dots \prec (10\ 0\ \bar{0}\dots).$$

اکنون نشان می‌دهیم که ترتیب روی راهنمای‌ها، همانند ترتیب روی خط حقیقی است.

قضیه ۱۰.۱۸ فرض کنید I .

۱. اگر $x < y$ ، آنگاه $S(x) \prec S(y)$

۲. اگر $y < x$ ، آنگاه $S(x) \preceq S(y)$

مالحظه. تساوی در قسمت دوم غیرقابل حذف است چون وجود یک نقطه متناوب جاذب معمولاً باعث وجود بازه‌ای از نقاط روی محور حقیقی با راهنامهٔ یکسان می‌شود. برهان. قسمت اول را ثابت می‌کنیم. قسمت دوم به سرعت نتیجه می‌شود. فرض کنید $S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ و $S(y) = (t_0 t_1 t_2 \dots)$. از استقراء روی n ، که n اختلاف $S(x)$ و $S(y)$ است $S(x) \preceq S(y)$ استفاده می‌کنیم. اگر $n = 0$ ، از آنجاکه $1 < C < 0$ ، ترتیب، دقیقاً همان ترتیب خط حقیقی است و

حکم به وضوح برقرار است. سپس فرض می‌کنیم که نتیجه برای دنباله‌های با اختلاف $1 - n$ برقرار باشد و ما آن را برای اختلاف n ثابت می‌کنیم.
ابتدا f را روی x و y اثر می‌دهیم. با استفاده از تغییرجا داریم

$$S(f(x)) = (s_1 s_2 s_3 \dots),$$

$$S(f(y)) = (t_1 t_2 t_3 \dots).$$

سه حالت وجود دارد، s برابر با C یا 1 باشد. اگر $s = C$ یا 1 باشد. آنگاه از آنجاکه تعداد 1 ‌های قبل از اختلاف را تغییر نداده‌ایم، $S(f(x)) \prec S(f(y))$. با استقراء داریم $f(x) < f(y)$. ولی از آنجاکه f روی $[0, c]$ صعودی است، پس $y < x$. اگر $s = 1$ باشد، آنگاه یک عدد 1 کمتر در میان s_1, \dots, s_n موجود است نتیجه می‌شود $S(f(x)) \succ S(f(y))$. بنابراین با استقراء، $f(x) > f(y)$. ولی از آنجاکه f روی $[1, c]$ نزولی است، پس $y < x$. درنهایت اگر $s = C$ باشد، آنگاه نتیجه می‌شود $x = y = c$. \square
گوییم دنباله s برای f مجاز است، هرگاه $x \in I$ موجود باشد به‌طوری که $S(x) = s$. مجموعه همه دنباله‌های f -مجاز ممکن را با Σ_f نشان می‌دهیم. هدفمان یافتن روش‌هایی برای تعیین همه دنباله‌های f است. کلید این مسئله، دنباله آمیخته است. دنباله آمیخته، یک شرط لازم برای اینکه دنباله‌ای عضو Σ_f باشد به‌دست می‌دهد. از آنجاکه f ماکسیمم است، برای هر $x \in I$ و هر $n \geq 1$ باید داشته باشیم $f^n(x) \leq f(c)$. درنتیجه، اگر $s \in \Sigma_f$ باشد، آنگاه برای هر $n \geq 1$ $\sigma^n(s) \preceq K(f)$. این شرط همان‌طورکه در مثال زیر دیده می‌شود کاملاً کافی نیست.

مثال ۱۱.۱۸ فرض کنید $f(x) = F_4(1-x) = 4x(1-x)$. توجه کنید که $f(1) = 0$ و $f(0) = 0$. تنها پیش‌تصویر 1 است و تنها دنباله مجاز پیش‌تصویر $(1, 0, 0, 0, \dots)$ است. بنابراین دنباله‌هایی به‌صورت $(\dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ با $t = \sigma^n(t) = K(f)$ در ابتداء مجاز نیستند. اگرچه، برای $i \neq n$ ، $\sigma^i(t) \prec K(f)$ و

از دنباله آمیخته حداقل در بعضی از حالات خاص، برای یافتن یک شرط کافی استفاده می‌شود.

قضیه ۱۲.۱۸ فرض کنید f ، تک‌پیمانه‌ای بوده و c متناوب نباشد. اگر t دنباله‌ای باشد که برای هر $n \geq 1$ ، $\sigma^n(t) \prec K(f)$ باشد، آنگاه از آنجاکه $(\dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots)$ $S(x) = t$ موجود است که $S(x) = t$. یعنی، $t \in \Sigma_f$. برهان. اگر t برابر با $(\dots, 0, 0, 0, 0, 1)$ یا $(\dots, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$ باشد، آنگاه از آنجاکه $(\dots, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ $S(0) = 0$ و $S(1) = 1$ حکم به‌دست می‌آید. پس فرض می‌کنیم که t مخالف $(\dots, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ باشد. تعریف کنید

$$L_t = \{x \in I \mid S(x) \prec t\},$$

$$R_t = \{x \in I \mid S(x) \succ t\}.$$

در زیر نشان می دهیم که هر دوی L_t و R_t در I باز هستند. از آنچاکه $\circ \in L_t$ و $\circ \in R_t$ در I باز هستند. از آنچاکه $L_t \cap R_t = \emptyset$ ، نتیجه می شود که هر دوی L_t و R_t ناتهی هستند. این، حکم را به جز باز بودن مجموعه ها اثبات می کند.

فقط نشان می دهیم که L_t باز است؛ برهان برای R_t مشابه است. با مشاهده زیر شروع می کنیم. فرض کنید $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ و فرض کنید برای $s_i \neq C$ ، $i = 0, \dots, n$. مجموعه $\{x \in I \mid s_i(x) = s_i, i = 0, \dots, n\}$ در I باز است. در واقع، اگر $S(y) = s$ ، همسایگی های باز W_i از y موجودند به طوری که $f^i(W_i)$ و $f^i(y)$ در یک سمت از c قرار می گیرند. اشتراک این همسایگی ها یک همسایگی از y با خاصیت موردنظر به دست می دهد.

اکنون فرض کنید $z \in L_t$ و فرض کنید $t \prec (\dots)$. از آنچاکه $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ ، پس برای یک \circ و $s_{n+1} \neq t_n$ ، یعنی $s_n \neq t_n$. حال دو حالت وجود دارد: $t_n = C$ و $t_n \neq C$. اگر $t_n = C$ ، آنگاه نتیجه می شود که $\sigma^{n+1}(t) = K(f)$ که با فرض ما در تناقض است. پس باید $t_n \neq C$. فرض می کنیم $t_n = \circ$ ؛ حالت \circ مشابه است. اگر $s_n = \circ$ ، آنگاه دوباره مشاهدات اولیه را به کار می برمی که نشان دهیم L_t باز است.

پس تنها حالت باقیمانده ممکن این است که $s_n = C$ ، یعنی $K(f) = (s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, \dots)$ در این حالت، $\circ > \alpha$ موجود است به قسمی که $s_{n+\alpha} \neq t_{n+\alpha}$ ، چون در غیر این صورت باید $\sigma^{n+1}(t) = (s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, \dots) = K(f)$. از آنچاکه c متناوب نیست، باید برای هر $\circ > \alpha$ $s_{n+i} \neq C$ را همسایگی از z قرار دهید که اگر $x \in W$ ، آنگاه W را همسایگی از s_{n+i} دارد.

$$S(x) = (s_0 \dots s_{n-1} * s_{n+1} \dots s_{n+\alpha} \dots),$$

که * ممکن است \circ یا C باشد. یعنی، W شامل همه نقاطی است که راهنامه آنها با راهنامه z تا درایه $(n + \alpha)$ ام به جز احتمالاً در جایگاه n ام برابر باشد. پس W باز است. بهوضوح از $t \prec$ داریم

$$(s_0 \dots s_{n-1} * \dots) \preceq (s_0 \dots s_{n-1} t_n \dots) = (t_0 \dots t_{n-1} t_n \dots).$$

درنتیجه، اگر $x \in W$ ، آنگاه $t \prec S(x)$ و حکم به دست می آید. \square

ملاحظات.

۱. شرط $K(f) \prec \sigma^i(s)$ برای $1 \geq i \geq n$ را نمی توان به $\circ \geq i$ تغییر داد. بهوضوح برای هر دنباله t $t \succ (\dots)$ و $(\dots) \succ (\dots)$ و $(\dots) = (1000\dots)$ و $(100\dots) = (1\dots)$ و $(1) = (100\dots)$ دنیا این دنباله، مجاز است.

۲. این فرض که c متناوب نباشد قابل حذف است. اگرچه برای انجام دادن آن باید یک دنباله دیگر را مستثنی کنیم. فرض کنید $(\alpha_1 \dots \alpha_n C \alpha_1 \dots \alpha_n C \dots) = K(f)$. اگر تعداد زوج تا

۱ بین α_i ها وجود داشته باشد آنگاه دنباله $(\alpha_1 \dots \alpha_n \circ \alpha_1 \dots \alpha_n \circ \dots)$ کمتر از $K(f)$ است.
اگرچه،

$$\{x \mid S(x) = \alpha_1 \dots \alpha_n \circ \alpha_1 \dots \alpha_n \circ \dots\}$$

در I بسته نیست. این با نتایج برهان قضیه ۱۲.۱۸ در تناقض است. به عنوان مثال، توجه کنید که اگر $f(x) = F_7(1-x)$ ، آنگاه $K(f) = (CCC\dots, f(x))$. هر نقطه در $[0, c)$ دارای راهنامه $(\dots \circ \circ \circ)$ است، بنابراین

$$\{x \mid S(x) = (\circ \circ \circ \dots)\}$$

بسته نیست. درنتیجه باید مفروضات قضیه ۱۲.۱۸ را با فرض اینکه $\sigma^k(t) \prec (\alpha_1 \dots \alpha_n \circ \alpha_1 \dots \alpha_n \circ \dots)$ برای هر $k \geq 1$ ، تغییر دهیم. اگر تعداد α_i ها بین α_i فرد باشد، آنگاه باید فرض کنیم $(\alpha_1 \dots \alpha_n \circ \alpha_1 \dots \alpha_n \circ \dots) \prec \sigma^n(t)$. با این قید، قضیه ۱۲.۱۸ برای حالت c متناوب نیز برقرار است. جزئیات را به خواننده واگذار می کنیم (تمرین ۲ را ببینید).

تمرین.

۱. فرض کنید $F_\mu = \mu x(1-x)$. همه راهنامه های ممکن برای F_μ را در حالت های ۲ و ۳ فهرست کنید.

۲. قضیه ۱۲.۱۸ را برای حالتی که c متناوب است با درنظر گرفتن استثنایی که در ملاحظه ۲ بیان شد ثابت کنید.

۳. بازنگارش و نظریه آمیختگی. یادآوری می کنیم که در بخش قبل، بازنگارش Rf برای یک نگاشت تک پیمانه ای f را تعریف کردیم. Rf برای حالتی که f دارای نقطه ثابت p با $\circ < f'(p)$ است تعریف شده بود. قرار دهید $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots) \circ = K(f)$.

الف. نشان دهید که اگر Rf تعریف شده و تک پیمانه ای باشد، آنگاه $K(f) = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n+1})$. یعنی، برای هر n ، $\alpha_{n+1} = 1$.

ب. $\hat{\alpha}_j$ را \circ تعریف کنید هرگاه $\alpha_j = 1$ ، و 1 تعریف کنید هرگاه $\circ = \alpha_j$. بنابراین $\hat{\alpha}_j \neq \alpha_j$. نشان دهید $(\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_3 \dots) \circ = K(Rf)$.

بنابراین عملگر بازنگارش R روی یک مجموعه منظم با ضابطه $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots) = (\hat{\alpha}_2 \hat{\alpha}_4 \hat{\alpha}_6 \dots)$ تعریف می‌شود. به طور شهودی، این عملگر درایه‌های فرد هر دنباله را حذف کرده و درایه‌های زوج را تغییر می‌دهد.

ج. با فرض اینکه هر دوی Rf و R^2f ، تک‌پیمانه‌ای هستند، نشان دهید $\alpha_{4n+2} = \alpha_2 = \alpha_6 = \dots = 0$ ، یعنی، $\alpha_{4n+2} = 0$.

د. با فرض اینکه برای هر $i \leq n$ ، $R^i f$ تک‌پیمانه‌ای است، نشان دهید درایه‌های α_j برای $j = 2^i k + 1 \leq n$ تعیین می‌شوند.

ه. نتیجه بگیرید که همه درایه‌های $K(f)$ برای هر n با شرط تک‌پیمانه‌ای بودن $R^i f$ تعیین می‌شوند. $K(f)$ برابر چیست؟

حال فرض می‌کنیم $R^i f$ برای هر i ، تک‌پیمانه‌ای باشد. برای دنباله تکرارشونده $(s_0 \dots s_n \dots s_n \dots s_n \dots s_n \dots)$ از نماد کوتاهتر $(\overline{s_0 \dots s_n})$ استفاده می‌کنیم. دنباله‌های تکرار شونده خاصی را به صورت زیر تعریف می‌کیم.

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \overline{(1)} \\ \tau_1 &= \overline{(10)} \\ \tau_2 &= \overline{(1011)} \\ \tau_3 &= \overline{(10111010)}.\end{aligned}$$

به صورت استقرایی، τ_{j+1} از τ_j با دو برابر کردن τ_j و عوض کردن درایه آخر به دست می‌آید.

و. نشان دهید τ_j دارای تناوب 2^j است.

ز. نشان دهید اگر $0 \geq j$ ، آنگاه $\tau_j = R(\tau_{j+1})$.

ح. قرار دهید $\tau_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \tau_j$. یک دنباله تکرار شونده نیست. ثابت کنید $R(\tau_\infty) = \tau_\infty$. بنابراین τ_∞ یک " نقطه ثابت" برای عملگر بازنگارش روی دنباله‌هاست.

ط. ثابت کنید که اگر به ازای هر i ، $R^i f$ یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای باشد، آنگاه $\tau_\infty = K(f)$.

بنابراین مجموعه نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای که می‌توانند بی‌نهایت بار بازنگارش شوند اغلب اوقات دارای دنباله آمیخته مشترک τ_∞ هستند. در بخش بعد هنگام بحث روی شجره نامه نقاط تناوب دوباره به این دنباله و همچنین τ_j ها باز می‌گردیم.

۱۹ شجره‌نامه نقاط متناوب نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای

نظریه آمیختگی، ابزاری نیرومند برای مطالعه دینامیک نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای است. در این بخش، پیامدهای این نظریه را روی ساختار مجموعه نقاط متناوب نگاشت تک‌پیمانه‌ای بررسی می‌کنیم. اگر این نگاشت دارای مشتق شوارتسی منفی نیز باشد، آنگاه می‌بینیم که محدودیتهاي روی تعداد و نوع نقاط متناوب ممکن ایجاد می‌شود. به ویژه، جواب تقریباً کاملی به این سوال که قبلاً پرسیدیم ارائه می‌دهیم: چگونه نگاشتهای مانند نگاشت درجه دوم $(1 - x)F_\mu(x) = \mu x$ ، از دینامیک ساده به دینامیک آشوبناک تغییر وضعیت می‌دهند.

برخلاف نگاشت درجه دوم F_μ به ازای های بزرگ که برای هر راهنامه تکرارشونده، یک نقطه متناوب یکتا متناظر می‌شود، مسئله برای نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای در حالت کلی کاملاً متفاوت است. ممکن است چند نقطه متناوب دارای یک راهنامه باشند. برای مثال، برای $\mu < 1$ دارای دو نقطه ثابت است که هر دو دارای راهنامه $(\dots ۰۰\dots)$ هستند. علاوه بر آن، هنگامی که f دارای یک مدار متناوب جاذب باشد، معمولاً یک بازه کامل از نقاط موجود است که دارای یک راهنامه است، اگرچه همان‌طور که قضیه بعدی نشان می‌دهد، همیشه حداقل یک نقطه متناوب موجود است به‌طوری که به راهنامه تکرارشونده داده شده متناظر شده باشد.

قضیه ۱.۱۹ فرض کنید $s = (s_0 \dots s_{n-1} \dots s_n)$ یک دنباله تکرارشونده f -مجاز باشد که به ازای هر $i \geq 1$ در شرط $K(f) \prec \sigma^i(s)$ صدق کند، آنگاه یک نقطه ثابت p با تناوب n موجود است و هر نقطه متناوب به صورت $S(p) = s_{2n}$ است.

برهان. فرض می‌کنیم که $K(f)$ تکرارشونده نباشد. همانند برهان قضیه ۱۲.۱۸، به بحث خاصی برای حالت دنباله‌های مجاز نیاز است. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۱ را ببینید). از آنجاکه برای هر i ، $K(f) \prec \sigma^i(s)$ ، از قضیه ۱۲.۱۸ نتیجه می‌شود که

$$J = \{z \in I \mid S(z) = s\}$$

یک بازه بسته ناتهی در I است. توجه کنید از آنجاکه همه نقاط $(J)^f$ دارای راهنامه s هستند، داریم $.f^n(J) \subset J$

حال اگر J یک تک‌نقطه‌ای باشد، این نقطه متناوب بوده و دارای راهنامه مورد نظر است. اگر $J = [a, b]$ و $a \neq b$ ، آنگاه به صورت زیر بحث می‌کنیم. اگر $[a, b] \subset [x, x]$ ، آنگاه به ازای هر i ، $f^i(x) \neq c$ که از $K(f) \prec \sigma^{i+1}(s) = S(f^{i+1}(x))$ نتیجه می‌شود. بنابراین، به ازای هر $[a, b] \subset [x, x]$ ، $f^n(x) \neq f^{n'}(x)$. پس f^n روی بازه J ، یا صعودی است یا نزولی. علاوه بر آن، f^n نقاط انتهایی J را حفظ می‌کند. این مطلب از این نکته نتیجه می‌شود که اگر (a) متعلق به درون (J) باشد، آنگاه بازه باز N حول a با خواص زیر موجود است. اگر $x \in N$ ، آنگاه

$$1. \text{ برای هر } n, i < n \text{، } f^i(x) \neq c, i < n$$

$$2. f^n(x) \in J$$

درنتیجه، همه نقاط در N دارای راهنامه s بوده و J بزرگتر از $[a, b]$ خواهد شد که با فرض ما در تناقض است.

اگر f^n روی J صعودی باشد، نتیجه می‌شود که هر دوی a و b دارای تناوب n و راهنامه s هستند. اگر f^n نزولی باشد، واضح است که a و b دارای تناوب $2n$ بوده و $f^n(a) = b$ و $f^n(b) = a$. با استفاده از قضیه مقدار میانی، z ای بین a و b موجود است که $z = f^n(z)$ و برهان کامل می‌شود. \square

توجه کنید که این نتیجه با فرض ضعیف‌تر $(f \preceq K(f)) \sigma^i(s) \preceq S(z) = s$ نیز برقرار است. دراین حالت $\{z \in I | S(z) = s\}$ لزوماً یک مجموعه بسته نیست. همچنین حالت نقاط متناوب با تناوب $2n$ که راهنامه آن با تناوب n تکرار می‌شود نیز اتفاق می‌افتد. در واقع، در خانواده توابع درجه دو، بلافاصله پس از اولین تناوب دوباره ساز، هر دو نقطه با تناوب ۲ نزدیک نقطه ثابتی قرار می‌گیرند که آنها را تولید کرده درنتیجه راهنامه هر دوی آنها ($\dots 111$) است.

اگر ما فرض کنیم نگاشت تک‌پیمانه‌ای مشتق شوارتسی منفی دارد، آنگاه محدودیتی جدی روی تعداد نقاط متناوب با راهنامه یکسان ایجاد می‌شود.

نتیجه ۲.۱۹ فرض کنید $Sf < f$. فرض کنید s یک دنباله ناصرف تکرار شونده با تناوب n باشد که بهارای هر i ، $\sigma^i(s) \preceq K(f)$. آنگاه حداقل ۲ مدار متناوب با راهنامه s موجود است.

برهان. با توجه به قضیه قبل، هر نقطه متناوب با راهنامه s ، نقطه ثابت f^{2n} است. بنابراین فرض می‌کنیم که سه مدار متناوب متمایز با راهنامه s موجود است. برای سادگی، فرض می‌کنیم که هریک از مدارها دارای تناوب n باشند. حالت کلی تر به صورت مشابه بررسی می‌شوند (تمرین ۲ را ببینید).

فرض کنید $x_2 < x_1 < x_2$ سه نقطه ثابت پشت سر هم برای f^n بوده و دارای راهنامه یکسان باشند. از آنجاکه با توجه به ترتیب ما، همه نقاط این بازه باید دارای راهنامه s باشند، f^n نمی‌تواند در $[x_1, x_2]$ دارای نقاط بحرانی باشد. با توجه به قضیه ۳.۱۱، $Sf^n < f$. اگر دو تا از x_i ‌ها جاذب باشند (حتی جاذب ضعیف یک طرفه)، آنگاه برهان قضیه ۴.۱۱ نشان می‌دهید که آنها یا باید جذب یک نقطه بحرانی f شوند یا باید دارای بینهایت پنهانه جذب باشند. حالت دوم نمی‌تواند اتفاق بیفتد چون $1 < x_i < 1$ و هیچ کدام از 1 یا 1 در پنهانه جذب قرار نمی‌گیرند. ولی هر دوی این نقاط باید به یک نقطه بحرانی f جذب شوند که با توجه به تک‌پیمانه‌ای بودن f ناممکن است.

تنها حالت ممکن دیگر این است که یکی از x_i ‌ها جاذب باشند (از هردو جهت). بهوضوح، این نقطه باید x_2 باشد. دراین صورت، (f^n) دارای یک مینیمم نسبی مثبت بین x_1 و x_3 است. این با لم \square ۵.۱۱ در تناقض بوده و نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۳.۱۹ فرض کنید $s = (s_0 \dots s_{n-1} \overline{s_n \dots s_{n-1}})$. فرض کنید $Sf < \sigma^i(s)$ یک دنباله تکرار شونده منظم،

$$I_{n-1}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i$$

یک عدد فرد و برای هر i ، $K(f^i)(s) \leq \sigma^i(s)$ باشد. در این صورت

۱. یک نقطه متناوب و یکتاًی s برای f با تناوب n و راهنامه s موجود است.

۲. اگر علاوه بر آن برای یک i ، $-1 < K(f^n)'(z_s) = \sigma^i(s)$ و $\sigma^i(s) < (f^n)'(x)$ ، آنگاه یک جفت از نقاط متناوب با تناوب $2n$ برای f با راهنامه s موجود است.

برهان. برای قسمت ۱، فرض می‌کنیم که x یک نقطه متناوب با تناوب n و راهنامه s باشد. از آنجاکه $\sum_{i=0}^{n-1} s_i$ فرد است، نتیجه می‌شود که $< (x)^{(f^n)'}(x)$. بنابراین f دارای دونقطه متناوب با راهنامه s است که هر دوی آنها نمی‌توانند تناوب n داشته باشند. این برهان قسمت اول را کامل می‌کند؛ قسمت دوم به خواننده واگذار می‌شود (تمرین ۳ را ببیند). \square

یک مثال خوب برای این نتیجه، نگاشت درجه دوم F_μ است. برای $\mu < 2 < \mu$ ، این نگاشت دارای ۲ نقطه ثابت بوده که هر دو دارای راهنامه $(\dots 0 0 0)$ هستند. در $\mu = 2$ ، یکی از این نقاط ثابت به نقطه بحرانی تبدیل می‌شود. بنابراین برای $\mu < 2 < \mu$ ، این نقطه ثابت، دارای مشتق منفی بوده و دارای راهنامه متفاوت $(\dots 1 1 1)$ است. با افزایش μ به 3 ، یک انشعاب دوره-دو برابر ساز اتفاق می‌افتد. همان‌گونه که در بالا اشاره کردیم، درست پس از $\mu = 3$ ، مدار جدید با تناوب دو، دارای راهنامه $(\dots 1 1 1)$ می‌شود.

حال به این سوال باز می‌گرددیم که یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای چگونه از تعداد متناهی نقطه متناوب به بی‌نهایت نقطه متناوب مجرراً تغییر می‌کند. برای پاسخ به این سوال، نتایج قبلی درمورد نظریه انشعاب (بخش ۱۲.۱) و مشتق شوارتسی منفی (بخش ۱۱.۱) را با نظریه آمیختگی ترکیب می‌کنیم. جواب، یک تصویر تقریباً کامل توبولوژیکی یا کیفی از تبدیل وضعیت یک سیستم دینامیکی ساده به یک سیستم دینامیکی پیچیده به دست می‌دهد.

فعلاً با ساختار نقاط متناوب نگاشت تک‌پیمانه‌ای ثابت f کار می‌کنیم. بعداً به خانواده چنین نگاشتهایی باز می‌گرددیم. همچنان که ما با راهنامه‌های تکرار شونده منظم در این بخش کار می‌کنیم "دُم" راهنامه‌ها را نادیده گرفته و فقط با یک دنباله متناهی از 0 ‌ها و 1 ‌ها کار می‌کنیم. این بدین معنی است که $(s_n \dots s_1)$ نمایانگر راهنامه تکرار شونده نامتناهی $(s_0 \dots s_n \overline{s_n \dots s_1})$ است.

تعریف ۴.۱۹ فرض کنید s یک راهنامه تکرار شونده باشد. فرض کنید $M(s)$ دنباله ماکسیمال در مدار s باشد، یعنی، $\sigma^j(s) = M(s)$ که در آن بهارای هر i ، $(s^i) \succeq \sigma^j(s)$.

به چند نمادگذاری نیاز داریم. فرض کنید $t = (t_0 \dots t_k)$ و $s = (s_0 \dots s_n)$ دنباله‌های تکرار شونده باشند. الحاق این دو دنباله را با $s \cdot t = (s_0 \dots s_n t_0 \dots t_k)$ نمایش می‌دهیم. همچنین می‌نویسیم $\hat{s}_n = (s_{n-1} \dots s_0)$ که در اینجا $\hat{s}_n = 1$ است. اگر $s_n = 0$ باشد و $\hat{s}_n = 0$ باشد، آن‌ها را در اینجا 1 نمایش می‌دهیم. همان دنباله s است به جز اینکه درایه آخر آن تغییر کرده است.

ما چند دنباله تکرار شونده خاص را در نظر می‌گیریم. تعریف کنید

$$\begin{aligned}\tau_0 &= (1) \\ \tau_1 &= (10) \\ \tau_2 &= (1011) \\ \tau_3 &= (10111010)\end{aligned}$$

و با استقراراً،

$$\tau_{j+1} = \tau_j \cdot \hat{\tau}_j.$$

درنهایت قرار دهید

$$\begin{aligned}\tau_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n \\ &= (10111010 10111011 \dots).\end{aligned}$$

توجه کنید که τ_∞ یک دنباله غیرتکرار شونده است.

قضیه ۵.۱۹

۱. τ_j دارای تناوب اولیه 2^j است.

۲. τ_j دارای تعداد فرد از 1 هاست.

۳. $\tau_0 \prec \tau_1 \prec \tau_2 \prec \dots$

برهان. برهان قسمتهای ۱ و ۲ سرراست است تمرین ۳.۱۸ را ببینید. برای ۳، می‌نویسیم

$$\tau_j = (s_0 \dots s_\alpha v).$$

اگر $v = \nu$ ، آنگاه طبق ۲، تعدادی زوج از 1 ‌ها در (s_0, \dots, s_α) موجود است. درنتیجه،

$$\tau_j \succ \hat{\tau}_j = \tau_{j-1} \cdot \tau_{j-1} = \tau_{j-1}.$$

اگر $v = \nu$ باشد به صورت مشابه می‌توان بحث کرد.
 τ_j ‌ها نقش ویژه‌ای در تغییر وضعیت آشوب بازی می‌کنند؛ آنها همیشه اولین مدارهای متناوبی هستند که در هر خانواده از نگاشتهای تکپیمانه‌ای ظاهر می‌شوند.

قضیه ۶.۱۹ $M(\tau_j) = \tau_j$

برهان. از استقراء روی j استفاده می‌کنیم. حالت‌های $j = 0$ و $j = 1$ واضح هستند. فرض می‌کنیم برای $1 \leq i < 2^{j-1}$. $M(\tau_i) = \tau_i$, $i = 0, 1, \dots, j-1$ ،

$$\hat{\tau}_j = \tau_{j-1} \cdot \tau_{j-1} = M(\tau_{j-1}) = \tau_{j-1} \prec \tau_j.$$

اکنون فرض می‌کنیم برای $1 \leq i < 2^{j-1}$. آنگاه

$$\sigma^i(\tau_j) = \sigma^i(\tau_{j-1}) \cdot \sigma^i(\hat{\tau}_{j-1}) \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1} = \tau_j.$$

به صورت مشابه، اگر $2^j < i < 2^{j-1} + 1$ داریم

$$\sigma^i(\tau_j) = \sigma^\ell(\hat{\tau}_{j-1}) \cdot \sigma^\ell(\tau_{j-1}) \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1} = \tau_j$$

که از رابطه زیر نتیجه می‌شود

$$M(\hat{\tau}_{j-1}) = M(\tau_{j-2}) = \tau_{j-2} \prec \tau_{j-1}.$$

درنهایت، اگر $2^{j-1} + i$ از $\tau_{j-1} \prec \hat{\tau}_{j-1}$ نتیجه می‌شود

$$\sigma^i(\tau_j) = \hat{\tau}_{j-1} \cdot \tau_{j-1} \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1}.$$

□

قضیه بعدی نشان می‌دهد که نقاط متناوب با راهنامه τ_j قبل از نقاط متناوب با راهنامه‌های دیگر برای یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای اتفاق می‌افتد.

قضیه ۷.۱۹ فرض کنید t یک دنباله تکرار شونده منظم مخالف صفر یا مخالف τ_j به ازای هر زای باشد. در این صورت $\tau_j \succ t$.

برهان. از آنجاکه $(\circ) \neq t$ یا $t = (\circ)$ است، نتیجه می‌شود که $i \geq 0$ موجود است به‌طوری‌که

$$\sigma^i(t) = (\circ \circ \dots) \succ (\circ) = \tau_0.$$

بنابراین، $\tau_0 \succ M(t)$ فرض کنید

$$\tau_{j-1} \prec M(t) \prec \tau_j.$$

داریم

$$\tau_{j-1} = \tau_{j-1} \cdot \tau_{j-1} \prec M(t) \prec \tau_{j-1} \cdot \hat{\tau}_{j-1}.$$

از آنجاکه تنها اختلاف در دنباله‌های بالا در جایگاه τ_2 ام اتفاق می‌افتد، نتیجه می‌شود که $M(t) = \tau_j$ یا $M(t) = \tau_{j-1}$. این با فرض در تناقض بوده و برهان را کامل می‌کند. \square

اکنون به مفروضاتمان از خانواده‌ای از نگاشتهای f_λ یعنی نگاشتهایی که به طور هموار به پارامتر λ وابسته‌اند باز می‌گردیم. این بدین معنی است که نگاشت $G(x, \lambda) = f_\lambda(x)$ نسبت به هر دو متغیر، C^∞ است.

تعریف ۸.۱۹ فرض کنید f_λ خانواده‌ای از نگاشتهای تک‌پیمانه‌ای با $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$ باشد. یک خانواده تغییر وضعیت نامیده می‌شود هرگاه

$$1. \text{ بهار} \circ \text{ای هر } f_\lambda(x) \equiv 0, x \in I$$

$$2. \text{ اگر } \lambda = \lambda_1, \text{ آنگاه } K(f_\lambda) = (100 \circ \dots \circ 0)$$

$$3. \text{ برای هر } \lambda > \lambda_2, Sf_\lambda < 0$$

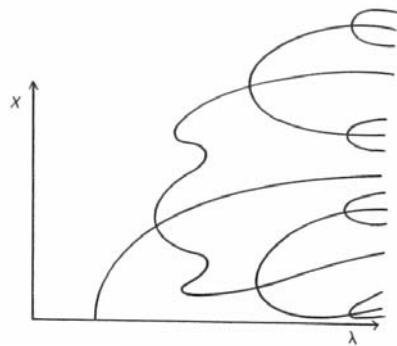
ملاحظات.

۱. بعضی از نویسنده‌ها، خانواده‌های تغییر وضعیت را خانواده‌های تمام می‌نامند.
۲. شرط ۱ را می‌توان تعدیل کرد؛ آنچه واقعاً نیاز داریم این است که $K(f_\lambda) = (0 \circ \dots \circ 0)$.

مثال ۹.۱۹ خانواده درجه دوم $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ یک خانواده تغییر وضعیت تشکیل می‌دهد. همچنین، $S_\lambda(x) = \lambda \sin(\pi x)$ یک خانواده تغییر وضعیت تشکیل می‌دهد.

شرایط ۱ و ۲ در بالا تضمین می‌کنند که یک خانواده تغییر وضعیت با افزایش λ از نظر دینامیکی پیچیده‌تر می‌شود؛ حالت $\lambda = 0$ هیچ دینامیکی ندارد در صورتی که f_λ دارای حداقل یک نقطه متناوب، متناظر با هر راهنامهٔ تکرارشونده منظم است. جمله اخیر بلافاصله از قضیه ۱.۱۹ و نظریه آمیختگی از بخش ۱۷.۱ به دست می‌آید. یافته‌های قبلی ما نتایج بیشتری را به دنبال دارد. برای هر j ، تا زمانی که $\tau_j \subset K(f_\lambda)$ ، یک نقطه متناوب یکتا با تناوب γ_j در بازه $[1, 0]$ و راهنامهٔ τ_j موجود است. این نقطه را با (λ_j) نمایش می‌دهیم. توجه کنید از آنجاکه

$$(f^{2^j})'(\gamma_j(\lambda)) < 0,$$



شکل ۱.۱۹. یک نمودار انشعاب ممکن برای یک خانواده تغییر وضعیت.

نظریه انشعاب از بخش ۱۲.۱ تضمین می‌کند که $(\lambda_j \gamma_j)$ به طور پیوسته به λ وابسته است. اگر ما نمودار انشعاب را برای خانواده f_λ رسم کنیم، نتیجه می‌شود که $(\lambda_j \gamma_j)$ باید روی یک منحنی پیوسته در صفحه $x\lambda$ قرار بگیرد.

دامنه تعریف γ_j را می‌توان گسترش داد. اگر $\tau_j = K(f_\lambda)$ و

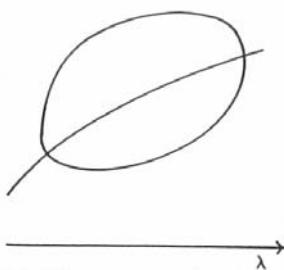
$$(f^{2^j})'(\gamma_j) < -1,$$

آنگاه یک نقطه متناوب یکتا با تناوب 2^{j+1} و راهنماء τ_j برایتابع f وجود دارد. نتیجه ۳.۱۹ را بیینید. بزرگ‌ترین این نقاط را با $(\lambda_{j+1} \gamma_{j+1})$ نمایش می‌دهیم. بنابراین $(\lambda_{j+1} \gamma_{j+1})$ برای همه λ ‌هایی که $K(f_\lambda)$ و $-1 < (f_\lambda^{2^j})'(\gamma_j)$ تعریف شده است. از آنجاکه برای همه λ ‌ها، $1 \neq (\gamma_{j+1})'$ (تمرین ۴)، نتیجه می‌شود که $(\lambda_{j+1} \gamma_{j+1})$ نیز برای این مقادیر λ پیوسته است.

ملاحظه. یک دنباله آمیخته میانی v بین $\tau_j \hat{\tau}_j$ و $\tau_{j+1} \hat{\tau}_{j+1}$ موجود است به طوری که آخرین درایه آن C است. یعنی، اگر $K(f_\lambda) = v$ ، آنگاه نقطه بحرانی، متناوب با تناوب 2^{j+1} است. اگر برای $v = K(f_\lambda)$ تعریف کیم $(c) = f_\lambda(\lambda_{j+1} \gamma_{j+1})$ نیز در آن پیوسته است (تمرین ۵).

درنهایت، توجه می‌کنیم که با میل کردن λ به مقداری که در آن $1 = (f_\lambda^{2^j})'(\gamma_j)$ ، داریم $(\lambda_{j+1} \gamma_{j+1}) \rightarrow (\lambda) \gamma_j$. یعنی، برای این مقدار λ ، γ_j دارای یک انشعاب دوره-دوبرابر ساز می‌شود (تمرین ۶). بنابراین نمودار انشعاب f_λ باید حداقل به پیچیدگی شکل ۱.۱۹ باشد.

پس می‌بینیم که یک خانواده تغییر وضعیت تقریباً انتخابی ندارد و باید به دینامیک آشوبناک گذر کند. چنین خانواده‌ای باید حداقل تا زمانی که نامتناهی نقطه متناوب متولد شود، مسیر دوره-دوبرابر ساز را دنبال کند. بنابراین تصویر کیفی که از بازه‌جاری در بخش ۱۷.۱ توصیف کردیم حداقل از نظر



شکل ۲.۱۹. تولد و مرگ یک نقطه ثابت هنگام افزایش λ در یک خانواده تغییر وضعیت.

کیفی صحیح است.

ملاحظه. مفروضات ما تولد و مرگ متعاقب یکی از نقاط متناوب را از بین نمی‌برد. چنین چیزی هنگامی اتفاق می‌افتد که دنباله آمیخته f_m ، ابتدا افزایش، سپس کاهش و درنهایت دوباره افزایش یابد. نمودار انشعاب حاصل، در شکل ۲.۱۹ رسم شده است. نتایج اخیر نشان می‌دهد که این مشکلات در خانواده توابع درجه دوم $(x - 1)F_\mu(x) = \mu x$ اتفاق نمی‌افتد.

این تنها شروع یک داستان طولانی و پرجزئیات است. در یک خانواده انتقال، تعداد بسیار بیشتری نقاط متناوب در کنار زیهایی که در مرور دشان بحث کردیم وجود دارد. هرچند، سازوکار چگونگی تولید این دسته دیگر از نقاط متناوب، مشابه چیزی است که در بالا توضیح داده شده است. می‌توان به طور کامل "شجره‌نامه" هر نقطه متناوب را در خانواده تغییر وضعیت توصیف کرد؛ اینکه کجا "متولد" شده‌اند، کدام دنباله‌ها، "اجداد" (دوره‌دو برابر ساز) آنها و چه دنباله‌هایی "فرزندان" آنها هستند. ما این نکات را به عنوان تمرین (تمرینهای ۹-۱۳) واگذار می‌کنیم ولی آنها را به عنوان ربط دهنده بسیاری از ایده‌ها در باقیمانده این فصل به خواننده توصیه می‌کنیم.

به طور خلاصه، یک جفت مدار متناوب در یک انشعاب زینی-گره‌ای پدید می‌آید. البته ممکن است این انشعاب تبھگون باشد ولی حداقل دو مدار متناوب تولید می‌شود. یکی از این مدارها نهایتاً دفع با مشتق بزرگ‌تر از ۱ می‌شود. مدار دیگر جاذب می‌شود و درنهایت دارای مشتق منفی می‌شود. بنابراین، داستان دوره-دو برابر ساز مشخص می‌شود. نامتناهی مدار همانند زیهای به صورت پی در پی انشعاب می‌یابند و تا آنجا ادامه می‌دهند که خانواده تغییر وضعیت به مرحله‌ای برسد که با یک تغییرجا، مزدوج توبولوژیکی شود.

تمرین.

۱. برای حالتی که $K(f)$ تکرار‌شونده است، قضیه ۱.۱۹ را اثبات کنید. همچنین نشان دهید که اگر دنباله آمیخته یک نگاشت تک‌پیمانه‌ای f ، تکرار‌شونده باشد، آنگاه یک نقطه متناوب برای f که راهنامه آن دنباله آمیخته است وجود دارد.

۲. نتیجه ۱.۱۹ را برای حالتی که فرض شود دو تا از سه مدار متناوب دارای تناوب $2n$ هستند، ثابت کنید.

۳. فرض کنید z_s متناوب با تناوب n و راهنامه s باشد. فرض کنید $-1 < (z_s)'(f)$ و $s = K(f)$. ثابت کنید که یک جفت از نقاط متناوب با تناوب $2n$ و راهنامه s برای f وجود دارد.

در سه تمرین بعدی، فرض کنید که f_λ یک خانواده تغییر وضعیت از نگاشتهاست.

۴. فرض کنید $\tau_j = f_\lambda(\gamma_j) - 1 < (f^{2^j})'(\gamma_j)$. با توجه به نتایج این بخش، نقطه متناوب $\gamma_{j+1}(\lambda)$ موجود است. ثابت کنید

$$(f^{2^{j+1}})'(\gamma_{j+1}) \neq 1.$$

۵. ثابت کنید $(\lambda)_{j+1}$ برای همه مقادیر λ که $f_\lambda(c) = f_\lambda(\gamma_{j+1}(\lambda))$ پیوسته است.

۶. نشان دهید با میل کردن λ به مقداری که در آن $1 - (f^{2^j})'(\gamma_j) = \gamma_{j+1}(\lambda)$ باشد، $\gamma_j(\lambda)$ میل می‌کند.

تمرینهای بعدی "شجره‌نامه" هر نقطه متناوب در یک خانواده تغییر وضعیت را با توضیح اینکه چطور نقطه متناوب "متولد" شده است و چه دنباله‌هایی به آن "مریبوط" می‌شود، توصیف می‌کند.

۷. فرض کنید $(s_1 \dots s_n) = s$ یک دنباله تکرار‌شونده منظم با تناوب n باشد. نشان دهید یک منحنی پیوسته $\gamma_s(\lambda)$ برای $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_s$ موجود است به‌طوری‌که $\gamma_s(\lambda) = f_\lambda^n(\gamma_s(\lambda))$ و $S(\gamma_s(\lambda_1)) = s$

۸. نشان دهید $\gamma_s(\lambda)$ می‌تواند به یک نقطه s که در آن

$$(f_{\lambda_s}^n)'(\gamma_s(\lambda_s)) = 1$$

گسترش یابد. مقدار پارامتر λ_s ، " محل تولد" s نامیده می‌شود. اکنون فرض می‌کنیم $\sum_{i=1}^n s_i = M(s)$ و $M(s) = s$.

۹. ثابت کنید که اگر $s = u\hat{u}$ باشد، آنگاه

الف. $\hat{u} \succ u$.

ب. (λ_s) در یک انشعاب دوره-دو برابر ساز در $\lambda_s = \lambda$ برای خانواده (λ) γ_{λ} متولد می‌شود.

ج. فرض کنید $\hat{u}u = t$. نشان دهید $\gamma_t(\lambda) = \gamma_s(\lambda_s)$ و t و s به هم مربوط هستند. دنباله u ، "جد" s و t نامیده می‌شود. به طور مشابه، s و t "فرزندان" u هستند.

۱۰. با استفاده از نمادهای تمرین قبل،

الف. نشان دهید اگر s برای هیچ دنباله u ای به صورت $u\hat{u}$ نباشد، آنگاه (λ_s) در $\lambda_s = \lambda$ در یک انشعاب زینی-گرهای متولد شده است.

ب. فرض کنید $\hat{s} = t$. نشان دهید

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s} \gamma_t(\lambda) = \gamma_s(\lambda_s).$$

بنابراین \hat{s} از طریق انشعاب به s مربوط است.

۱۱. شش مدار با تناوب حداکثر ۵ را فهرست کنید. کدام یک از این مدارها به هم مربوط هستند؟

۱۲. نشان دهید ۹ مدار با تناوب اولیه ۶ موجود است. کدام یک از این مدارها در یک زینی-گرهای و کدام یک در دوره-دو برابر ساز متولد شده‌اند؟

۱۳. نشان دهید ۲۰ مدار با تناوب اولیه ۸ موجود است. آنهایی را که از طریق دوره-دو برابر ساز با دنباله (۱) مرتبط هستند مشخص کنید. چه دنباله‌های دیگری از دوره-دو برابر ساز پدید می‌آید؟

تمرینهای زیر به خانواده نگاشتهای خیمه به فرم

$$T_\mu(x) = \begin{cases} \mu x & 0 \leq x \leq \frac{1}{\mu}, \\ \mu(1-x) & \frac{1}{\mu} < x \leq 1. \end{cases}$$

مربوط می‌شوند.

۱۴. نشان دهید T_μ دارای یک نقطه ثابت یکتاست و برای $1 < \mu < 0$ هیچ نقطه متناوب دیگری ندارد. ثابت کنید اگر $1 < \mu$ ، T_μ برای هر ز دارای نقاط متناوبی با تناوب j است.

۱۵. نگاشت $T_{\sqrt{2}}$ مفروض است. نشان دهید ” نقطه بحرانی ” $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ درنهایت نقطه ثابتی برای این نگاشت می‌شود. ثابت کنید یک زیربازه از $[1, 0]$ موجود است که روی آن $T_{\sqrt{2}}$ با T_2 مزدوج توپولوژیکی است.
۱۶. نشان دهید $T_{\sqrt{2}}$ برای هر $k > 0$ دارای نقاط متناوبی با تناوب $2k$ است ولی نقطه متناوبی با تناوب فرد بزرگ‌تر از ۱ ندارد.
۱۷. نشان دهید اگر $\sqrt{2} < \mu$ ، آنگاه T_μ دارای یک نقطه متناوب با تناوب ۳ است و بنابراین دارای نقاط متناوب از هر تناوبی است.
۱۸. نشان دهید بازه‌ای موجود است که $T_{\sqrt{2}}$ روی آن آشوبناک است.

برای مطالعه بیشتر:

تعدادی کتاب پیشرفت‌های دینامیکی که مباحث ارائه شده در اینجا را کامل می‌کند موجود است. این کتابها همچنین مراجع خوبی برای مقاله‌های تحقیقاتی هستند. بعضی از آنها عبارتند از:

- Collet, P. and Eckmann, J.-P. *Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser, Boston, 1980.

این کتاب به نظریه آمیختگی، عمیق‌تر از آنچه ما دیدیم می‌پردازد. روی نظریه بازنگاری تأکید کرده و کارهای فایگن باوم^{۱۶} را در این زمینه بررسی می‌کند. همچنین کارهای افرادی چون گوکن‌هایمر، میسیورویچ، جانکر^{۱۷}، رند^{۱۸} و بقیه را که هدف‌شان طبقه‌بندی نگاشتهای یک‌بعدی است خلاصه می‌کند.

- Guckenheimer, J. and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.

همان‌طورکه عنوان این کتاب مشخص می‌کند، هدف آن گستره‌تر از فصل یک است. اساساً برای دانشجویان دوره کارشناسی ارشد نوشته شده است و روی سیستم‌های دینامیکی پیوسته (میدانهای

Feigenbaum^{۱۶}

Jonker^{۱۷}

Rand^{۱۸}

برداری) و کاربردهای آنها تأکید دارد. در رهیافت ما هم پوشانی قابل توجهی بین انشعاب، نگاشتهای روی دایره و نظریه آمیختگی وجود دارد ولی این کتاب برای یک درس پیشرفته در درس سیستم‌های دینامیکی مناسب است.

ما در این فصل روی سیستم‌های دینامیکی گسته تأکید داشتیم اگرچه بسیاری از سیستم‌های دینامیکی در عمل سیستم‌های پیوسته هستند مانند میدانهای برداری و معادلات دیفرانسیل معمولی. کتابهای بعدی، به معرفی این سیستم‌ها می‌پردازد که داشتن مهارت خوب در سیستم‌های دینامیکی گسته، مطالعه آنها را بسیار ساده‌تر می‌کند. هر دو کتاب، برای دانشجویان کارشناسی و کارشناسی ارشد سیستم‌های دینامیکی مناسب هستند.

- Hirsch, M.W. and Smale, S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.
- Arnol'd, V.I. *Ordinary Differential Equations*. M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1973.

یکی از مطالب مهمی که ما در این فصل حذف کردیم نظریه ارگودیک نگاشتهای یک بعدی است. معرفی موضوعات مختلف در این زمینه در کتاب زیر موجود است.

- Sinai, J.G. *Introduction to Ergodic Theory*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.

یک رهیافت تصویری جالب به سیستم‌های دینامیکی در کتاب زیر موجود است:

- Abraham, R. and Shaw, C. *Dynamics: The Geometry of Behavior. Part One: Periodic Behavior. Part Two: Chaotic Behavior. Part Three: Global Behavior. Part Four: Bifurcation Behavior*. Aerial Press, Santa Cruz, Calif., 1982.

فصل ۲

دینامیک ابعاد بالاتر

در این فصل به بررسی پدیده‌هایی در طبیعت می‌پردازیم که دارای بعد بالاتری هستند. با توجه به اینکه هدف ما بیان مطالب به ساده‌ترین شکل ممکن است، فقط دینامیک دو بعدی و سه بعدی را بررسی می‌کنیم. البته دینامیک ابعاد بالاتر نیز مهم هستند ولی در حال حاضر تعداد نسبتاً کمی از پدیده‌های دینامیکی در ابعاد چهار یا بالاتر موجود است که در ابعاد دو یا سه قابل بیان نیست. اکثر مطالبی که مطرح می‌کنیم به راحتی به ابعاد بالاتر نیز تعمیم پیدا می‌کنند.

یکی از مهم‌ترین تفاوت‌های سیستم‌های با ابعاد بالاتر با آنچه در فصل قبل بررسی کردیم، امکان وجود همزمان انبساط و انقباض روی یک مجموعه پایاست. این موضوع را با سه مثال مهم که دینامیک آنها اکثر این فصل را پوشش می‌دهد بیان می‌کنیم. این مثال‌ها، نگاشت نعل اسب، خودریختی‌های چنبره هذلولوی و ریانیده‌ها هستند. هریک از این نگاشتها، بیانگر پدیده‌ای متفاوت در ابعاد بالاتر هستند ولی خواص اساسی مشترکی نیز دارند. نگاشت نعل اسب بعد بالاتر متناظر با نگاشت درجه دو (برای مقادیر بزرگ μ) است که در فصل یک بیشترین توجه را به آن داشتیم. می‌بینیم که وجود هر دو جهت انقباض و انبساط برای همانتابع مشکلی جدی اضافه نمی‌کند؛ با تغییر کوچکی در دینامیک نمادین فصل اول، می‌توانیم این دسته از سیستم‌ها را به طور کامل تحلیل کنیم.

خودریختی‌های چنبره هذلولوی کاملاً متفاوت هستند. آنها همه جا آشوبناک هستند. همچنین انبساط و انقباض در هر نقطه از فضا و نه فقط روی یک مجموعه کانتور اتفاق می‌افتد. برای بررسی این وضعیت، دسته دیگری از سیستم‌های دینامیکی را که توسط افزارهای مارکوف تولید می‌شود معرفی می‌کنیم.

درنهایت جاذبهای صورت دیگری از دینامیک بعد بالاتر را نمایش می‌دهند. یک جاذب، اصولاً

مجموعه‌ای است که نقاط دیگر تحت تکرار به آن جذب می‌شوند. همان‌طور که بعداً می‌بینیم، دینامیک جاذبه‌ها ممکن است کاملاً آشوبناک باشد به طوری که تکرارهای تقریباً هر نقطه درنهایت یک رفتار تصادفی خواهد داشت. با استفاده از خمینه شاخه‌ای که توسط ویلیامز ساخته شد، می‌توانیم این وضعیت را به صورت رضایت‌بخشی توصیف کنیم.

برخی از مباحث فصل اول با کمی تغییر در این فصل آورده شده است. برای مثال، دسته جدیدی از انشعاب که در بعد بالاتر اتفاق می‌افتد، به نام انشعاب هاف معرفی می‌شود. این انشعاب زمانی رخ می‌دهد که مشتق در یک نقطه ثابت، دوران باشد یعنی مقدار آن، عددی مختلط با قدر مطلق یک شود.

همان‌طور که در بالا اشاره شد، مهم‌ترین تفاوت بین بعد یک و ابعاد بالاتر امکان اتفاق افتادن هر دوی انبساط و انقباض در یک نقطه برای ابعاد بالاست. این مطلب را در بخش ۲.۲ با معرفی مجموعه‌های پایدار و ناپایدار برای نگاشتهای خطی توضیح می‌دهیم. هریک از سه مثال اصلی، دارای مجموعه‌های پایدار و ناپایدار در هر نقطه هستند. بنابراین این مجموعه‌ها، پایه‌ای برای مبحث عمومی‌تر خمینه‌های پایدار و ناپایدار هستند که در بخش ۶.۲ به آنها پرداخته می‌شود. درنهایت، در بخش ۹.۲، اکثر این ایده‌ها را در یک بخش که تقریباً همه آن از تمرین تشکیل شده است، یکی می‌کنیم. همه این تمرینها با یک خانواده از نگاشتها روی صفحه به نام نگاشت هنون^۱ سروکار دارند. همان‌طور که بعداً می‌بینیم، این خانواده تعمیم طبیعی خانواده نگاشتهای درجه دو است که در فصل قبل نقش برجسته‌ای داشتند.

در این فصل فرض می‌کنیم دانشجو اطلاعات پیش‌زمینه پیشرفته‌تری را نسبت به فصل قبل دارد. مهم‌ترین ملزومات، جبرخطی است. فرض ما براین است که خواننده با مباحثی چون تبدیلات خطی، ماتریسها، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آشنایی دارد. وقتی که روی ابعاد دو و سه کارمی کنیم یک مبحث مقدماتی در جبرخطی که روی این ابعاد تکیه دارد کافی است. همچنین ما از بعضی از مباحث از حسابان چند بعدی استفاده می‌کنیم. بیشتر آنها در بخش بعدی مرور می‌شوند.

۱ پیش‌نیازهایی از آنالیز مختلط و حسابان

برای مطالعه سیستم‌های دینامیکی با ابعاد بالاتر، مسئله بسیار مهم، روش‌هایی از جبرخطی است. در اینجا چند روش استاندارد و چند مبحث پیشرفته‌تر را مرور می‌کنیم و پس از آن، به حساب چند بعدی می‌پردازیم.

فضای \mathbb{R}^n بعدی اقلیدسی را با \mathbb{R}^n نمایش می‌دهیم. اعضای \mathbb{R}^n بردارهایی هستند که آنها را

Hénon^۱

به صورت سه‌تایی

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

و یا به صورت یک بردار سطری $x \in \mathbb{R}^n$ ، $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ می‌نویسیم. از آنجاکه به ابعاد پایین‌تر علاقه‌مندیم n معمولاً ۲ یا ۳ است.

تعريف ۱.۱ نگاشت خطی است هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ و هر $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ خطی است $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $L(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha L(\mathbf{v}) + \beta L(\mathbf{w})$

نگاشتهای خطی موضعی، مدل‌های اساسی سیستم‌های با بعد بالاتر را ایجاد می‌کنند. یادآوری می‌کنیم یک ماتریس $n \times n$ چون A ، یک مربع از اعداد حقیقی یا مختلط به صورت

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

است. در اینجا a_{ij} ، نماینده درایه سطر i و ستون j از A است. به مطالبی از جبر ماتریس‌ها نیاز داریم. اگر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ و $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه حاصل ضرب $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ برداری به صورت

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

است. اگر $B = (b_{ij})$ ماتریس $n \times n$ دیگری باشد، آنگاه حاصل ضرب $B \cdot A$ یک ماتریس $n \times n$ جدید (c_{ij}) است که به صورت

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

داده می‌شود. توجه کنید که $B \cdot A = (d_{ij})$ که

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj}$$

و معمولاً $A \cdot B \neq B \cdot A$

مثال ۲.۱ فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

در این صورت

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}.$$

رابطه بسیار نزدیکی بین نگاشتهای خطی و جبر ماتریسها وجود دارد. در واقع، فرض کنید e_1, e_2, \dots, e_n پایه استاندارد از \mathbb{R}^n باشد؛ یعنی، e_j برداری است که همه درایه‌های آن صفر است به جز درایه زام که برابر با یک است. به خاطر خطی بودن، L کاملاً با عملی که روی e_j انجام می‌دهد تعیین می‌شود. یعنی، اگر برای $n, L(e_j) = v_j, j = 1, \dots, n$ ، آنگاه برای هر بردار $v \in \mathbb{R}^n$ مشخص می‌شود.

در واقع، ممکن است برای $v \in \mathbb{R}^n$ ، بنویسیم $v = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$. یعنی

$$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

بنابراین $L(v) = \sum \alpha_j (L(e_j)) = \sum \alpha_j v_j$ به طور کامل مشخص می‌شود.

فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با ستونهای v_1, v_2, \dots, v_n باشد. می‌نویسیم

$$A = [v_1, \dots, v_n].$$

بنابراین بلافاصله نتیجه می‌شود که به ازای هر x ،

$$L(x) = Ax$$

که بیان کننده رابطه بین نگاشتهای خطی و ماتریسهاست. ماتریس A ، ماتریس نمایش L (در پایه استاندارد) نامیده می‌شود.

مثال ۳.۱ فرض کنید $L(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ و $L(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2$. در این صورت زیر داده می‌شود

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

به صورت مشابه، اگر $L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ و $L(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ ، آنگاه

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

ترکیب نگاشتها در سیستم‌های دینامیکی بسیار حائز اهمیت است. برای نگاشتهای خطی، ترکیب توابع با ضرب ماتریسها به گونه‌ای که در قضیه بعدی نشان داده می‌شود ارتباط دارد.

قضیه ۴.۱ فرض کنید L و P دو نگاشت خطی به ترتیب با ماتریس‌های نمایش A و B باشند.
در این صورت به ازای هر $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ، $P \circ L(\mathbf{v}) = (B \cdot A)\mathbf{v}$.

نگاشت خطی L وارون پذیر است هرگاه یک به یک و پوشایش باشد. در این حالت L دارای یک وارون یکتاست که با L^{-1} نمایش داده می‌شود. به سادگی می‌توان بررسی کرد که L^{-1} نیز یک نگاشت خطی است.

ماتریس همانی $n \times n$ را با I_n نمایش می‌دهیم:

$$I_n = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

وارون ماتریس $n \times n$ چون A ، ماتریس (یکتاوی) B است به طوری که

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n.$$

می‌دانیم B موجود است اگر و تنها اگر $\det A \neq 0$ که $\det(A)$ نمایانگر دترمینان A است. وارون ماتریس A را با A^{-1} نمایش می‌دهیم. بهوضوح، $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ وارون پذیر است اگر و تنها اگر A دارای وارون باشد و $L^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x})$.

تعریف ۵.۱ فرض کنید L_1 و L_2 دو نگاشت خطی از \mathbb{R}^n باشند. L_1 و L_2 مزدوج خطی هستند هرگاه نگاشت خطی وارون پذیر P موجود باشد به طوری که

$$L_1 = P^{-1} \circ L_2 \circ P.$$

به زبان ماتریسی، اگر آنگاه $P(\mathbf{x}) = G\mathbf{x}$ و $L_2(\mathbf{x}) = A_2\mathbf{x}$ و $L_1(\mathbf{x}) = A_1\mathbf{x}$ باشد،

$$A_1\mathbf{x} = (G^{-1} \cdot A_2 \cdot G)\mathbf{x}.$$

ماتریسهای A_1 و A_2 متشابه نامیده می‌شوند هرگاه $.A_1 = G^{-1} A_2 G$

تعریف ۶.۱ فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ باشد. مقدار ویژه A ، ریشه چندجمله‌ای مشخصه است که با $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ داده می‌شود. یک بردار ویژه A متناظر با مقدار ویژه λ یک بردار ناصل \mathbf{v} است که در آن

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

چندگانگی λ به عنوان یک مقدار ویژه، چندگانگی λ به عنوان ریشه چندجمله‌ای مشخصه است.

مثال ۷.۱ اگر

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

آنگاه $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = p(\lambda)$ دارای مقادیر ویژه ۳ و ۱ است. بردار ویژه متناظر با $\lambda = 3$ از حل دستگاه معادلات

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

یا به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} x - 4y &= 3x \\ -x + y &= 3y. \end{aligned}$$

به دست می‌آید که بردار ویژه‌ای به صورت

$$\mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

برای $\mu \neq 0$ به دست می‌دهد. به طور مشابه بردار

$$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

برای $\mu \neq 0$, بردار ویژه‌ای برای A متناظر با $\lambda = -1$ است.

ملاحظه. اگر A یک ماتریس قطری یا بالا مثلثی باشد، آنگاه مقادیر ویژه A در روی قطر ظاهر می‌شوند.

مثال ۸.۱ اگر

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

آنگاه A دارای مقادیر ویژه $i \pm$ است. بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه i از حل معادلات

$$\begin{aligned} y &= ix \\ -x &= iy \end{aligned}$$

حاصل می‌شود. به عبارت دیگر هر بردار به صورت

$$\mu \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

برای $\mu \neq 0$, بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه i است.

مثالهای بالا نشان می‌دهند که یک ماتریس حقیقی می‌تواند مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مختلط داشته باشد. اگرچه، چنین مقادیر ویژه‌ای همیشه به صورت یک زوج مزدوج مختلط اتفاق می‌افتد. یعنی، اگر $\alpha + i\beta$ مقدار ویژه‌ای از یک ماتریس حقیقی باشد، آنگاه $\alpha - i\beta$ نیز مقدار ویژه‌ای از آن است. این مطلب برای چند جمله‌ای‌هایی که ضرایب آنها حقیقی است نیز صدق می‌کند.

قضیه ۹.۱ اگر $L_1(x) = A_1 x$ و $L_2(x) = A_2 x$ مزدوج خطی باشند، آنگاه A_1 و A_2 دارای مقادیر ویژه یکسانی هستند.

برهان. یادآوری می‌کنیم که اگر A و B ماتریسهای $n \times n$ باشند، آنگاه

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\det(A_1 - \lambda I) &= \det(G^{-1}A_2 G - \lambda I) \\ &= \det(G^{-1}A_2 G - \lambda G^{-1}G) \\ &= \det(G^{-1}[A_2 - \lambda I]G) \\ &= \det(A_2 - \lambda I).\end{aligned}$$

□

درنتیجه چند جمله‌ای‌های مشخصه A_1 و A_2 یکسان هستند.

برای مطالعه دینامیک نگاشتهای خطی، بهتر است ماتریس نمایش تابع در ساده‌ترین شکل خود باشد. برای سیستم‌ها با ابعاد پایین، این صورتهای ساده به وسیله قضیه بعدی داده می‌شوند.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنید $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک نگاشت خطی به صورت $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ باشد. آنگاه ماتریس 3×3 حقیقی چون G موجود است به طوری که $G^{-1}AG$ به یکی از چهار شکل زیر است که در آن همه درایه‌ها حقیقی بوده و $\beta \neq 0$

$$\begin{array}{ll} \left(\begin{array}{ccc} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{array} \right).2 & \left(\begin{array}{ccc} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right).1 \\ \left(\begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right).4 & \left(\begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{array} \right).3 \end{array}$$

برهان. ابتدا فرض کنید که A دارای مقدار ویژه $i\beta + \alpha$ است. از آنجاکه A یک ماتریس حقیقی است، $i\beta - \alpha$ نیز یک مقدار ویژه آن است. مقدار ویژه باقیمانده λ از A باید لزوماً یک عدد حقیقی باشد. فرض کنید \mathbf{w} بردار ویژه متناظر با $i\beta + \alpha$ باشد. می‌نویسیم $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + i\mathbf{v}_2$ که \mathbf{v}_i ها بردارهای حقیقی هستند. از آنجاکه $A\mathbf{w} = (\alpha + i\beta)\mathbf{w}$ ، نتیجه می‌شود که

$$A\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_1 - \beta\mathbf{v}_2$$

$$A\mathbf{v}_2 = \beta\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2.$$

اگر \mathbf{v}_2 بردار ویژه متناظر با λ باشد، آنگاه

$$A\mathbf{v}_3 = \lambda\mathbf{v}_3.$$

اکنون فرض کنید G ماتریسی باشد که در $v_j = Ge_j$ صدق می‌کند. یعنی ستونهای G بردارهای v_1, v_2 و v_3 هستند. در این صورت می‌توان به راحتی بررسی کرد که $G^{-1}AG$ به صورت ۱ در قضیه است.

برای حالتهای باقیمانده، ابتدا توجه می‌کنیم که همه مقادیر ویژه حقیقی هستند. فرض می‌کنیم که همه مقادیر ویژه برابر با λ باشند. ابتدا فرض می‌کنیم که یک بردار نااصر v موجود است به‌طوری که

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)^3 v &= 0 \\ (A - \lambda I)^2 v &\neq 0.\end{aligned}$$

فرازدید

$$\begin{aligned}w_2 &= (A - \lambda I)^3 v \\ w_2 &= (A - \lambda I)v \\ w_1 &= v.\end{aligned}$$

از آنجاکه $Aw_2 = \lambda w_2 + w_2$ ، $Aw_3 = \lambda w_3 + w_3$ و $Aw_1 = \lambda w_1 + w_1$. درنتیجه، اگر $[w_1, w_2, w_3] = G$ ، آنگاه $G^{-1}AG$ به صورت ۳ است. اگر به‌ازای هر v ، $(A - \lambda I)^2 v = 0$ و لیکن $(A - \lambda I)v \neq 0$ ، آنگاه به صورت زیر بحث می‌کنیم. قرار دهید $v = w_2 = (A - \lambda I)v$ و $w_1 = v$ ، در این صورت $Aw_2 = \lambda w_2$ و $Aw_1 = \lambda w_1 + w_2$. ادعا می‌کنیم که بردار سوم w_3 موجود است به‌طوری که $(A - \lambda I)w_3 = 0$ و لیکن w_2 و w_3 هم خط نیستند. اگر چنین برداری موجود نباشد، آنگاه فضای پوچ نگاشت خطی $A - \lambda I$ یک بعدی است. بنابراین فضای برد باید دو بعدی باشد. از طرف دیگر از آنجاکه به‌ازای هر v ، $(A - \lambda I)^2 v = 0$ ، فضای برد $A - \lambda I$ باید با فضای پوچ $A - \lambda I$ برابر باشد که به تناقض می‌رسیم. بنابراین، همچون گذشته، G را ماتریسی با ستونهای w_1, w_2 و w_3 می‌گیریم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $G^{-1}AG$ به صورت ۲ در قضیه است.

در حالتی که همه مقادیر ویژه A یکسان نباشند، روش فوق، به راحتی صورتهای ۲ و ۳ را تولید می‌کند. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم. \square

نتیجه ۱۱.۱ فرض کنید A یک ماتریس 2×2 باشد. در این صورت یک ماتریس حقیقی G موجود است به‌طوری که $G^{-1}AG$ به یکی از سه صورت زیر برای $\beta \neq 0$ باشد

$$\cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} . 3 \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} . 2 \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} . 1$$

ماتریسهای ساده در قضیه ۱۰.۱ و نتیجه آن را فرمهای استاندارد برای نگاشت خطی می‌نامیم. بنابراین همه نگاشتهای خطی با بعد دو و سه، با نگاشتی که ماتریس نمایش آن به صورت یکی از

فرمهای استاندارد است، مزدوج خطی است. توجه کنید که این فرمها معمولاً فرمها نامیده می‌شوند. اگرچه، این جمله مفهوم دیگری نیز دارد که در آینده به آن می‌پردازیم. بنابراین از این اصطلاح غیراستاندارد استفاده می‌کنیم و امیدواریم در آینده موجب گمراحتی نشود.

ملاحظه. توجه کنید که مقادیر ویژه $\alpha \pm i\beta$ است. مگر در حالت بلوک 2×2 به صورت

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

که دارای مقادیر ویژه $\alpha \pm i\beta$ است. برای استفاده در آینده، توجه می‌کنیم که فرمهای استاندارد را که شامل عدد ۱ در بالای قطر هستند می‌توان با تزویج خطی اصلاح کرد.

قضیه ۱۲.۱ نگاشت خطی

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

برای $\epsilon \neq 0$ ، با

$$L_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

مزدوج خطی است.

برهان. فرض کنید

$$S_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

به راحتی می‌توان دید که $S \circ L \circ S^{-1}$ به صورت فرم موردنظر است.
به طور مشابه، نگاشتهای خطی با ماتریس نمایش

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

برای $\epsilon \neq 0$ ، با نگاشتهایی با نمایش

$$\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

□

مزدوج خطی هستند.

وضعيت برای نگاشتهای خطی کلی‌تر در ابعاد بالاتر، کم و بیش مانند حالات توضیح داده شده در بالا است. از آنجاکه ما در ادامه با ابعاد دو و سه سروکار داریم، فقط نکات اساسی را بدون اثبات بیان می‌کنیم. این نکات در آینده استفاده نمی‌شود ولی برای گسترش هر یک از نتایج مان به ابعاد بالاتر اساسی هستند.

تعريف ۱۳.۱ ماتریس A یک بلوک λ -جردن است هرگاه به صورت

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

باشد. به عبارت دیگر ماتریس A روی قطر اصلی، مقدار λ ، بالای قطر اصلی مقدار ۱ و در بقیه درایه‌ها مقدار ۰ را می‌پذیرد.

تعريف ۱۴.۱ ماتریس A به فرم جردن است هرگاه

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

که هر یک از A_i ‌ها یک بلوک λ_i -جردن و باقی مانده درایه‌ها ۰ هستند.

ملاحظات.

۱. برای هر ماتریس A ، ماتریس مختلط G موجود است به طوری که $G^{-1}AG$ به فرم جردن باشد.
۲. λ ‌ها در بلوک جردن می‌توانند مختلط باشند.

۳. مقادیر ویژه یک ماتریس به فرم جردن در طول قطر اصلی نمایش داده می‌شوند.

هنگامی که آها در یک λ -بلوک جردن، مختلط باشند، آنگاه فرم جردن، متفاوت از فرم‌های استانداردی است که در قضیه ۱۰.۱ نتیجه‌اش ارائه شد. اگرچه، می‌توانیم با یک تزویج خطی، آن را به یک فرم جردن حقیقی

$$J = \begin{pmatrix} A & I & & & \\ & A & I & & \\ & & A & I & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A \end{pmatrix}$$

تبديل کنیم که A یک ماتریس 2×2 به صورت

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

و I ماتریس همانی 2×2 است. بردارهای مختلط را می‌توان به دو قسمت حقیقی و موهومی آن، برای به دست آوردن این فرم‌ها تجزیه کرد. جزئیات خسته کننده را حذف می‌کنیم. بعضی از نکات را از حسابان مرور می‌کنیم. فرض کنید $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: F یک نگاشت باشد. معمولاً چنین نگاشتی را به صورت

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, y) \\ y_1 &= f_2(x, y) \end{aligned}$$

می‌نویسیم که بردار (x_1, y_1) تصویر (x, y) تحت F است. با نمادهای برداری می‌نویسیم

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}.$$

حسابان در ابعاد بالاتر مستلزم استفاده از جبر خطی است. یادآوری می‌کنیم که ماتریس ژاکوبی نگاشت F در نقطه x به وسیله

$$DF(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

داده می‌شود. این نگاشت نقشی اساسی در آینده ایفا می‌کند همان‌طور که (x) ' در حالت یک بعدی عمل می‌کرد.

مثال ۱۵.۱ فرض کنید $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به وسیله

$$\begin{aligned} x_1 &= a - by - x^2 \\ y_1 &= x \end{aligned}$$

که a و b پارامتر هستند داده شده باشد. به راحتی می‌توان محاسبه کرد که

$$DH \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ملاحظه می‌شود که بدون توجه به نقطه مورد محاسبه ماتریس ژاکوبی، $\det(DH) = b$. یعنی دترمینان ژاکوبی H ثابت است. نگاشت H ، نگاشت هنون نامیده می‌شود. به نگاشت هنون در بخش پایانی این فصل بازمی‌گردیم.

نگاشت C^1 نامیده می‌شود هرگاه همه مشتقهای جزئی مرتبه اول آن موجود و پیوسته باشند. $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ است هرگاه به ازای هر k ، مشتق جزئی مرتبه k آن موجود و پیوسته باشد. در این فصل معمولاً نگاشتهای C^∞ را در نظر می‌گیریم و گاهی اوقات از نگاشتهای تکه‌تکه خطی در مثالها استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱۶.۱ $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک دیفیومورفیسم است هرگاه یک به یک، پوششی و C^∞ باشد و معکوس آن نیز C^∞ باشد.

مثال ۱۷.۱ هنگامی که $\circ \neq b$ ، نگاشت هنون در مثال ۱۵.۱ یک دیفیومورفیسم روی \mathbb{R}^2 است. نگاشت معکوس به وسیله

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ y_1 &= (a - x - y^2)/b \end{aligned}$$

داده می‌شود.

برخلاف فصل یک، که اکثر نگاشتها وارون‌پذیر نبودند، در این فصل روی نگاشتهای دیفیومورفیسم تمرکز می‌کنیم. بسیاری از روابعدهای فصل اول در ابعاد بالاتر نیز رخ می‌دهند. بعد فضای را می‌توانیم با ضرب دکارتی دو فضای افزایش دهیم.

تعریف ۱۸.۱ فرض کنید X و Y دو مجموعه دلخواه باشند. حاصل ضرب دکارتی $X \times Y$ مجموعه جفت‌های مرتب از اعضای X و Y است، یعنی،

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X, y \in Y\}.$$

برای مثال $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times S^1$ و چنبره (یا سطح دونات) به صورت $S^1 \times S^1$ است. چنبره توپر $B^2 \times S^1$ به صورت

$$B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$$

است. در اینجا قدر مطلق به معنی فاصله اقلیدسی از مبداء مختصات است. به تعمیم سه نتیجه مهم از حسابان پیشرفته در ابعاد بالاتر نیاز داریم.

قضیه ۱۹.۱ قضیه تابع ضمنی. فرض کنید $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ به صورت

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1(x, y, z) \\ y_1 &= f_2(x, y, z) \end{aligned}$$

داده شده باشد. فرض کنید $\circ = F(\circ)$ و ماتریس مشتقات جزئی

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(\circ) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(\circ) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(\circ) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(\circ) \end{pmatrix}$$

وارون پذیر باشد (یعنی، دارای دترمینان ناصرف باشد). در این صورت $\circ > \epsilon$ و منحنی هموار (z) به صورت

$$\begin{aligned} x &= \zeta_1(z) \\ y &= \zeta_2(z) \end{aligned}$$

که روی $\epsilon < |z|$ تعریف شده موجود است به طوری که $.F(\zeta_1(z), \zeta_2(z), z) = \circ$

مالحظه. همانند فصل یک، از قضیه تابع ضمنی برای تضمین وجود یک جواب "خوب" برای معادلات، یعنی، یک خم خوب جواب استفاده می‌کنیم. در نظریه انشعاب در ابعاد بالاتر آن را به کار می‌بریم.

قضیه ۲۰.۱ قضیه تابع وارون. فرض کنید $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. فرض کنید $\circ = F(\circ)$ و $DF(\circ)$ یک ماتریس وارون پذیر باشد. در این صورت یک همسایگی U از \circ و نگاشت C^∞ چون $.F \circ G(x) = x, x \in U$ موجود است به طوری که بهارزای هر $G : U \rightarrow \mathbb{R}^2$

به عبارت دیگر، اگر ماتریس ژاکوی F در \circ وارون پذیر باشد، آنگاه یک وارون موضعی برای F موجود است.

قضیه ۲۱.۱ قضیه نگاشت انقباض. فرض کنید $B^2 \rightarrow B^2$ تعریف شده باشد که در آن B^2 قرص بسته واحد

$$B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$$

است. فرض کنید برای یک $\lambda < 1$ و بهارزای هر بردار $x_i \in B^2$ ، داشته باشیم $|F(x_1) - F(x_2)| < \lambda|x_1 - x_2|$. در این صورت نقطه ثابت یکتای $x_* \in B^2$ موجود است. علاوه بر آن، بهارزای هر $x \in B^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(x) = x_*$$

تمرین.

۱. همه مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریسها را زیر را بیابید.

- الف. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ب. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- ج. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- د. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

۲. با استفاده از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه محاسبه شده در تمرین ۱، فرمهای استاندارد هر یک از این ماتریسها را بسازید.

۲ دینامیک نگاشتهای خطی: ابعاد دو و سه

با استفاده از قضیه‌هایی که در بخش قبل دسته‌بندی شده، توصیف رفتار دینامیکی همه نگاشتهای خطی در ابعاد دو و سه نسبتاً سرراست است.

مثال ۱.۲ فرض کنید

$$L_1(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x.$$

یعنی، اگر

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

آنگاه

$$L_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

توجه کنید که ماتریس نمایش L_1 دارای مقادیر ویژه 2 و $\frac{1}{2}$ است. همچنین، L_1 هردو محور x و y را حفظ می‌کند. نقاط واقع بر محور x تحت تکرارهای L_1 از مبداء مختصات دور می‌شوند، درحالی‌که نقاط روی محور y تحت تکرار به 0 میل می‌کنند. نقاط غیرواقع بر محورها تحت تکرارهای پیشرو و پسرو به سمت ∞ میل می‌کنند.

مثال ۲.۲ فرض کنید

$$L_2(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

L_2 نیز محور y را نیز منقبض می‌کند ولی این‌بار نقاط تحت تکرارهای L_2 از یک طرف مبداء مختصات به طرف دیگر آن جهش می‌کنند. مقادیر ویژه، 2 و $-\frac{1}{2}$ هستند.

مثال ۳.۲ فرض کنید

$$L_3(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

در این حالت مقادیر ویژه، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ هستند. همه نقاط تحت تکرارهای L_3 به سمت مبداء مختصات میل می‌کنند. نقاط در جهت محور y بسیار سریع‌تر به سمت 0 حرکت می‌کنند چون مقدار انقباض در این جهت قوی‌تر است.

مثال ۴.۲ فرض کنید

$$L_4(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

باز هم همه نقاط تحت تکرارهای L_4 به سمت مبداء مختصات حرکت می‌کنند. این بدهی دلیل است که با هر تکرار L_4 ، هر بردار در \mathbb{R}^2 با فاکتور $\frac{1}{2}$ منقبض می‌شود. در اینجا، اگرچه که هیچ خط پایابی وجود ندارد ولی با هر تکرار L_4 ، زاویه قطبی به اندازه $\frac{\pi}{2}$ زیاد می‌شود. درنتیجه نقاط به شکل مارپیچ به مبداء مختصات میل می‌کنند؛ مقادیر ویژه $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ هستند.

مثال ۵.۲ فرض کنید

$$L_5(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

در این مثال، صفحه xy پایاست و L_5 روی این صفحه دقیقاً مانند مثال قبل عمل می‌کند. نقاط خارج از صفحه xy ، با تکرارهای L_5 به ∞ میل می‌کنند. توجه کنید که محور z ها پایاست و L_5 بردارهای روی محور z ها را با فاکتور ۲ افزایش می‌دهد. در اینجا مقادیر ویژه، $\frac{1}{2}$ و ۲ هستند.

نمای فاز نگاشتهای خطی در مثالهای ۱.۲ تا ۵.۲ در شکل ۱.۲ رسم شده است. با اینکه نگاشتهای خطی این مثالها همه حالتها ممکن را توصیف نمی‌کنند ولی بعضی از تفاوتها و شباهتها بین بعد یک و ابعاد بالاتر را نشان می‌دهند. مهم‌ترین تفاوت این است که مبداء مختصات می‌تواند هم‌زمان دارای هردو جهت انبساط و انقباض باشد. همانند حالت یک‌بعدی این مقادیر ویژه هستند که مشخص می‌کنند که یک نگاشت دارای جهت‌های انبساط یا انقباض است. مقادیر ویژه (با قدر مطلق) بزرگ‌تر از یک منجر به انبساط و مقادیر ویژه با قدر مطلق کوچک‌تر از یک موجب انقباض می‌شوند. این مطالب انگیزه‌ای برای تعریف هذلولوی بودن است.

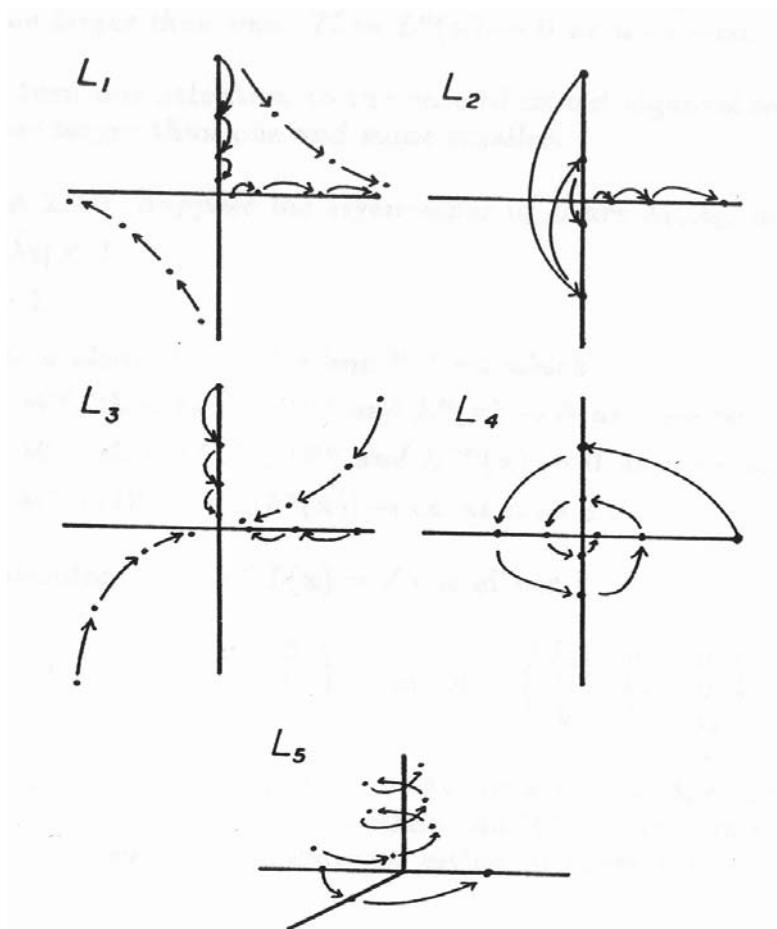
تعریف ۶.۲ یک نگاشت خطی وارون پذیر، هذلولوی است هرگاه هیچ مقدار ویژه‌ای با قدر مطلق یک نداشته باشد.

توجه کنید که همه مثالهای فوق هذلولوی هستند. همچنین توجه می‌کنیم هنگامی که یک نگاشت خطی دارای مقدار ویژه‌ای با قدر مطلق کمتر از یک باشد، آنگاه جهت متناظری وجود دارد که در آن جهت، نقاط به مبداء مختصات که ثابت است جذب می‌شوند. هنگامی که یک جفت مزدوج از مقادیر ویژه کمتر از یک موجود باشند، آنگاه یک مجموعه دو بعدی از نقاط جذب \circ می‌شوند. این یک نکته کلی است.

قضیه ۷.۲ فرض کنید $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ دارای مقادیر ویژه با قدر مطلق کمتر از یک باشد. در این صورت به ازای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ، با میل کردن n به ∞ ، $\circ \rightarrow L^n(\mathbf{x})$.

برهان. یادآوری می‌کنیم که ماتریس نمایش A از L به یکی از چهار فرم استاندارد در قضیه ۱۰.۱ و قضیه ۱۲.۱ در می‌آید:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix} . 2 \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} . 1$$



شکل ۱.۲. دینامیک نگاشتهای خطی L_1, \dots, L_5 .

$$\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. 4 \quad \begin{pmatrix} \lambda & \epsilon & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}. 3$$

که همه درایه‌ها حقیقی بوده و $\epsilon \neq 0$ است.

تابع حقیقی مقدار $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را درنظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که $1 < \nu$ موجود است به طوری که اگر $0 < \epsilon$ به اندازه کافی کوچک باشد، آنگاه

$$V \circ L(\mathbf{x}) \leq \nu V(\mathbf{x})$$

وتساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر $\mathbf{x} = 0$. این محاسبه ساده‌ای است که ما فقط برای حالت ۴ انجام می‌دهیم. از آنجاکه $|xy| \leq x^2 + y^2$ داریم

$$\begin{aligned} V \circ L(\mathbf{x}) &= \lambda^2(x^2 + y^2 + z^2) + \epsilon^2(y^2 + z^2) + 2\lambda\epsilon(xy + yz) \\ &\leq (\lambda^2 + \epsilon^2)(x^2 + y^2 + z^2) + 2|\lambda\epsilon|(|xy| + |yz| + |xz|) \\ &\leq (\lambda^2 + \epsilon^2 + 4|\lambda\epsilon|)(V(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

درنتیجه می‌توانیم ϵ را آنقدر کوچک انتخاب کنیم که نامساوی برای $\lambda^2 + \epsilon^2 + 4|\lambda\epsilon| \leq \nu$ برقرار شود. اگر $\mathbf{x} \neq 0$ ، آنگاه

$$V \circ L^n(\mathbf{x}) \leq \nu^n V(\mathbf{x}).$$

بنابراین $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ هرگاه $V(\mathbf{x}) = 0$. ولی $V \circ L^n(\mathbf{x}) \rightarrow 0$. درنتیجه همان‌طور که می‌خواستیم $L^n(\mathbf{x}) \rightarrow 0$. بقیه حالتها مشابه است. \square

تابع V که در اثبات قضیه ۲.۷ ساخته شد، تابع لیپاپانوف نامیده می‌شود. این مفهوم را در یک تعریف فرمول بندی می‌کنیم.

تعریف ۸.۲ فرض کنید $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک دیفیومورفیسم باشد. نگاشت $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع لیپاپانوف برای تابع F در \mathbf{p} است هرگاه

$$V(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \neq \mathbf{p} . ۱$$

$$V(\mathbf{p}) = 0 . ۲$$

$$V \circ F(\mathbf{x}) \leq V(\mathbf{x}) . ۳$$

توجه کنید که طبق تعریف $p = F(p)$. اگر V لیپاپانوف محضار باشد، یعنی برای $x \neq p$ ، $V \circ F(x) < V(x)$ آنگاه به سادگی همانند برهان قبل نتیجه می‌شود که برای همه x ‌ها در یک همسایگی از p ، $F^n(x) \rightarrow \infty$ هرگاه $n \rightarrow \infty$.

در حالاتی که همه مقادیر ویژه L دارای قدرمطلق بزرگ‌تر از یک باشند، آنگاه بحث فوق نتیجه زیر را به دست می‌دهد.

نتیجه ۹.۲ فرض کنید $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ خطی بوده و همه مقادیر ویژه L دارای مقدار ویژه بزرگ‌تر از یک باشند. آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) = \infty$ هرگاه $x \in W^s$

اکنون توجه مان را به حالت‌هایی با مقادیر ویژه مختلف معطوف می‌کنیم که در آنها بعضی از مقادیر ویژه دارای قدرمطلق بزرگ‌تر از یک و بعضی دیگر دارای قدرمطلق کوچک‌تر از یک هستند.

قضیه ۱۰.۲ فرض کنید $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ مقادیر ویژه L باشند به‌طوری که

$$|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 . . 1$$

$$. |\lambda_3| > 1 . . 2$$

در این صورت صفحه W^s و خط W^u موجودند به‌طوری که

۱. اگر $x \in W^s$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} L^n(x) = 0$ هرگاه $x \in W^s$

۲. اگر $x \in W^u$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} L^{-n}(x) = 0$ هرگاه $x \in W^u$

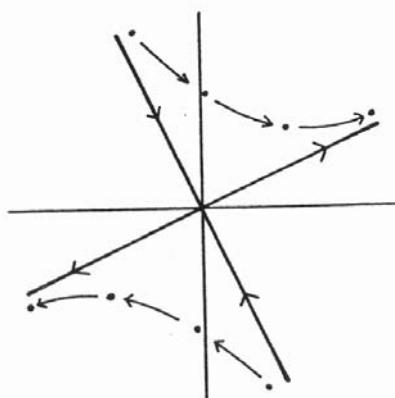
۳. اگر $x \notin W^u \cup W^s$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |L^n(x)| = \infty$ هرگاه $x \in W^u \cup W^s$

برهان. فرم استاندارد $L(x) = Ax$ به یکی از دو صورت

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

است که * یا مثبت است (فقط هنگامی که $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$) یا صفر است (در حالت اول، $\lambda_1 = \alpha + i\beta$). در این حالت W^s ، صفحه xy و W^u محور z هاست. با استفاده از قضیه ۷.۲ و نتیجه آن، حکم برای هر یک از زیرفضاهای به دست می‌آید. \square

ملاحظات.



شکل ۲.۲.

۱. در حالتی که دو تا از مقادیر ویژه دارای قدر مطلق بزرگ‌تر از یک باشند، نتیجه فوق به وضوح قابل تغییر است تا یک صفحه از نقاط تحت تکرارهای L^{-1} به صفر میل کند. یک خط گذرنده از $\mathbf{0}$ موجود است به طوری که L روی آن انقباضی است.

۲. در ابعاد بالاتر نتیجه مشابهی را می‌توان با استفاده از فرم جردن نگاشت به دست آورد. زیرفضاهای پایا که در قضیه ۱۰.۲ داده شده‌اند، نقش مهمی در آینده ایفا می‌کنند. بنابراین نامی برای آنها تعیین می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۲ زیرفضای پایدار و W^u زیرفضای ناپایدار L نامیده می‌شود.

در حالت ساده‌تر که ماتریس نمایش به فرم استاندارد خود باشد، زیرفضاهای پایدار و ناپایدار، صفحات یا محورهای مختصات هستند. این مطلب برای حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۲.۲ نگاشت خطی

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

را در نظر بگیرید. این نگاشت خطی دارای مقادیر ویژه $1 + \sqrt{5}$ و $1 - \sqrt{5}$ است. بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه به ترتیب عبارتند از

$$y = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) x,$$

$$y = - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) x.$$

نمای فاز در شکل ۲.۲ داده شده است. با این نگاشت خطی خاص کاملاً متفاوت، هنگام بحث درمورد خودریختی‌های چنبره هذلولوی در بخش ۴.۲ مواجه می‌شویم.

در حالت یک بعدی، هذلولوی نبودن نشانه‌ای برای احتمال رخ دادن یک انشعاب بود. همان‌طورکه در بخش ۸.۲ خواهیم دید این موضوع در ابعاد بالاتر نیز برقرار است. بدون بحث روی انشعاب احتمالی، به چند مثال از نگاشتهای خطی غیرهذلولوی می‌پردازیم و توجه می‌کنیم که آنها نمای فاز کاملاً متفاوتی نسبت به مثالهای قبل که نگاشتهای هذلولوی هستند، دارند. برای سادگی فقط از نگاشتهای وارون پذیر استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۳.۲ فرض کنید

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

در این حالت، کل محور x ‌ها ثابت می‌ماند در حالی که روی محور y ‌ها انبساط رخ می‌دهد.

مثال ۱۴.۲ فرض کنید

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

در این حالت تنها نقطه ثابت، $\mathbf{0}$ است ولی همه نقاط دیگر روی محور x ‌ها دارای تناوب 2 هستند. سایر نقاط نیز جذب محور x ‌ها می‌شوند.

مثال ۱۵.۲ فرض کنید

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

ماتریس A دارای مقادیر ویژه $\pm i$ بوده و L یک دوران 90° درجه است. بنابراین همه نقاط به جز 0° دارای تناوب 4 هستند. در حالت کلی، اگر A به صورت

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

با $1 = \alpha^2 + \beta^2$ باشد، آنگاه L دورانی در صفحه با زاویه $\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ arctan است.

تمرین.

۱. دینامیک نگاشتهای خطی را که ماتریس نمایش آنها به صورت زیر است توصیف کنید.

الف. $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

ج. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

د. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ه. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

۲. دینامیک نگاشتهای خطی را که ماتریس نمایش آنها به صورت زیر است توصیف کنید.

مجموعه‌های پایدار و ناپایدار را به طور دقیق بیابید.

الف. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ج. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

د. $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

ه. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

۳. دینامیک نگاشتهای خطی زیر را توصیف کنید و مشخص کنید کدامیک غیرهذلولوی است.

الف. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

ب. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ج. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} & \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} . \text{d} \\ & \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} . \text{e} \end{aligned}$$

۴. نگاشت خطی

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $L^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. ثابت کنید اگر \mathbf{x} روی محور y ها قرار نگیرد، آنگاه مدار \mathbf{x} به صورت مجانبی به \mathbf{x} مماس بر محور x ها میل می‌کند.

۵. تابع $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک انتگرال نگاشت خطی L نامیده می‌شود هرگاه L به عبارت دیگر، F در طول مدار L ثابت است. نشان دهید

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2$$

انتگرالی برای نگاشت

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

است.

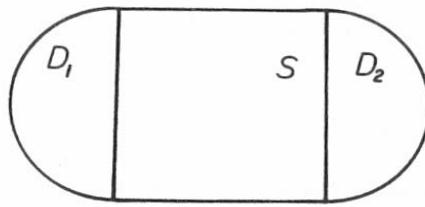
۶. انتگرالی (نابدیهی) برای هر یک از نگاشتهای خطی زیر بسازید.

$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \text{الف.}$$

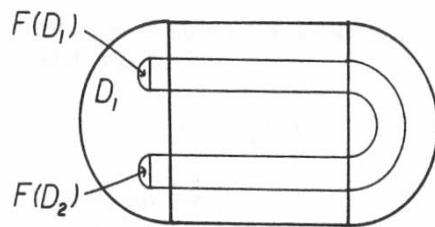
$$L(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \mathbf{x}. \text{ب.}$$

۳ نگاشت نعل اسب

دینامیک نمادین را که نقش اساسی در درک نگاشت درجه دویک بعدی داشت می‌توان در پدیده‌های با ابعاد بالاتر نیز استفاده کرد. در این بخش نوع کلاسیکی از مثالها یعنی نگاشتهای نعل اسب را که توسط اسمیل معرفی شد مطالعه می‌کیم. این اولین مثال از دیفیومورفیسمی است که دارای بی‌نهایت



شکل ۱.۳. "استادیوم".

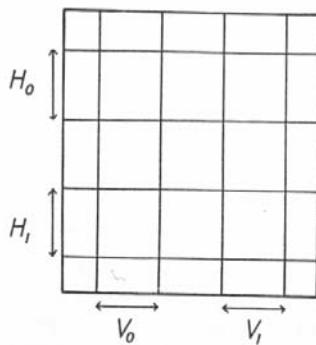


شکل ۲.۳. نگاشت نعل اسب اسمیل.

نقطه متناوب بوده و دارای پایداری ساختاری است. خواهیم دید که این نگاشت دارای اشتراک زیادی با نگاشت درجه دو است که در فصل اول اکثر مباحث را به وسیله آن توضیح دادیم. برای تعریف این نگاشت ابتدا ناحیه D شامل سه مؤلفه را در نظر بگیرید: یک مربع مرکزی S با اضلاعی به طول ۱ و دونیم دایره D_1 و D_2 در دو انتهای آن. شکل ۱.۳ را ببینید. شکل D شبیه یک "استادیوم" است.

نگاشت نعل اسب F ، ناحیه D را به صورت زیر به خودش می‌نگارد. ابتدا S را به صورت خطی در راستای عمودی با فاکتور $\frac{1}{\delta} < \delta$ منقبض می‌کند و همچنین در جهت افقی با فاکتور $\frac{1}{\delta}$ انبساط می‌دهد به طوری که S دراز و باریک شود. آنگاه S را دوباره به داخل D به صورت یک نعل اسب همانند شکل ۲.۳ باز می‌گرداند.

نواحی نیم دایره‌ای D_1 و D_2 منقبض شده و به داخل D_1 نگاشته می‌شوند. توجه کنید که $F \subset D$ و $F(D)$ یک به یک است. البته از آنجاکه F پوشانیست، به طور سرتاسری تعریف نمی‌شود. باقیمانده این بخش به مطالعه دینامیک F در D مربوط می‌شود.



شکل ۳.۳.

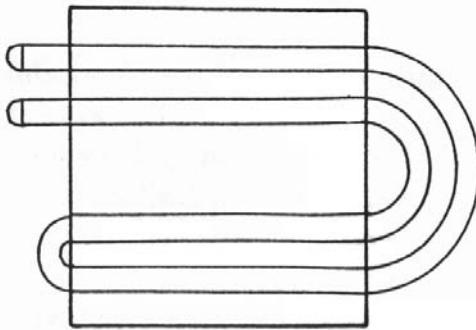
ابتدا توجه کنید که پیش تصویرهای S از دو مستطیل عمودی V_0 و V_1 تشکیل شده که می‌توانیم فرض کنیم به صورت خطی به روی دو مؤلفه افقی H_0 و H_1 از $S \cap F(S)$ نگاشته می‌شود. پهناهی V_0 و V_1 همانند ارتفاع H_0 و H_1 برابر با δ است. شکل ۳.۳ را ببینید.

از خطی بودن $F : V_0 \rightarrow H_0$ و $F : V_1 \rightarrow H_1$ نتیجه می‌شود که F خطوط افقی و عمودی در S را حفظ می‌کند. برای استفاده‌های بعدی توجه می‌کنیم که اگر h یک قطعه خط افقی در S باشد که تصویر آن نیز در S قرار می‌گیرد، آنگاه طول $(F(h), \frac{1}{\delta})$ برابر طول h است. به صورت مشابه اگر هر دوی v و $(F(v), \frac{1}{\delta})$ قطعات خطوط عمودی در S باشند، آنگاه طول $(F(v), \frac{1}{\delta})$ با ضریبی از δ کاهش می‌یابد. ادعا می‌کنیم که دینامیک F بسیار مشابه دینامیک نگاشت درجه دو مطالعه شده در بخش ۵.۱ است. ابتدا توجه کنید از آنجاکه F یک انقباض روی D_1 است، F دارای یک نقطه ثابت p در D_1 است و برای هر $q \in D_1$ $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(q) = p$. این مطلب بلاfacسله از قضیه نگاشت انقباض نتیجه می‌شود. از آنجاکه $F(D_2) \subset D_1$ ، همه مدارهای پیشروی D_2 مشابه هم رفتار می‌کنند. به همین صورت، اگر $q \in S$ ولی برای k مثبتی، $F^k(q) \notin S$ ، آنگاه باید $F^k(q) \in D_1 \cup D_2$. درنتیجه با $n \rightarrow \infty$ ، داریم $F^n(q) \rightarrow p$. بنابراین برای درک رفتار مدار پیشرو در F ، کافی است آن مجموعه از نقاط را در نظر بگیریم که مدار آنها همیشه در S باقی می‌ماند. گام دیگری برمی‌داریم و مجموعه

$$\Lambda = \{q \in S \mid F^k(q) \in S, k \in \mathbb{Z}\}$$

را توصیف می‌کنیم.

اکنون اگر مدار پیشروی q در S قرار گیرد، باید داشته باشیم $q \in V_1$ یا $q \in V_0$ یا $q \in V_1 \cup D_2$ نگاشته می‌شود. اگر $F^k(q) \in S$ ، آنگاه به صورت مشابه

شکل ۴.۳. تصویر پیشروی $F^k(S)$

S ، یعنی، $F(q) \in V_0 \cup V_1$ است. بهوضوح، زیرمجموعه‌هایی در هر دوی V_0 و V_1 موجودند که همانند شکل ۴.۳ به داخل V_0 نگاشته می‌شوند.

به صورت استقرایی عمل می‌کنیم: اگر V یک مستطیل عمودی با پهنای w باشد به طوری که مرزهای بالایی و پایینی S را به یکدیگر وصل کند، آنگاه $F^{-1}(V)$ یک جفت مستطیلهای عمودی کوچکتر با پهنای w/δ است که هر یکی در یکی از V_i ها قرار دارند. درنتیجه $F^{-2}(F^{-1}(V_i)) = F^{-2}(V_i)$ شامل چهار مستطیل عمودی با پهنای δ^2 شامل هشت مستطیل عمودی با پهنای δ^3 والی آخر است. بنابراین با روشهای مشابه که در بخش ۵.۱ استفاده کردیم، نتیجه می‌گیریم

$$\Lambda_+ = \{q \mid F^k(q) \in S, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

برابر حاصل ضرب یک مجموعه کانتور در یک بازه عمودی است. با بحثی کاملاً مشابه، به راحتی دیده می‌شود که

$$\Lambda_- = \{q \mid F^{-k}(q) \in S, k = 1, 2, 3, \dots\}$$

برابر حاصل ضرب یک مجموعه کانتور در یک بازه است. در این حالت، بازه‌ها افقی هستند. درنهایت،

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$$

اشتراک این دو مجموعه است.

برای معرفی دینامیک نمادین این سیستم، ابتدا یک بازه عمودی ℓ را از Λ_+ برگزینید. توجه کنید که $F^k(\ell)$ یک قطعه از یک خط عمودی با طول δ^k در V_1 یا V_α است. بنابراین ما یک دنباله $F^j(\ell) \subset V_\alpha$ از s_0 ها و s_1 ها را به هر نقطه در ℓ با توجه به قانون $s_j = \alpha$ اگر و تنها اگر s_1, s_2, \dots نسبت می‌دهیم. عدد s مشخص می‌کند که ℓ در کدام نوار عمودی قرار گرفته است، s_1 نشان می‌دهد تصویر آن کجا قرار گرفته است و الی آخر. بهمین ترتیب می‌توان یک دنباله از اعداد صحیح را به هر قطعه خط افقی h نسبت داد. برای راحتی، این دنباله را به صورت $\dots, s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}$ می‌نویسیم که $s_{-j} = \alpha$ اگر و تنها اگر

$$F^{-j}(h) \subset H_\alpha, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

توجه کنید که $(h, F^{-1}(h), F^{-2}(h), \dots)$ قطعه خطوط افقی، با طول کاهش یافته هستند. درنتیجه، اگر p نقطه‌ای در $\Lambda_- \cap \Lambda_+$ باشد، یک جفت از دنباله‌های s_0 و s_1 به p نسبت می‌دهیم. یک دنباله، راهنماء مدار پیشروی p و دیگری مدار پیشرو را توصیف می‌کند. این دو دنباله را با هم ادغام می‌کنیم تا یک دنباله از دو طرف نامتناهی از s_0 ها و s_1 ها به دست آید. یعنی راهنماء $S(p)$ را با قانون

$$S(p) = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$$

تعريف می‌کنیم که $s_j = k$ اگر و تنها اگر $F^j(p) \in V_k$. این روش، دینامیک نمادین را روی Σ به دست می‌دهد. فرض کنید Σ_2 مجموعه همه دنباله‌های از دو طرف نامتناهی از s_0 ها و s_1 ها باشد:

$$\Sigma_2 = \{(s) = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) \mid s_j \in \{0, 1\}\}.$$

همانند قبل یک متريک روی Σ_2 با تعريف $d[(s), (t)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}$ قرار می‌دهیم. نگاشت تغییرجای σ را به صورت

$$\sigma(\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots) = (\dots, s_{-2}, s_{-1}, s_0, s_1, s_2, \dots)$$

تعريف کنید. نگاشت σ هر دنباله در Σ_2 را یک واحد به سمت چپ هل می‌دهد (به صورت معادل، σ نقطه ممیز را یک واحد به راست می‌برد). برخلاف نگاشت تغییرجای قبلی، این نگاشت دارای وارون است. بهوضوح، انتقال دادن یک واحد به سمت راست، وارون را به دست می‌دهد. به راحتی می‌توان بررسی کرد که σ یک همسان‌ریختی روی Σ_2 است (تمرین ۲ را ببینید).

اکنون نگاشت تغییرجای مدلی برای تحدید F به Λ است. درواقع، نگاشت S ، تزویج توپولوژیکی بین F روی Λ و σ روی Σ_2 را به دست می‌دهد. جزئیات برهان را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۳ را ببینید).

همه خواصی که برای تغییرجای یک طرفه در قبل برقرار بود برای σ نیز برقرار است. برای مثال، σ دارای 2^N نقطه متناوب با تناوب N است. همچنین σ یک مدار چگال دارد (تمرینهای ۴ و ۵ را ببینید) ولی برخی خواص جدید نیز وجود دارد.

تعريف ۱.۳ دو نقطه p_1 و p_2 پیشرو (یا پسرو) مجانبی هستند هرگاه برای $n \geq 0$ (یا $n \leq 0$)، $F^n(p_1), F^n(p_2) \in D$

$$\lim_{n \rightarrow \infty (n \rightarrow -\infty)} |F^n(p_1) - F^n(p_2)| = 0$$

در واقع، دو مدار در D پیشرو مجانبی هستند هرگاه مدارهای آنها تحت $\infty \rightarrow n$ به یکدیگر نزدیک شوند. توجه کنید که هر نقطه که S را تحت تکرارهای F ترک کند، پیشرو مجانبی به یک نقطه ثابت $p \in D_1$ می‌شود. همچنین اگر p_1 و p_2 روی یک خط عمودی در Λ_+ قرار گیرند، آنگاه p_1 و p_2 پیشرو مجانبی هستند. اگر p_1 و p_2 روی یک خط افقی در Λ_- قرار گیرند، آنگاه p_1 و p_2 پسرو مجانبی هستند.

همانند نظریه خطی، مفهوم پیشرو یا پسرو مجانبی، به ما اجازه می‌دهد مجموعه‌های پایدار و ناپایدار یک نقطه را تعریف کنیم.

تعريف ۲.۳ مجموعه پایدار p به صورت

$$W^s(p) = \{z \mid |F^n(z) - F^n(p)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

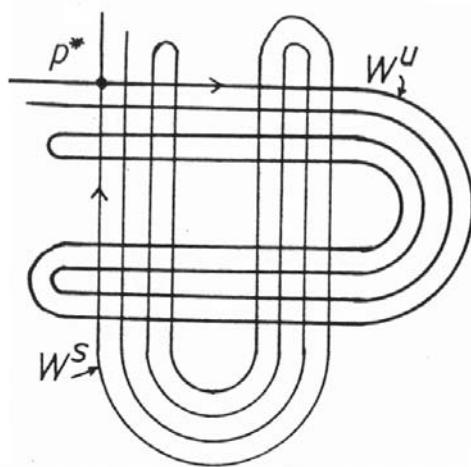
و مجموعه ناپایدار p به صورت

$$W^u(p) = \{z \mid |F^{-n}(p) - F^{-n}(z)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\}$$

تعریف می‌شوند.

به طور معادل، یک نقطه z در $(p) W^s$ از p قرار می‌گیرد هرگاه z و p پیشرو مجانبی باشند. برای مثال، هر نقطه در S که تحت تکرارهای پیشروی نگاشت نعل اسب، S را ترک می‌کند، در مجموعه پایدار یک نقطه ثابت در D_1 قرار می‌گیرد.

مجموعه‌های پایدار و ناپایدار نقاط در Λ پیچیدگی بیشتری دارند. برای مثال، نقطه ثابت p^* را که در V قرار گرفته است و بنابراین دنباله $(\dots 0.00\dots)$ به آن منسوب می‌شود در نظر بگیرید. هر نقطه که روی قطعه عمودی ℓ گذرنده از p^* قرار دارد متعلق به $(p^*) W^s$ است. ولی نقاط زیاد



شکل ۵.۳. مجموعه‌های پایدار و ناپایدار نقطه p^* .

دیگری نیز در این مجموعه پایدار وجود دارند. فرض کنید نقطه q درنهایت به توی ℓ_s نگاشته شود. آنگاه عدد صحیح n هست به طوری که $|F^n(q) - p^*| < 1$. درنتیجه

$$|F^{n+k}(q) - p^*| < \delta^k$$

و بنابراین $(F^{-k}(p^*)) \in W^s(p^*)$. نتیجه می‌شود که اجتماع بازه‌های عمودی که با $F^{-k}(\ell_s)$ برای $k = 1, 2, 3, \dots$ به دست می‌آیند متعلق به $(W^s(p^*))$ است. می‌توان به راحتی بررسی کرد که 2^k تا از چنین بازه‌هایی موجود است. شکل ۵.۳ را ببینید.

از آنجاکه $F(D) \subset D$, خمینه ناپایدار p^* حدوداً شکل متفاوتی دارد. قطعه خطوط افقی ℓ_u گذرنده از p^* در D مسلم‌آ در $(W^u(p^*))$ قرار می‌گیرند. همانند بالا، همه تصاویر پیشروی در D قرار می‌گیرند. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $(F^k(\ell_u))$ به شکل یک منحنی "مارگونه" در D است که S را دقیقاً 2^k بار در هر قطعه افقی قطع می‌کند. شکل ۵.۳ را ببینید.

این مجموعه‌های پایدار و ناپایدار به زبان تغییرجا به راحتی قابل توصیف هستند. قرار دهید

$$s^* = (\dots s_{-2}^* s_{-1}^* s_0^* s_1^* s_2^* \dots) \in \Sigma_2.$$

بهوضوح، اگر t دنباله‌ای باشد که درایه‌های آن با درایه‌های s^* در سمت راست درایه‌ای از s^* یکسان باشد، آنگاه $(s^*(s^*))^t \in W^s(s^*)$. عکس این مطلب نیز همان‌طور که در تمرین ۶ نشان داده شده است

درست است.

یک سوال طبیعی که پیش می‌آید استفاده ما از کلمه "مجموعه کانتور" برای توصیف مجموعه $\Lambda_+ \cap \Lambda_-$ برای نگاشت نعل اسب و مجموعه Λ برای نگاشت درجه دو در فصل اول است. ممکن است به نظر برسد که Λ در نگاشت نعل اسب "دو برابر" نقطه دارد ولی هر دوی Λ ‌ها با هم همسان ریخت هستند. این را می‌توان به خوبی در تغییرجا دید.

فرض کنید Σ_2 نشان‌دهنده مجموعه دنباله‌های یک طرفه از Λ ‌ها و Σ_1 مجموعه دو طرفه از چنین دنباله‌هایی باشد. نگاشت

$$\phi : \Sigma_1^1 \rightarrow \Sigma_2$$

را به وسیله $(\dots s_5 s_4 s_3 s_2 s_1 s_0) \phi = (\dots s_5 s_4 s_3 s_2 s_1 s_0)$ تعریف کنید. می‌توان به سادگی بررسی کرد که ϕ یک همسان ریختی بین Σ_1^1 و Σ_2 است (تمرین ۱۱ را ببینید).

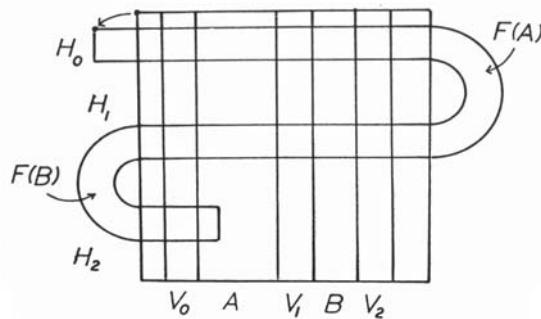
ملاحظات.

۱. تاکنون مجموعه‌های پایدار و ناپایدار را در دو شکل دیدیم؛ یکی زیرفضاهای پایدار و ناپایدار نگاشتهای خطی و دیگری مجموعه فوق از قطعه خطوط افقی و عمودی. این یک الگوی عادی برای سیستم‌های "هذلولوی" در ابعاد بالاتر است که در آینده آن را روشن تر بیان می‌کنیم. هر نقطه در یک مجموعه هذلولوی دارای جهت‌های انقباضی و انبساطی است که نقش مجموعه‌های پایدار و ناپایدار را بازی خواهد کرد.
۲. برخلاف نگاشت درجه دو، مثال نعل اسب به جای اینکه به صورت جبری تعریف شود، به صورت هندسی تعریف شده است. این مسئله اغلب در ابعاد بالاتر اتفاق می‌افتد؛ نمایش و کار کردن با مثالهایی که به صورت هندسی تعریف شده‌اند راحت‌تر است. مهم است که توجه کنیم نوشتن یک توضیح جبری دقیق برای نگاشتهایی چون نعل اسب امکان‌پذیر است. این نگاشت، نگاشت‌های اندیشه ای است که در آینده آن را در بخش ۹.۲ تعریف می‌کنیم.

تمرین.

۱. نشان دهید $d[(s), (t)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}$ یک متریک روی Σ_2 است.
۲. نشان دهید تغییرجا σ یک همسان ریختی است.
۳. نشان دهید $\Sigma_2 \rightarrow \Lambda : S$ یک تزویج توپولوژیکی بین σ و F ایجاد می‌کند.

۴. یک مدار چگال برای σ بسازید.
۵. نشان دهید نقاط متناوب σ چگال هستند.
۶. فرض کنید $\Sigma_2 \in s^*$. نشان دهید $(s^*(s^* W^s) \cap \Sigma_2)$ از دنباله‌هایی تشکیل شده است که درایه سمت راست آنها با درایه‌ای از سمت راست s^* یکسان باشند.
۷. فرض کنید $\Sigma_2 \in \Sigma_1 \cap W^u$. دنباله $s \in \Sigma_2$ هموکلینیک به (\circ) نامیده می‌شود اگر (\circ) درایه‌های دنباله‌ای را که هموکلینیک به (\circ) باشد، توصیف کنید. نشان دهید دنباله‌های هموکلینیک به (\circ) در Σ_2 چگال هستند.
۸. قرار دهید $\Sigma_2 \in \Sigma_1 \cap W^u$. دنباله t یک دنباله هتروکلینیک است اگر (\circ) درایه‌های چنین دنباله هتروکلینیکی را توصیف کنید. نشان دهید این دنباله‌ها در Σ_2 چگال هستند.
۹. تعاریف نقاط هموکلینیک و هتروکلینیک را به نقاط متناوب دلخواه σ تعمیم دهید و تمرینهای ۷ و ۸ را برای این حالت ثابت کنید.
۱۰. نشان دهید مجموعه نقاط هموکلینیک به یک نقطه متناوب داده شده، شماراست.
۱۱. فرض کنید Σ_1 نشان دهنده مجموعه دنباله‌های یک طرفه از \circ ها و 1 ها باشد. نگاشت $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ را به صورت
- $$\phi(s_0 s_1 s_2 \dots) = (\dots s_5 s_2 s_1, s_0 s_2 s_4 \dots)$$
- تعاریف کنید. نشان دهید ϕ یک همسان‌ریختی است.
۱۲. نگاشت F روی D را که به صورت هندسی در شکل ۷.۳ تعریف شده است درنظر بگیرید. فرض کنید F طولهای عمودی وافقی در S را همانند حالت نعل اسب اسمیل به ترتیب منقبض و منبسط می‌کند. فرض کنید
- $$\Lambda = \{p \in D \mid F^n(p) \in S, n \in \mathbb{Z}\}.$$
- از تکنیکهای بخش ۱۳.۱ استفاده کنید تا نشان دهید F روی Λ مزدوج تپیلوژیکی با یک تغییرجا از نوع متناهی تولید شده توسط یک ماتریس 3×3 مانند A است. ماتریس A را بیابید. روی دینامیک F در خارج از Λ بحث کنید.
۱۳. تمرین ۱۲ را این‌بار با نگاشتی که به صورت هندسی در شکل ۷.۳ آمده حل کنید.



شکل ۶.۳

۱۴. نگاشت $R : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ را به صورت

$$R(\dots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 s_2 \dots) = (\dots s_2 s_1 s_0 . s_{-1} s_{-2} \dots)$$

تعریف کنید. نشان دهید $U \circ R = R \circ U = \text{id}$ و $\sigma = R \circ \sigma^{-1}$. نتیجه بگیرید $\sigma \circ R = R \circ \sigma$ است که U نگاشتی است که در $U \circ U = \text{id}$ صدق می‌کند. نگاشتهایی که وارون خود باشند برگشت نامیده می‌شوند و نمایش دهنده سیستم‌های دینامیکی بسیار ساده‌ای هستند. بنابراین نگاشت تغییرجا به صورت ترکیب دو تا از چنین نگاشتهایی تجزیه می‌شود.

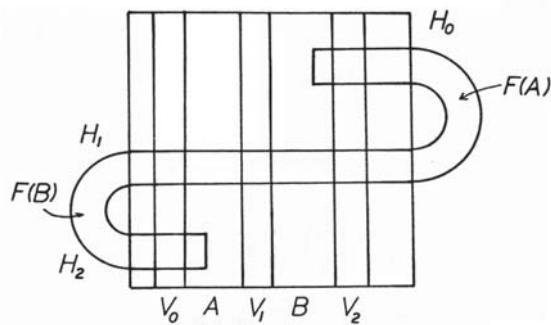
۱۵. فرض کنید s دنباله‌ای باشد که توسط R ثابت نگاه داشته می‌شود. فرض کنید $(s)^{\sigma^n}$ نیز چنین باشد. نشان دهید s یک نقطه متناوب σ با تناوب $2n$ است.

۱۶. تمرین قبیل را با فرض اینکه $(s)^{\sigma^n}$ توسط U که در تمرین ۱۳ معرفی شد، ثابت نگاه داشته می‌شود دوباره حل کنید. تناوب s چند است؟

۴ خودریختی‌های هذلولوی روی چنبره

در این بخش دسته کاملاً متفاوتی از سیستم‌های دینامیکی به نام سیستم‌های آنوسوف^۲ یا خودریختی‌های هذلولوی روی چنبره را معرفی می‌کنیم. این نگاشتهای به این دلیل دارای اهمیت هستند که در همه دامنه تعریف‌شان آشوبناک هستند. با این حال، دینامیک آنها به طور کامل قابل

Anosov^۲



شکل ۷.۳

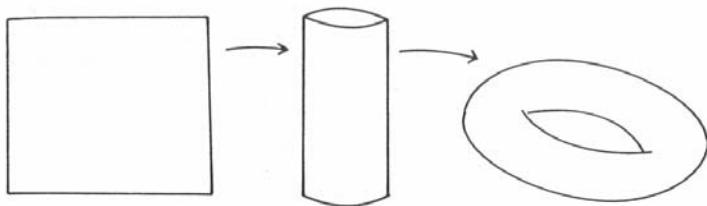
توصیف است. یک تفاوت بین این نگاشتها و نگاشتهایی که قبلاً روی آنها بحث کردیم این است که اینها به جای اینکه روی یک فضای اقلیدسی تعریف شوند، روی یک چنبره یا "دونات" تعریف شده‌اند. با اینکه این نگاشتها توسط نگاشتهای خطی فضای اقلیدسی (که دارای دینامیک بسیار ساده هستند) القاء شده‌اند، نگاشتهای روی چنبره دارای ساختار دینامیکی بسیار غنی هستند.

برای توصیف چنبره، از صفحه شروع می‌کنیم. همه نقاطی را که مختصات آنها با هم به اندازه یک عدد صحیح تفاوت دارد بکی می‌کنیم. یعنی نقطه (α, β) در صفحه با نقاط $(\alpha + 1, \beta)$, $(\alpha + 2, \beta)$, $(\alpha + 3, \beta)$ و در حالت کلی با $(\alpha + M, \beta + N)$ که M و N اعداد صحیح هستند، یکی در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید $[a, b]$, نماینده مجموعه همه نقاط هم ارز با (α, β) تحت این رابطه باشد. با بیان رسمی‌تر، رابطه $(x', y') \sim (x, y)$ اگر و تنها اگر $x' - x = y' - y$ اعداد صحیح باشند، یک رابطه هم ارزی روی نقاط یک صفحه به دست می‌دهد. بنابراین چنبره مجموعه همه کلاسهای هم ارزی تحت این رابطه است.

به طور هندسی، این روند را می‌توان به صورت زیر تجسم کرد. مربع یکه $1 \leq x, y \leq 0$ را در صفحه در نظر بگیرید. تحت یکسان‌سازی بالا، فقط کافیست نقاط مرز مربع را در نظر بگیریم. در واقع، مرز بالایی $y = 1$ باید با مرز پایینی $y = 0$ یکی شده و به صورت مشابه مرزهای چپ و راست $x = 0$ و $x = 1$ باید با هم یکی شوند. با این اتفاق، همانند شکل ۱.۴، مربع ابتدا به استوانه و سپس به چنبره تبدیل می‌شود.

ملاحظات.

۱. این روند فقط به بعد دو محدود نمی‌شود؛ می‌توان چنبره بعدی را با استفاده از روابط هم



شکل ۱.۴. ساختن چنبره از یک مربع.

ارزی مشابه روی \mathbb{R}^n تعریف کرد. این در تمرین ۲ نشان داده شده است.

۲. چنبره را می‌توان به عنوان حاصل ضرب دکارتی دو دایره در هم در نظر گرفت. تمرین ۳ را ببینید.

فرض کنید T نشان‌دهنده چنبره و π تصویر کردن طبیعی از \mathbb{R}^2 به روی چنبره باشد، یعنی،

$$\pi(x, y) = [x, y] = \pi(x + M, y + N).$$

سیستم‌های دینامیکی خاصی را روی چنبره می‌توان به صورت کارآمدتر در صفحه توصیف کرد و سپس آن را به روی چنبره تصویر کرد. برای مثال، فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ دارای این خاصیت باشد که به ازای همه نقاط صفحه و هر M و N صحیح،

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} x + M \\ y + N \end{pmatrix}$$

متعلق به شبکه اعداد صحیح باشد. نتیجه می‌شود که

$$\pi \circ F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pi \circ F \begin{pmatrix} x + M \\ y + N \end{pmatrix}$$

و بنابراین F یک نگاشت خوش‌تعریف \hat{F} روی چنبره القاء می‌کند. نگاشت \hat{F} با نمودار

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ T & \xrightarrow{\hat{F}} & T \end{array}$$

تعریف می‌شود. به عنوان مثال، اگر L یک نگاشت خطی باشد که ماتریس نمایش آن ماتریس اعداد صحیح است، آنگاه بهوضوح \hat{L} روی T خوش‌تعریف است. \hat{L} خودریختی روی چنبره نامیده می‌شود. برای اهداف ما، چند فرض روی L لازم است.

تعریف ۱.۴ فرض کنید $x \in \mathbb{R}^2$ و ماتریس $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ چون A در شرایط زیر صدق کند.

۱. همه درایه‌های A اعداد صحیح هستند.

$$\det(A) = \pm 1.$$

۳. A هذلولوی است.

نگاشت القاء شده روی T توسط A ، خودریختی هذلولوی روی چنبره نامیده شده و با L_A نمایش داده می‌شود. بهوضوح L_A مشتق‌پذیر است چون ماتریس ژاکوبی آن، ماتریس A است. به علاوه، از آنجاکه $\det(A) = \pm 1$ ، وارون A نیزیک ماتریس صحیح هذلولوی است. بنابراین A^{-1} نیزیک خودریختی هذلولوی روی چنبره است که در واقع وارون L_A است. نتیجه می‌شود که L_A یک دیفیومورفیسم روی T است. قضیه زیر نشان می‌دهد که L_A از نظر دینامیکی با همتای خطی خود کاملاً متفاوت است.

قضیه ۲.۴ $\text{Per}(L_A)$ در T چگال است.

برهان. فرض کنید p نقطه‌ای در T با مختصات گویا باشد. با یافتن یک مقسوم علیه مشترک، می‌توانیم فرض کنیم p به صورت $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$ است که $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ و $k \in \mathbb{N}$ اعداد صحیح هستند. از آنجاکه می‌توان k را به اندازه دلخواه بزرگ گرفت، چنین نقاطی بهوضوح در T چگال هستند. ادعا می‌کنیم p نقطه متناوب با تناوب کمتر از یا مساوی با k^2 است.

برای دیدن این مطلب، توجه کنید که دقیقاً k^2 نقطه به صورت $[\frac{\alpha}{k}, \frac{\beta}{k}]$ که $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ در T وجود دارد. در واقع، از آنجاکه A ماتریسی با درایه‌های صحیح است، تصویر این نقاط تحت L_A را می‌توان دوباره به چنین صورتی نوشت. این بدین معناست که L_A جایگشتی روی این نقاط است. بنابراین اعداد صحیحی چون j, i موجود است به‌طوری که $L_A^i(p) = L_A^j(p)$ و $|i - j| \leq k^2$. با تأثیر L_A^{-i} روی این رابطه دیده می‌شود که p نقطه‌ای متناوب با تناوب کمتر از یا مساوی با k^2 است. \square

مثال ۲.۴ نگاشت $T \rightarrow T$ با ضابطه

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

را درنظر بگیرید. بهوضوح $[0, 0]$ تنها نقطه ثابت است. در واقع از حل معادله

$$\begin{aligned} 2x + y &= x + M \\ x + y &= y + N, \end{aligned}$$

که در آن $M, N \in \mathbb{Z}$, برای یافتن نقاط ثابت در می‌یابیم که $[0, 0] = [0, 0]$ تنها نقطه ثابت است.
داریم $[0, 0] = [\frac{1}{7}, \frac{1}{7}] = [0, \frac{1}{7}]$ و $L_A[\frac{1}{7}, \frac{1}{7}] = [\frac{1}{7}, \frac{1}{7}]$. بنابراین $\frac{1}{7} \in \mathbb{Z}$ دارای تناوب است. می‌توان نقاط متناوب دیگر این نگاشت را نیز محاسبه کرد.

چگال بودن نقاط متناوب، تنها شروع داستان طبیعت آشوبناک L_A است. از آنجاکه A هذلولوی با دترمینان 1 ± 1 است، هردو مقدار ویره باید حقیقی باشند. علاوه بر آن، یکی از مقادیر ویره، λ_s باید در رابطه $1 < |\lambda_s|$ و دیگری یعنی λ_u نیز باید در $1 < |\lambda_u|$ صدق کند. با توجه به نتایج بخش ۱.۲، زیرفضاهای پایدار و ناپایدار W^s و W^u باید خطوطی گذرنده از مبداء مختصات در \mathbb{R}^2 باشند. اکنون قرار دهید $x, y \in T$. فرض کنید ℓ_s و ℓ_u خطوطی در \mathbb{R}^2 باشند که در $(x, y) \in T$ همدیگر را قطع می‌کنند و به ترتیب با W^s و W^u موازی هستند. تصاویر این خطوط مستقیم روی T را با

$$W^s[x, y] = \pi(\ell_s)$$

$$W^u[x, y] = \pi(\ell_u),$$

نشان می‌دهیم. این نوع نمایش به‌این معنی است که این خطوط روی مجموعه‌های پایدار و ناپایدار متناظر با $[x, y] \in T$ تصویر می‌شوند. این مطلب در قضیه بعدی دیده می‌شود.

قضیه ۴.۴

۱. $W^s[x, y] \in W^s[x, y']$ است، یعنی، اگر $[x', y'] \in W^s[x, y]$ باشد. فرض کنید $d(L_A^n[x', y'], L_A^n[x, y]) \rightarrow 0$. در اینجا d فاصله روی T است که توسط فاصله اقلیدسی در طول مجموعه پایدار القاء شده است.

۲. به طور مشابه، $W^u[x, y] \in W^u[x, y']$ است.

برهان. قسمت ۱ را ثابت می‌کنیم. برهان قسمت ۲ مشابه است. فرض کنید $x = A \cdot x$. نگاشت خطی روی \mathbb{R}^2 باشد. فرض کنید (x, y) و (x', y') روی یک خط موازی با W^s در \mathbb{R}^2 قرار گیرند. ℓ را قطعه خط واصل بین (x, y) و (x', y') فرازدید. با توجه به خطی بودن، $(\ell, L^n(\ell))$ یک قطعه از یک خط موازی با W^s است. به علاوه، طول $L^n(\ell)$ مساوی $(\text{طول } \ell) \times (\text{طول } \ell)$ است. بنابراین هنگامی که $n \rightarrow \infty$ داریم $|L^n(x, y) - L^n(x', y')| \rightarrow 0$. و نتیجه می‌شود که $\lim_{n \rightarrow \infty} d(L_A^n[x, y], L_A^n[x', y']) = 0$.

قضیه ۵.۴ برای هر T و $W^s[x, y]$ و $W^u[x, y]$ در T چگال هستند.

برهان. ابتدا W^s را در \mathbb{R}^2 درنظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که W^s یک خط با شیب گنگ در \mathbb{R}^2 است. چون درغیراین صورت W^s باید از نقطه‌ای با مختصات $(M, N) \in \mathbb{Z}^2$ بگذرد. در این صورت

همه تکرارهای (M, N) تحت L به دلیل صحیح بودن ماتریس A ، دارای مختصات صحیح خواهد بود. ولی این امکان پذیر نیست چون $\circ \rightarrow L^n(M, N)$ هنگامی که $n \rightarrow \infty$ اکنون تقاطعهای پشت سر هم $y = N$ با خط x در \mathbb{R}^2 در نظر بگیرید. فرض کنید x_N ، x -مختص نقطه روی $y = N$ و $y = W^s$ باشد. توجه کنید که x_1 معکوس شیب W^s است که ناگویاست. همچنین $x_2 = 2x_1$ ، و در حالت کلی $x_N = Nx_1$.

روی چنبره، نقطه (x_j, j) به صورت $\circ [a_j, 0]$ که $1 < a_j \leq 0$ تصویر می‌شود. خط $y = 0$ یک دایره در T تعریف می‌کند و a_j تصاویر پشت سرهم $\circ [0]$ تحت یک تبدیل ناگویا از این دایره است. با استفاده از قضیه ژاکوبی (قضیه ۱۳.۳ از فصل یک)، این نقاط در دایره چگال هستند. حال نتیجه به راحتی بدست می‌آید.

در حالت کلی، خطوط ℓ به منحنیهایی که به صورت چگال دور چنبره می‌پیچند تصویر می‌شوند و W^u هم به صورت مشابه قابل بررسی است. \square

مجموعه‌های پایدار و ناپایدار یک نقطه دارای خواص ویژه‌ای هستند. این دو مجموعه تحت L_A حفظ می‌شوند. به این معنی که اگر $[x', y'] \in W^s(L_A[x, y])$ ، آنگاه $(x', y') \in W^s([x, y])$. در واقع، از هر نقطه $T \in [x, y]$ ، یک مجموعه پایدار و یک مجموعه ناپایدار یکتا می‌گذرد. بنابراین مجموعه‌های پایدار و ناپایدار، مثالهایی از برگ‌بندی هستند. در بعد دو، یک برگ‌بندی به طور ساده یک گردایه از خمه‌است که اجتماع آنها، کل فضای تشکیل می‌دهد. خمها در این گردایه با اینکه ممکن است مانند یک دایره بسته باشند، یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

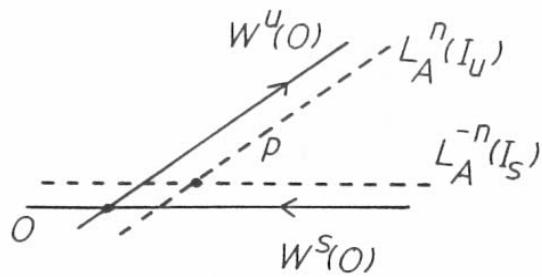
مجموعه پایدار و ناپایدار هر نقطه در T ، تصویر یک خط راست در T تحت تابع تصویر π است. طبق قضیه ۴.۵، هریک از این مدارها باید به صورت چگال حول این چنبره بپیچند. از آنجاکه W^s دارای شیبهای متفاوتی هستند، نتیجه می‌شود که تصاویر آنها نیز باید در یک مجموعه چگال از نقاط در T هم‌دیگر را قطع کنند. این نقاط تقاطع، مفهوم یک نقطه هموکلینیک را که در بخش ۱۶.۱ معرفی شد تعمیم می‌دهند.

تعریف ۶.۴ فرض کنید $T \in [x, y]$ یک نقطه متناوب L_A باشد. نقطه هموکلینیک به نقطه $[x, y]$ ، نقطه‌ای همچون $[x, y] \neq p$ است که روی $[x, y] \cap W^s[x, y] \cap W^u[x, y]$ قرار می‌گیرد.

توجه کنید که برای خودریختی‌های هذلولوی روی چنبره، $W^s[x, y]$ و $W^u[x, y]$ ، همیشه همدیگر را در یک نقطه هموکلینیک با زاویه‌ای ناصرف قطع می‌کنند. هنگامی که این اتفاق بیفتند، نقطه هموکلینیک، متقاطع نامیده می‌شود. بنابراین هموکلینیک، متقاطع نامیده می‌شود.

قضیه ۷.۴ نقاط هموکلینیک متقاطع در T چگال هستند.

ملاحظه. اگر $[x, y]$ یک نقطه متناوب برای L_A باشد، آنگاه هر نقطه هموکلینیک به $[x, y]$ تحت



شکل ۲.۴

هر دو تکرار پسرو و پیشروی L_A به مدار $[x, y]$ میل می‌کند. این نقاط نمی‌توانند نقاط بازگشتی با این تعریف که مدار پیشروی آنها به صورت پیوسته به هر بازه تعیین شده‌ای بازگرد باشند. تمرین ۱ را ببینید.

این ایده‌ها به ما اجازه می‌دهد که نشان دهیم L_A تراپایی توبولوژیکی است. فرض کنید U و V دو مجموعه باز در T باشند یعنی طبق تعریف، پیش تصویرهای U و V تحت π مجموعه‌های باز در \mathbb{R}^2 هستند. می‌خواهیم یک نقطه $[p]$ در U و یک عدد صحیح k بیابیم به‌طوری که $L_A^k[p] \in V$. نقاطی چون $U \in U$ و $V \in V$ انتخاب می‌کنیم که هموکلینیک به $[0]$ باشند. اکنون قرار دهید $\circ > \epsilon$. بازه باز I_u را با طول $\circ > \delta$ در $W^u[0]$ که شامل $[r]$ است انتخاب کنید. به صورت مشابه بازه I_s را در $W^s[0]$ که شامل $[s]$ است انتخاب کنید. بازه I_u را با ضریب L_A^{-n} و $| \lambda_u |^n$ ، بازه I_s را با همان ضریب گسترش می‌دهد. حال n را به اندازه کافی بزرگ بگیرید به‌طوری که

$$d(L_A^n[r], \circ) < \frac{\epsilon}{3} \quad ۱.$$

$$d(L_A^{-n}[s], \circ) < \frac{\epsilon}{3} \quad ۲.$$

$$| \lambda_u |^n \delta > \epsilon \quad ۳.$$

در اینجا d فاصله اقلیدسی تعریف شده در همسایگی از $[0]$ است. از آنجاکه $L_A^n(I_u)$ و $L_A^{-n}(I_s)$ هستند، نتیجه می‌شود که $L_A^n(I_u) \cap L_A^{-n}(I_s) \neq \emptyset$. فرض کنید $[q]$ یک نقطه در این اشتراک باشد. شکل ۲.۴ را ببینید. در این صورت $L_A^n[q] \in U$ و $L_A^{-n}[q] \in V$. بنابراین $L_A^n[p] \in V$ و نقطه موردنظر به‌دست می‌آید. در آخر توجه می‌کنیم که L_A دارای وابستگی حساس به شرایط اولیه است. در واقع، اگر T و $[p] \in T$ آنگاه هر تکرار L_A فاصله بین تصاویر $[p]$ و $[q]$ را حداقل در راستای $W^u[p]$ زیاد

می‌کند. به عنوان یک نتیجه، L_A روی کل چنبره آشوبناک است. این مطلب را به صورت یک قضیه بیان می‌کنیم.

قضیه ۸.۴ فرض کنید L_A یک خودریختی هذلولوی روی چنبره T باشد. در این صورت

۱. نقاط متناوب L_A در T چگال هستند.

۲. تراپایی توپولوژیکی است.

۳. L_A دارای واستگی حساس به شرایط اولیه است.

بنابراین یک خودریختی هذلولوی روی چنبره روی کل T آشوبناک است. برای مطالعه دینامیک L_A دوباره می‌توان از دینامیک نمادین مدد گرفت. در این حالت، جواب برخلاف حالت نعل اسب فقط تا حدودی رضایت بخش است و یک تزویج با نگاشت تغییرجا به دست نمی‌آید و به جای آن ابهامی در مرور انتخاب دنباله‌ها پیش می‌آید.

برای توصیف دینامیک نمادین، لازم است مفهوم افزار مارکوف را معرفی کنیم. برای روشن شدن بیشتر مطلب، ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

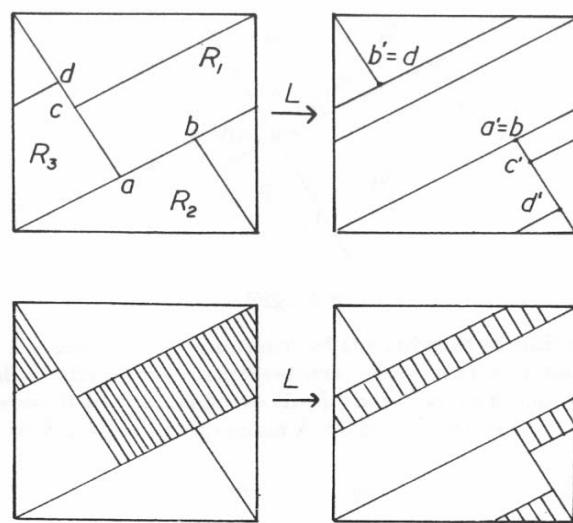
را ثابت نگه می‌داریم و با خودریختی خطی هذلولوی که توسط A القاء می‌شود کار می‌کنیم و آن را با L نمایش می‌دهیم.

مقادیر ویژه A ، $(1 + \sqrt{5})$ و $(1 - \sqrt{5})$ هستند. بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه ناپایدار خط $y = 1 + \sqrt{5}x$ بوده و مقدار ویژه پایدار دارای بردار ویژه $x = 1 - \sqrt{5}y$ است.

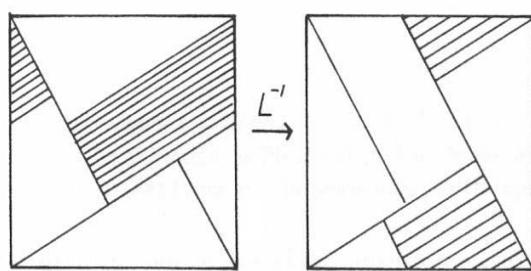
همانند حالت نعل اسب، ابتدا چند مستطیل با اصلاح روی مجموعه‌های پایدار و ناپایدار $[0]$ می‌سازیم. به عبارت دقیق‌تر، بازه a تا b روی $[0]$ W^s و بازه c تا d روی $[0]$ W^u را همان‌طور که در شکل ۳.۴ رسم شده در نظر بگیرید. این دو بازه سه مستطیل در چنبره تعریف می‌کنند که آنها را با R_1 و R_2 نمایش می‌دهیم. دو ضلع از هر مستطیل روی بازه‌ای از a تا b قرار می‌گیرد. این اصلاح را مرزهای پایدار می‌نامیم. توجه کنید که L این بازه را به داخل خودش می‌نگارد. به عنوان یک نتیجه، اگر $[p]$ نقطه‌ای روی یک مرز پایدار از یکی از R_i ها شد، آنگاه کل مدار پیشروی $[p]$ در این بازه قرار می‌گیرد.

به طور مشابه مرزهای ناپایدار R_i روی بازه‌ای از c تا d قرار می‌گیرند. این بازه توسط F^{-1} منقبض می‌شود به طوری که کل مدار پیشروی هر نقطه در مرز ناپایدار، روی این مجموعه قرار می‌گیرد. شکل ۴.۴ را ببینید.

برای مطالعه دینامیک روی T ، ابتدا توجه می‌کنیم که هرگاه $L(R_i)$ درون R_j ای را قطع کند، تصویر آن R_j را کاملاً در جهت مجموعه ناپایدار قطع می‌کند. به صورت مشابه، اگر $L^{-1}(R_i)$



شکل ۳.۴



شکل ۴.۴. عمل L روی افزار مارکوف

با درون R_j اشتراک داشته باشد، آنگاه تصویر آن R_j را کاملاً در جهت پایدار قطع خواهد کرد. مستطیلهایی با این خاصیت که مرزهای آنها روی مجموعه‌های پایدار و ناپایدار قرار می‌گیرد یک افزار مارکوف برای نگاشت نماید. این افزار به ما اجازه می‌دهد که دینامیک نمایین مشابه نگاشت نعل اسب تعریف کنیم چون تصویرهای پیشروی R_i همیشه مستطیلهای "ناپایدار" و تصویرهای پسرو، مستطیلهای "پایدار" را بدست می‌دهند.

توجه کنید که $L(R_1)$ درون هر دوی R_2 و R_3 را، $L(R_2)$ درون R_1 و R_3 را و همچنین $L(R_3)$ فقط درون R_2 را قطع می‌کند. در حال حاضر از این نکته که $L(R_1) \cap R_1 = L(R_2) \cap R_2 = L(R_3) \cap R_3$ ناتھی است ولی در مرزهای این مستطیلهای قرار می‌گیرند. بنابراین یک هم ارزی با زیرتغییرجا از نوع متناهی Σ_B به دست می‌آید که ماتریس تغییر وضعیت آن یعنی B به وسیله

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

داده می‌شود.

بهوضوح به چند مشکل برخورد می‌کنیم. به طور مثال هیچ یک از نقاط ثابت ($111\dots$ ، $222\dots$ و $333\dots$) دنباله‌های مجاز در Σ_B نیستند ولی از طرفی می‌دانیم که T ، نقطه ثابتی به اسم $[0]$ دارد. به علاوه، برای نسبت دادن یک دنباله به نقطه‌ای که خودش یا یکی از تصاویرش روی یکی از مرزهای یک مستطیل قرار گیرد، ابهام وجود دارد.

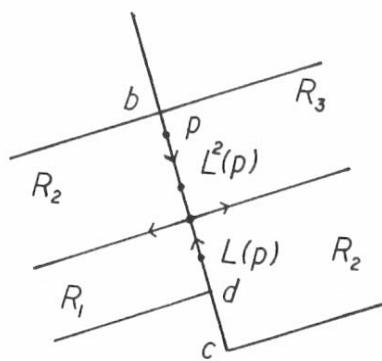
برای برطرف ساختن این مشکلات، با خارج قسمت زیرتغییرجا کار می‌کنیم. فرض کنید p نقطه‌ای روی مرز پایدار $R_2 \cap R_3$ باشد. فرض کنید $S(p) = (\dots s_0 s_1 s_2 \dots)$ دنباله‌ای باشد که به طور طبیعی به p نسبت داده می‌شود. از آنجاکه $p \in R_2 \cap R_3$ ، باید $s_0(p) = 2$ یا $s_0(p) = 3$ باشد. اکنون همان‌طور که در شکل ۵.۴ می‌بینیم $L(p)$ در اشتراک $R_1 \cap R_2$ قرار می‌گیرد.

تصاویر بعدی p به سمت عقب و به سمت جلو یعنی بین $R_2 \cap R_3$ و $R_1 \cap R_2$ جست و خیز می‌کنند. حال به $S(p)$ باز می‌گردیم. اگر $s_0(p) = 2$ ، آنگاه $s_1(p) = 1$ یا 2 است. با ادامه این بحث، باید داشته باشیم $(\dots s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots)$. از طرف دیگر، اگر $s_0(p) = 3$ ، آنگاه باید $(\dots s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots) = S(p)$. این بدان معنی است که دو انتخاب ممکن $(\dots s_{-2} s_{-1} s_0 s_1 \dots)$ و $(\dots s_{-1} s_0 s_1 s_2 \dots)$ باید نمایش‌دهنده یک نقطه در T باشند، یعنی، این دنباله‌ها باید یکی شوند. به طور کلی، دنباله‌هایی به یکی از صورتهای

$$(\dots s_{k-1} s_k 2121 \dots)$$

$$(\dots s_{k-1} s_k 3232 \dots)$$

باید یکی شوند چون آنها نماینده نقاطی هستند که درنهایت روی $W^s[0]$ فرود می‌آیند.



شکل ۵.۴

دو ابهام در $[W^u]$ وجود دارد. بررسی آنها را به خواننده واگذار می‌کنیم تا با کمک شکل ۶.۴، معلوم شود که جفت دنباله‌ها از نوع

$$(\dots 1212s_k s_{k+1} \dots)$$

$$(\dots 2121s_k s_{k+1} \dots)$$

باید یکی شوند. همین مطلب در مرور دنباله‌های

$$(\dots 2323s_k s_{k+1} \dots)$$

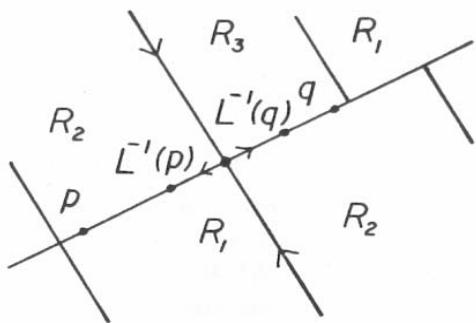
$$(\dots 3232s_k s_{k+1} \dots)$$

نیز صدق می‌کند.

اکنون فرض کنید $\tilde{\Sigma}_B$ نمایش‌دهنده "خارج قسمت" زیرتغییرجا از نوع متناهی باشد که از طریق همه یکی کردن‌های قبل به دست آمده است. توجه کنید σ به صورت طبیعی روی $\tilde{\Sigma}_B$ تعریف می‌شود. نگاشت S یک نگاشت یک به یک و پوشان از T به $\tilde{\Sigma}_B$ است که L را با σ مزدوج می‌کند یعنی،

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{L} & T \\ \downarrow s & & \downarrow s \\ \tilde{\Sigma}_B & \xrightarrow{\sigma} & \tilde{\Sigma}_B \end{array}$$

بررسی آن را به خواننده واگذار می‌کنیم.



شکل ۶.۴

ملاحظات.

۱. همه نقاط به شکل $(\dots ۱۲۱۲\dots, \dots ۲۱۲۱\dots, \dots ۲۲۲۳\dots)$ و $(\dots ۳۲۳۲\dots)$ در $\tilde{\Sigma}_B$ باید به صورت یکی شده در نظر گرفته شوند. از آنجاکه $\sigma(\dots ۱۲۱۲\dots, \dots ۲۱۲۱\dots)$, نتیجه می‌شود که این دنباله‌ها باید نمایش دهنده نقطه ثابت $[۰]$ باشند.

۲. یکی کردن در روند بالا فقط روی $[۰] W^s$ و $[۰] W^u$ که دینامیک L روی آنها نسبتاً سرراست است اتفاق می‌افتد. همه نقاط متناوب دیگر L در متمم این دو مجموعه قرار می‌گیرند. مسلماً $[۰] W^s$ و $[۰] W^u$ در T چگال هستند. با این وجود، S روی متمم خوش‌رفتار است و دینامیک آن قسمت را به خوبی توصیف می‌کند.

۳. در مرد پیوستگی S روی قسمتهای یکی شده در $\tilde{\Sigma}_B$ بحثی نمی‌کنیم و این بدان معنی است که توپولوژی روی فضای دنباله‌ها متفاوت از توپولوژی معمولی است.

افراز مارکوف ساخته شده در فوق هم کلی و هم خاص است. خاص است چون اعضای افزار، مستطیلهای واقعی هستند. همه چیزی که واقعاً به آن نیاز است این بود که مرزهای اعضای افزار روی مجموعه‌های پایدار و ناپایدار مناسب قرار بگیرند. استفاده از مجموعه‌های پایدار و ناپایدار بالا برای ساختن افزار مارکوف، یک قاعده کلی است. همه چیزی که مرد نیاز است این است که نگاشت این مجموعه‌ها را حفظ کند. برای مثال، مستطیلهای عمودی که در ساختن نعل اسپ استفاده شد، یک افزار مارکوف برای مجموعه کانتور متناظر یعنی Λ است. توجه کنید که در این حالت هیچ نیازی به یکسان سازی روی فضای دنباله‌ها نیست چون مستطیلهای با هم همپوشانی ندارند.

تمرین.

۱. فرض کنید L_A خودریختی هذلولوی روی چنبره باشد. نشان دهید

الف. نقاط هموکلینیک تراپا در T چگال هستند؛

ب. همه نقاط در T غیرسرگردان هستند (با مفهوم تمرین ۲.۷.۱)؛

ج. نقاط هموکلینیک، بازگشتی نیستند (با مفهوم تمرین ۳.۷.۱).

۲. می‌توان همانند آنچه در این بخش برای ساختن چنبره دو بعدی انجام شد برای تعریف چنبره بعدی به کار برد. یعنی، $[x_1, \dots, x_n]$ را نماینده مجموعه همه رده‌های هم ارزی نقاط در \mathbb{R}^n تحت رابطه هم ارزی

$$(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$$

قرار دهید اگر و تنها اگر $y_j - x_j \in \mathbb{Z}$ برای هر j عددی صحیح شود. در این صورت چنبره n بعدی، مجموعه همه چنین رده‌های هم ارزی نقاط در \mathbb{R}^n است. به صورت مشابه می‌توان یک خودریختی هذلولوی روی چنبره را با شروع از یک ماتریس A که در شرایط تعریف ۱.۴ صدق می‌کند تعریف کرد. توجه کنید که مجموعه‌های پایدار و ناپایدار در T^n لزوماً منحنی نیستند.

الف. ثابت کنید خودریختی هذلولوی روی چنبره T^n دارای نقاط متناوب چگال است.

ب. نشان دهید اگر $[p] \in T^n$ ، آنگاه $[W^s[p]]$ و $[W^u[p]]$ در T^n چگالند.

ج. نشان دهید خودریختی هذلولوی روی چنبره T^n آشوبناک است.

۳. ثابت کنید T^n ، همسان‌ریخت با حاصل ضرب خارجی n تایی زیر است

$$\underbrace{S^1 \times \dots \times S^1}_{n \text{ بار}}.$$

۴. نگاشت $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ را که با $A(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ داده می‌شود درنظر بگیرید. A یک نگاشت روی T^n دقیقاً همانند خودریختی هذلولوی روی چنبره القاء می‌کند ولی نگاشت القایی، دیگر دیفیومورفیسم نیست.

الف. ثابت کنید نقاط متناوب برای این نگاشت چگال هستند.

ب. نشان دهید نقاط نهایتاً ثابت چگال هستند.

ج. ثابت کنید این نگاشت روی T^n آشوبناک است.

۵. فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

یک افزار مارکوف برای L_A بسازید.

۶. فرض کنید L_A یک خودریختی هذلولوی روی T و $[p] \in W^s[0] \cap W^u[0]$ یک نقطه هموکلینیک باشد. فرض کنید ℓ_s قطعه‌ای در $[0] \cap W^s$ باشد که $[0]$ را به $[p]$ وصل کند و ℓ_u قطعه مشابهی در $[0] \cap W^u$ باشد. یک مستطیل R شامل ℓ_s با اضلاع روی مجموعه‌های پایدار و ناپایدار بسازید.

الف. نشان دهید عدد صحیحی چون n موجود است به‌طوری که $\ell_u \subset L_A^n(R)$.

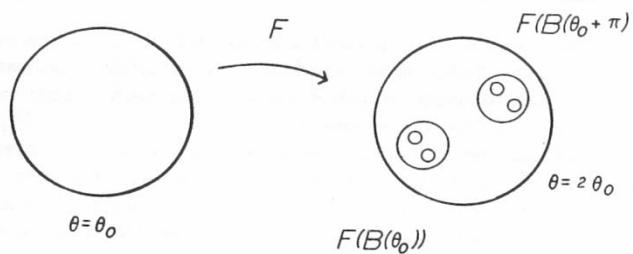
ب. ثابت کنید می‌توان $[p]$ را چنان برگزید که $L_A^n(R) \rightarrow \mathbb{R}$ با نگاشت خطی که نعل اسب را در بخش ۳.۲ تولید کرد مزدوج توپولوژیکی شود.

۵ ریاینده‌ها

در این بخش، نوع سومی از یک پدیده دینامیکی با ابعاد بالاتر، با نام ریاینده‌ها را معرفی می‌کنیم. به بیان عامیانه، یک ریاینده یک مجموعه پایاست که همه مدارهای نزدیک آن، به آن همگرا هستند. بنابراین ریاینده‌ها، مجموعه‌هایی هستند که هنگام تکرار سیستم دینامیکی در یک کامپیوتر "دیده" می‌شوند. تا اینجا همه ریاینده‌هایی که با آنها سروکار داشتیم، نقاط ثابت یا متناوب بوده‌اند. در اینجا دو ریاینده بسیار پیچیده‌تر جدید با نامهای سیم‌لوله و ریاینده پلایکین^۳ را معرفی می‌کنیم. اینها مثالهایی از نوع خاصی از ریاینده‌ها هستند که با نام تراپا یا هذلولوی شناخته می‌شوند. خواهیم دید که این ریاینده‌ها از بسیاری جهات مشابه نگاشت نعل اسب و خودریختی هذلولوی روی چنبره هستند. برای مثال، مجموعه‌ای وجود دارد که نگاشت روی آن آشوبناک است و از هر نقطه از این مجموعه، مجموعه‌هایی پایدار و ناپایدار عبور می‌کنند. چون اینها پدیده‌هایی آشنا هستند، بررسی جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم.

سیم‌لوله ریاینده‌ای است که داخل یک چنبره "توپر" قرار می‌گیرد. این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید S^1 دایره واحد و B^2 قرص واحد در صفحه باشد؛ یعنی

$$B^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$



شکل ۱.۵. ساختن سیم‌لوله

حاصل ضرب دکارتی $S^1 \times B^2 = D$ یک چنبره توپر در \mathbb{R}^3 است. مرز آن همان‌طور که در بخش قبل توصیف شد یک چنبره است. برای توصیف سیم‌لوله، نگاشت F را طوری در نظر بگیرید که D را کاملاً به درون خودش با فرمول

$$F(\theta, p) = (2\theta, \frac{1}{10}p + \frac{1}{2}e^{2\pi i\theta})$$

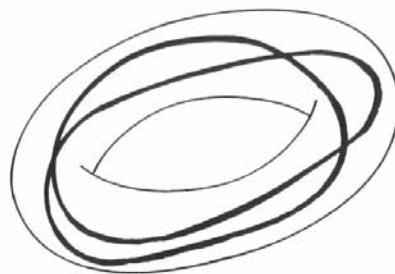
بنگارد که در آن $p \in B^2$ و $e^{2\pi i\theta} = (\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta)) \in S^1$

به صورت هندسی، F را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد. فرض کنید $\theta^* \in S^1$. قرص $B(\theta^*)$ که برای p دلخواه، با $\theta = \theta^*$ داده می‌شود توسط F به توی قرص دیگری که با $(2\theta^*)$ داده می‌شود نگاشته شده است. تصویر این قرص، یک قرص با شعاع $\frac{1}{10}$ و مرکز $(\cos(2\theta^*), \sin(2\theta^*))$ در $(2\theta^*)$ است. شکل ۱.۵ را ببینید. قرصی که در $\theta^* + \pi = \theta$ واقع شده نیز به توی قرصی که با $\theta = 2\theta^*$ داده می‌شود نگاشته می‌شود ولی تصویر آن، قرص کوچکی با شعاع $\frac{1}{10}$ است که در نقطه مقابل $(2\theta^*)$ در $B(\theta^*)$ قرار می‌گیرد.

می‌توان F را به صورت سراسری، به شکل زیر تفسیر کرد. در مختصات θ ، F به صورت ساده، نگاشت دوباره ساز روی دایره است که در مثال ۴.۳ در فصل اول توصیف شد. در جهت F, B^2 ، یک منقبض کننده قوی است که تصویر آن قرصی است که مرکز آن به θ وابسته است. تصویر قرص $\frac{1}{10}$ اندازه تصویر اولیه است. بنابراین تصویر D ، یک چنبره توپر دیگر در داخل D است که دوبار دور D می‌پیچد. شکل ۲.۵ را ببینید.

این نکته که در یک جهت ایجاد انساط و در جهت دیگر ایجاد انقباض می‌کند یک پدیده آشناست که یاد آور هر دو نگاشت نعل اسب و خودریختی هذلولوی روی چنبره است.

از آنجاکه F پوشانیست پس دیفریومorfیسم هم نیست. ما به D به عنوان یک قطعه از یک فضای بزرگ‌تر و به عمل F روی D فقط به عنوان قسمتی از دینامیک نگاه می‌کنیم. از آنجاکه $F(D) \subset D$ ،



شکل ۲.۵. تصویر چنبره توپر تحت F یک چنبره توپر است که دوباره دور خود پیچیده است.

نتیجه می‌شود که همه مدارهای پیشرو در D داخل D قرار می‌گیرد. نواحی چون D ، دارای نام خاصی هستند.

تعریف ۱.۵ ناحیه بسته $N \subset \mathbb{R}^n$ ، یک ناحیه تله برای F است، هرگاه $F(N)$ مشمول در درون N باشد.

از آنجاکه $F(N)$ بسته بوده و $F(N) \subset N$ ، نتیجه می‌شود که همه مجموعه‌های $F^n(N)$ برای $n \geq 0$ بسته و تودرتو هستند. بنابراین

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} F^n(N)$$

یک مجموعه بسته و ناتھی است. مجموعه Λ مجموعه نقاطی است که مدار کامل آنها یعنی هر دو مدار پیشرو و پسروی آنها در کل زمان در N باقی می‌ماند. Λ مجموعه ریانده ما خواهد بود.

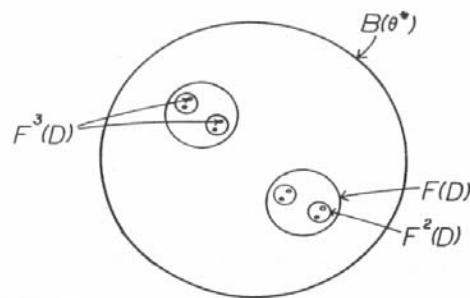
قضیه ۲.۵ Λ یک مجموعه پایاست.

برهان. داریم

$$F(\Lambda) = F\left(\bigcap_{n \geq 0} F^n(N)\right) = \bigcap_{n \geq 0} F^n(N) \subset N,$$

ولی

$$\bigcap_{n \geq 0} F^n(N) = \bigcap_{n \geq 1} F^n(N)$$



شکل ۳.۵. اشتراک $F^n(D)$ به مجموعه کانتور منجر می‌شود.

چون اشتراک‌ها تودرتو هستند. بنابراین $F(\Lambda) = \Lambda$ و Λ پایاست. پایابی تحت F^{-1} نیز به همین ترتیب حاصل می‌شود. \square

تعریف ۳.۵ مجموعه Λ یک رباينده برای F نامیده می‌شود، هرگاه همسایگی N از Λ موجود باشد به طوری که بستار N یک ناحیه تله بوده و

$$\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} F^n(N).$$

تعاریف دیگری نیز برای رباينده متدال است. تعریف ما به هیچ وجه استاندارد نیست اگرچه ممکن است ساده‌ترین تعریف باشد. این تعریف دارای این عیب است که یک رباينده منفرد غیرقابل تجزیه تولید نمی‌کند. برای مثال ناحیه "استادیوم" D برای نگاشت نعل اسپ در بخش ۳.۲ یک ناحیه تله است. ناحیه رباينده از دو قسمت تشکیل شده است؛ نقطه ثابت در D_1 و مجموعه پایای کانتور به همراه همه مجموعه‌های ناپایدارش. از طرف دیگر ناحیه $D_1 \subset D$ نیز یک ناحیه تله است ولی این بار رباينده کاملاً متفاوت است و فقط از نقطه ثابت در D_1 تشکیل شده است. برای اصلاح این مطلب، اصطلاح زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۴.۵ یک رباينده ترایا برای F است، هرگاه F ترایای توپولوژیکی روی Λ باشد.

هدف ما این است که نشان دهیم رباينده $\Lambda = \bigcap_{n \geq 0} F^n(D)$ برای نگاشت بالا یک رباينده ترایا بوده و در واقع، دینامیک F روی Λ آشوبناک است.

اکنون به بررسی طبیعت مجموعه Λ می‌پردازیم. از آنجاکه F ، مجموعه D را در جهت S^1 کشیده‌تر می‌کند و در جهت B^2 با ضریب $\frac{1}{n}$ منقبض می‌کند، نتیجه می‌شود که $F(D)$ یک چنبره با شعاع $\frac{1}{n}$ است که دویار دور D می‌پیچد. با تأثیر F روی $(F(D), F^*(D))$ می‌بینیم که $F^*(D)$ یک چنبره با شعاع $\frac{1}{n}$ در جهت B^2 است که ۴ بار دور D می‌پیچید و کاملاً در $(F(D), F^*(D))$ جای می‌گیرد. به طور استقرایی، $(F^n(D), F^{n+1}(D))$ یک چنبره با شعاع $\frac{1}{n}$ است که دقیقاً ۲ⁿ بار دور D پیچیده و مشمول در $F^{n+1}(D)$ است.

در هر $(B(\theta^*), F^n(D))$ گردایه‌ای تودرتواز 2^n قرص همانند شکل ۳.۵ است. ما قبلاً به چنین روندی برخورد کردی‌ایم؛ خاصیت تودرتوى $F^n(D)$ منجر به یک مجموعه کانتور در هر قرص $B(\theta^*)$ می‌شود.

اگر ساختن فوق را در یک قطعه استوانه‌ای از D از نوع

$$C = \{(\theta, p) \mid \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

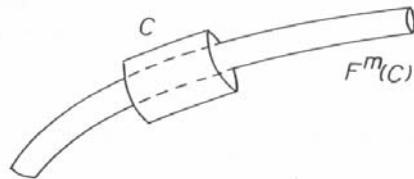
نمایش دهیم، می‌بینیم که $C \cap \Lambda$ به طور موضعی به صورت حاصل ضرب دکارتی یک مجموعه کانتور و یک کمان در جهت S^1 است. کمانها به وسیله اشتراک تودرتوى 2^n لوله در $C \cap F^n(D)$ داده می‌شوند. از آنجاکه هر تکرار از F شعاع این لوله‌ها را با ضریب $\frac{1}{n}$ کاهش می‌دهد، بنابراین واضح است که کمانها پیوسته هستند. با این حال، ما این مطلب را در آینده با یک روش کاملاً متفاوت اثبات می‌کنیم. در حقیقت، نشان می‌دهیم این منحنیها، هموار هستند. مجموعه Λ یک سیم لوله نامیده می‌شود.

اکنون به دینامیک F در کنار و روی Λ بر می‌گردیم. فرض کنید $(\theta_0, p_0) \in \Lambda$. فرض کنید $x \in C \cap \Lambda$ که $\theta_0 \in S^1$ و $p_0 \in B^2$. فرض کنید $(\theta_n, p_n) = F^n(x)$. قرص $(\theta_n, p_n) \in B(\theta_0)$ را در نظر بگیرید. از آنجاکه F را به درون $B(2\theta_0)$ منکارد، نتیجه می‌شود که $(F^n(B(\theta_0))) \subset B(\theta_n)$. علاوه بر آن، هر عمل F را با ضریب $\frac{1}{n}$ منقبض می‌کند. بنابراین، اگر $y \in B(\theta_0)$ ، نتیجه می‌شود که $F^n(y) \in B(\theta_n)$ و $|F^n(x) - F^n(y)| < \frac{1}{n}$ ، که در اینجا مقدار قدر مطلق، همان قدر مطلق استاندارد است. بنابراین، (θ_0, p_0) ، قسمتی از مجموعه پایدار $(x, W^s(x))$ متناظر با x است.

به طور مشابه، کمان ساخته شده در فوق به عنوان اشتراک تودرتوى این لوله‌ها حول x ، قسمتی از مجموعه ناپایدار x است که با $(W^u(x), F^{-1}(x))$ نمایش داده می‌شود. این مطلب از اینکه F^{-1} فاصله‌ها را در طول کمان با ضریب $\frac{1}{n}$ منقبض می‌کند، نتیجه می‌شود. بنابراین می‌بینیم که همه این نقاط در Λ همانند مجموعه‌های نعل اسب و خودریختی‌های چنبره هذلولوی مجهز به مجموعه‌های پایدار و ناپایدار هستند.

قضیه ۵.۵

۱. روی Λ وابستگی حساس به شرایط اولیه دارد.



شکل ۵. ۴.۵. تصویر $C, F^m(C)$ را می‌برد.

۲. در Λ چگال است. $\text{Per}(F)$

۳. روی Λ ترایای توپولوژیکی است.

برهان. برای دیدن وابستگی حساس به شرایط اولیه، کافیست به این مطلب ساده توجه کنیم که هر نقطه در کمان ناپایدار متناظر با $x \in \Lambda$ با تکرار F ، از نقطه x با ضریب ۲ در جهت θ دور می‌شود. برای اثبات چگال بودن نقاط متناوب، فرض کنید U یک همسایگی (θ_0, p_0) باشد. $\delta > 0$ موجود است به‌طوری که لوله C در $F^n(D)$ با تعریف $n \in \mathbb{Z}$

$$C = \left\{ (\theta, z) \mid |\theta - \theta_0| < \delta, |z - p_0| < \frac{1}{10^n} \right\}$$

به‌طور کامل مشمول در U باشد. یک نقطه متناوب در C تولید می‌کنیم. برای این کار یادآوری می‌کنیم که $(F^n(D))^{2^n}$ دقيقاً 2^n بار به دور D می‌پیچد. نقطه‌ای مانند m را طوری انتخاب می‌کنیم که $2 \cdot 2^n > 2^{n+1} 4\pi$. در این صورت $F^m(C)$ لوله‌ای است که در $F^n(D)$ قرار می‌گیرد و حداقل $2 \cdot 2^n$ بار دور D می‌پیچد. بنابراین $F^m(C)$ همانند شکل ۴.۵ حداقل یک بار C را می‌برد. درنتیجه θ^* موجود است به‌طوری که $\delta < |\theta^* - \theta_0|$ و $F^m(B(\theta^*) \cap C) \subset B(\theta^*) \cap C$. از این‌رو $F^m(B(\theta^*) \cap C)$ یک نقطه ثابت در $B(\theta^*) \cap C$ دارد.

بحث مشابهی، ترایای توپولوژیکی بودن F را نشان می‌دهد. چون اگر $x, y \in \Lambda$ و U, V به ترتیب همسایگی‌هایی از x و y باشند، می‌توانیم لوله‌هایی مانند بالا در $F^n(D)$ حول x و y تولید کنیم به‌طوری که کاملاً مشمول در U و V شوند. تکرارهای زیاد مناسبی از این لوله‌ها * ای تولید می‌کند که $B(\theta^*) \cap U$ یک قرص است که به‌توی V نگاشته می‌شود. به‌سادگی می‌توان بررسی کرد که یک نقطه در $\Lambda \cap U$ درون $B(\theta^*) \cap V$ موجود است. \square

همانند مثالهای قبلی مان، از دینامیک نمادین برای نمایش دینامیک F روی Λ استفاده می‌کنیم. این‌بار، ساختار متفاوتی را که نخستین بار توسط آرف. ویلیامز بیان شد به کار می‌بریم. فرض کنید

$S^1 \rightarrow S^1$ فضای حد وارون $g : S^1$ با ضابطه $g(\theta) = 2\theta$ نگاشت دوبرابر ساز باشد. مدل ما برای Λ

$$\Sigma = (S^1 \xleftarrow{g} S^1 \xleftarrow{g} S^1 \dots)$$

خواهد بود. به طور دقیق‌تر

$$\Sigma = \{\theta = (\theta_0 \theta_1 \theta_2 \dots) \mid \theta_j \in S^1, g(\theta_{j+1}) = \theta_j\}.$$

بنابراین Σ از همه دنباله‌های نامتناهی از نقاط S^1 با این محدودیت که θ_{j+1} یکی از دو پیش تصویر θ_j برای هر j است تشکیل شده است. برخلاف فضاهای دنباله‌ای قبلی‌مان، اعضای Σ دنباله‌هایی نیستند که درایه‌های آنها اعداد صحیح باشند، بلکه درایه‌ها در این حالت نقاط درون دایره هستند. برای مثال همه دنباله‌های

$$(0 \ 0 \ 0 \ \dots)$$

$$(0 \ \pi \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{3} \frac{\pi}{3} \dots)$$

$$(\frac{\pi}{3} \frac{2\pi}{3} \frac{\pi}{3} \frac{2\pi}{3} \frac{\pi}{3} \dots)$$

متعلق به Σ هستند. با استفاده از نگاشت دوبرابر ساز g ، می‌توانیم به این دنباله‌ها به عنوان مدارهای پسرو بنگریم:

$$0 \xleftarrow{g} 0 \xleftarrow{g} 0 \xleftarrow{g} \dots$$

$$0 \xleftarrow{g} \pi \xleftarrow{g} \frac{\pi}{3} \xleftarrow{g} \frac{\pi}{3} \xleftarrow{g} \dots$$

$$\frac{\pi}{3} \xleftarrow{g} \frac{2\pi}{3} \xleftarrow{g} \frac{\pi}{3} \xleftarrow{g} \frac{2\pi}{3} \xleftarrow{g} \dots$$

یک متریک مشابه آنچه در Σ_n انجام دادیم روی Σ تعریف می‌کنیم. اگر $\Theta = (\theta_0 \theta_1 \theta_2 \dots)$ و $\Psi = (\psi_0 \psi_1 \psi_2 \dots)$ نقاطی در Σ باشند، فاصله بین آنها را به صورت

$$d[\Theta, \Psi] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|e^{2\pi i \theta_j} - e^{2\pi i \psi_j}|}{2^j}$$

تعریف می‌کنیم که $|\alpha - \beta|$ نشان‌دهنده فاصله اقلیدسی معمولی در صفحه است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که d یک متریک روی Σ است. بعلاوه، دو نقطه "نزدیک" هستند اگر هر یک از چند درایه ابتدای آنها نزدیک به هم باشد.

روی Σ یک نگاشت طبیعی که نسخه‌ای از تغییرجاست به صورت

$$\sigma(\theta_0 \theta_1 \theta_2 \dots) = (g(\theta_0) \theta_1 \theta_2 \dots)$$

وجود دارد. همانند بخش قبلی، به راحتی دیده می‌شود که σ یک همسان‌ریختی است. وارون σ با نگاشتی داده می‌شود که یادآور نگاشت تغییرجای قبلی مان است (که یک همسان‌ریختی است).
عنی

$$\sigma^{-1}(\theta_0\theta_1\theta_2\dots) = (\theta_1\theta_2\theta_3\dots).$$

همانند مدل‌های قبلی، دینامیک این نگاشت به سادگی قابل درک است. اگر θ یک نقطه متناوب g با تناوب n باشد، آنگاه دنباله تکرارشونده $(\theta, g^{n-1}(\theta), g^{n-2}(\theta), \dots, g(\theta), \theta, \dots)$ به‌وضوح یک نقطه متناوب با تناوب n برای σ است. همانند مثال‌های دیگر، به راحتی می‌توان بررسی کرد که σ دارای نقاط متناوب چگال در Σ بوده و همچنین σ دارای یک مدار چگال است. تمرینهای ۳ و ۴ را ببینید.

نگاشتهای σ و F چگونه به هم مربوط می‌شوند؟ فرض کنید $D : S^1 \rightarrow \pi$ یک تابع تصویر طبیعی باشد، یعنی $\theta = \pi(\theta, p)$. برای هر نقطه $x \in \Lambda$ ، نگاشت $\Sigma : \Lambda \rightarrow S$ که با

$$S(x) = (\pi(x), \pi F^{-1}(x), \pi F^{-2}(x), \dots)$$

داده می‌شود خوش‌تعريف است. این مطلب از آنجا ناشی می‌شود که می‌توان F را روی Λ وارون کرد حتی اگر F^{-1} روی کل D تعريف نشده باشد. به‌وضوح، $S \circ F = \sigma \circ S$ ، چون F نگاشت دوباره‌ساز در جهت S^1 است.
برهان مطلب زیر را به عنوان یک تمرین به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۶.۵ نگاشت S مزدوج توپولوژیکی بین F روی Λ و σ روی Σ است.

از این تزویج برای پر کردن خلاه بالا برای اثبات اینکه مجموعه‌های ناپایدار در Λ منحنی هستند استفاده می‌کنیم. برای سادگی، این موضوع را فقط برای نقطه ثابتی که متناظر با دنباله (θ, θ, \dots) است ثابت می‌کنیم. به راحتی می‌توان بررسی کرد که این نقطه $\theta = 0$ و $p = B^2$ است.

قضیه ۷.۵ مجموعه ناپایدار 0 برای هر $x \in \mathbb{R}$ دقیقاً از دنباله‌هایی به فرم

$$(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{2^2}, \frac{x}{2^3}, \dots)$$

تشکیل شده است.

برهان. با توجه به تعريف داریم $(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \dots)^{-1} = (\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \frac{x}{8}, \dots)$. بنابراین نتیجه می‌شود که اگر $\sigma^{-n}(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \dots) \rightarrow 0$ برای اثبات عکس قضیه، ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر $\theta \in S^1$ ،

آنگاه $(\theta)^{-1} g$ یکی از مقادیر $\frac{\theta}{\pi} + \pi$ است. اکنون قرار دهید $(0) \in W^n(0) = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$. عددی مانند N موجود است به طوری که اگر $n \geq N$, آنگاه $1 < |\theta_n|$. بنابراین همه $\theta_N, \theta_{N+1}, \theta_{N+2}, \dots$ در نیم دایره سمت راست S^1 قرار می‌گیرند. نتیجه می‌شود $\theta_{N+1} = \frac{\theta_N}{\pi}$. همچنین بقیه پیش تصویرهای $\pi + \frac{\theta_N}{\pi}$ در نیم دایره سمت چپ S^1 قرار می‌گیرند. با ادامه این روند، درمی‌یابیم که $\theta_{N-k} = 2^k \theta_N$ و $\theta_{N+k} = \frac{\theta_N}{2^k}$ و از این رو Θ دارای شکل مفروض است. \square

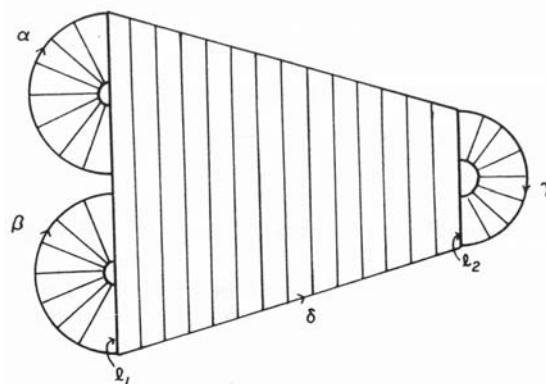
درنتیجه، مجموعه ناپایدار 0 در Σ به وسیله \mathbb{R} پارامتری می‌شود؛ تحت تزویجی که با S داده می‌شود، مجموعه ناپایدار نقطه ثابت، خم پیوسته‌ای است که تصویر $(0) \in W^u$ است.

نوع ساختن حد وارون برای یک رده از ریاضیده‌ها که با نام ریاضیده‌های انبساطی شناخته می‌شوند، نیز کار می‌کند. این ریاضیده‌ها به وسیله گسترش یکنواختی که در درون خود ریاضیده انجام می‌گیرد مشخص می‌شوند. همانند مثال سیم‌لوه، چنین ریاضیده‌هایی را می‌توان به وسیله یک حد وارون از یک نگاشت انبساطی با بعد کمتر مثل $2\theta \rightarrow \theta$ روی S^1 نمایش داد. در حالت عمومی تر تفاوت اصلی در این است فضای مدل در این حالت بسیار پیچیده‌تر از S^1 است؛ معمولاً به صورت یک "خمینه شاخه‌ای" است. این مفهوم توسط آر. اف. ویلیامز معروف شده است و ما آن را از طریق یک مثال که پلایکین معرفی کرد بیان می‌کنیم. به جای اینکه برای این نگاشت فرمولی ارائه دهیم، آن را همانند مثال نگاشت نعل اسب، به صورت هندسی تعریف می‌کنیم.

ناحیه R را در صفحه که در شکل ۵.۵ نشان داده شده است، در نظر بگیرید. R ناحیه‌ای است که سه نیم قرص باز از آن حذف شده است. روی R یک برگ‌بندی قرار می‌دهیم. برگها بازه‌هایی هستند که در شکل ۵.۵ نشان داده شده است. یادآوری می‌کنیم که این بدین معنی است که یک قطعه خط از هر نقطه از R (هر برگ) می‌گذرد و برگها دوبعداً مجرماً هستند.

نگاشت $P : R \rightarrow R$ که در شکل ۶.۵ نشان داده شده است، تعریف کنید. می‌خواهیم P حافظ و منقبض کننده برگ‌های برگ‌بندی باشد. توجه کنید که $P(R)$ مشمول در درون R است به طوری که یک ناحیه تله است. مجموعه $P^n(R) = \bigcap_{n \geq 0} P^n(R)$ ریاضیده پلایکین است.

برای درک دینامیک P ، ابتدا توجه می‌کنیم که هر دو نقطه روی یک برگ، تحت تکرارهای P یکسان عمل می‌کنند. از آنجاکه برگ‌ها منقبض می‌شوند، هر دو چنین نقطه‌ای با رفتار مجانبی مشابهی به ریاضیده میل می‌کنند. بنابراین، برای درک عمل P به صورت سرتاسری، کافیست عمل P را روی هر یک از برگ‌ها بدانیم. بنابراین هر برگ را همانند شکل ۷.۵ در یک نقطه جمع می‌کنیم و تابع القاء شده روی این فضا را دوباره بررسی می‌کنیم. مشاهده می‌کنیم که فضای جمع شده، دارای نقاط "شاخه‌ای" در طول برگ‌های منفرد ℓ_1 و ℓ_2 است. این فضا، "خمینه" شاخه‌ای برای P نامیده می‌شود. ما دینامیک Γ را با توصیف اینکه چگونه هر یک از ۴ بازه α, β, γ و δ نگاشته می‌شوند توصیف می‌کنیم. با توجه به شکل ۷.۵، می‌بینیم که نگاشت القایی g روی Γ دو رأس را پایا

شکل ۵.۵. ناحیه R برای رباينده پلايکين.

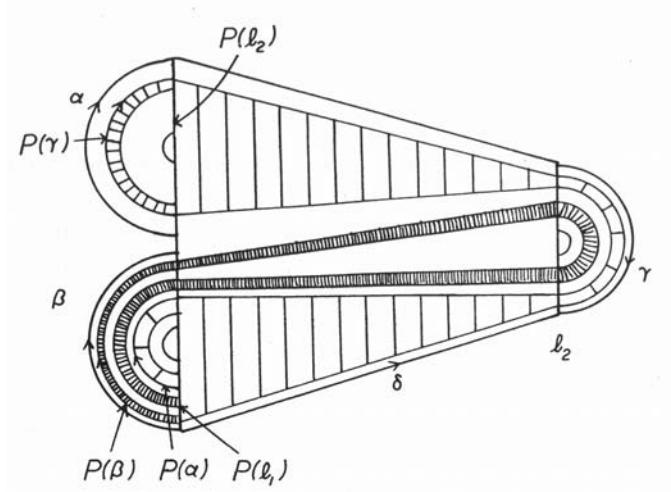
نگاه می‌دارد و سایر بازه‌ها را به‌این ترتیب می‌نگارد:

$$\begin{array}{rcl} \alpha & \rightarrow & \beta \\ \beta & \rightarrow & \beta + \delta + \gamma - \delta - \beta \\ \gamma & \rightarrow & \alpha \\ \delta & \rightarrow & \delta - \gamma - \delta, \end{array}$$

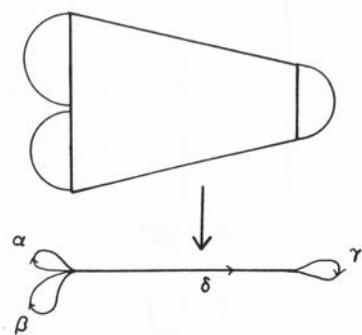
که علامتها نشان‌دهنده گرایشها یا جهتهایی است که تصویر، بازه داده شده را قطع می‌کند. ما چنین نگاشتی را طوری می‌سازیم که g همه جهتهای را در خمینه شاخه‌ای Γ انبساط دهد.

در سیم‌لوله، یک ساختن مشابه را می‌توان با فروکش کردن در جهتهای B^2 (برگ‌های برگ‌بندي D) به‌روی یک دایره (یک خمینه غیرشاخه‌ای) انجام داد که روی آن نگاشت g به شکل ساده $\rightarrow \theta$ تعریف می‌شود. از آنجاکه دینامیک $2\theta \rightarrow \theta$ را به صورت کامل می‌دانیم، می‌توانیم از ساختار حد وارون برای تحلیل سیم‌لوله استفاده کنیم. روند مشابهی برای رباينده پلايکين قابل انجام است.

برای مثال می‌توان نشان داد که $\Gamma \rightarrow \Gamma : g$ دارای نقاط متناظر چگال به صورت زیر است. فرض کنید I "زیربازه‌ای" از Γ باشد. از آنجاکه g انبساطی است، نتیجه می‌شود که n ای موجود است که $(I)g^n$ یکی از چهار بازه α, β, γ و δ را پوشاند. اکنون می‌توان به راحتی بررسی کرد که عدد صحیحی چون m هست به‌گونه‌ای که $\Gamma \supset (I)g^m(\xi)$ یکی از α, β, γ یا δ است. درواقع، $g(\alpha) = \beta, g(\beta) = \gamma, g(\gamma) = \delta$ و $g(\delta) = \alpha$. بنابراین $\Gamma \supset (I)g^{m+n}$ و نتیجه می‌شود که یک نقطه متناظر در I موجود است. حال با استفاده از ساختار حد وارون می‌توان عمل P را روی Λ با تغییرجا روی ... $\Sigma = \Gamma \xleftarrow{g} \Gamma \xleftarrow{g} \Gamma \dots$ یکسان قرار داد. جرئیات را به خواننده واگذار می‌کیم.



شکل ۶.۵. ریابینده پلایکین.



شکل ۷.۵. خمینه شاخه‌ای برای ریابینده پلایکین

ملاحظات.

۱. تحقیقات روی موضوع ”رباینده‌های غریب“ گسترش یافته است که به صورت نادقيق، به عنوان رباینده‌هایی که به طور توپولوژیکی متفاوت از یک مدار متناوب یا یک ”دایره حدی“ هستند، تعریف می‌شوند (مثل یک منحنی ساده بسته پایای جاذب که معمولاً از حل یک معادله دیفرانسیل معمولی حاصل می‌شود). ما عبارت رباینده‌های ”هذلولوی“ را برای رباینده‌هایی مانند سیم‌لوله و مثال پلایکین ترجیح می‌دهیم. درواقع، از آنجاکه توانستیم این نگاشتها را به طور کامل تحلیل کنیم، دیگر هیچ چیز ”غیربی“ درمورد آنها وجود ندارد.

۲. رباینده‌هایی وجود دارند که ممکن است تحلیل آنها به سادگی امکان‌پذیر نباشد. یکی از آنها رباینده هنون است که در تمرین ۱۰ توصیف خواهد شد. محاسبات عددی نشان می‌دهد که این نگاشت ساده درجه دو روی صفحه دارای یک رباینده تراپاست اگرچه این موضوع اثبات نشده است. ما خواننده‌ای را که به کامپیوتر با گرافیک دسترسی دارد تشویق می‌کنیم که تکرارهای پشت سرهم یک نقطه از این نگاشت را رسم کند. نتیجه همیشه از نظر کیفی به یک شکل بوده (بدون توجه به چند تکرار اول) و همیشه هم جذاب است! ما در بخش ۹.۲ به این نگاشت باز می‌گردیم و در آنجا آن را از دیدگاه دیگری بررسی می‌کنیم.

تمرین.

۱. یک افزار مارکوف برای سیم‌لوله بسازید.

۲. نشان دهید

$$d[\Theta, \Psi] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{|\theta_j - \psi_j|}{\varphi_j}$$

برای نقاط Θ و Ψ در Σ ، یک متريک روی Σ است.

در تمرینهای زیر، فرض کنید $\Sigma \rightarrow \sigma$: یک نگاشت تغییرجا روی فضای حد وارون $S^1 \xrightarrow{g} S^1 \leftarrow S^1$ برای سیم‌لوله است.

۳. نشان دهید نقاط متناوب σ در Σ چگالند.

۴. ثابت کنید که σ دارای یک مدار چگال است.

۵. نشان دهید σ یک همسان‌بختی است.

۶. نشان دهید $\Sigma : \Lambda \rightarrow S$ یک تزویج توپولوژیکی بین F و σ ایجاد می‌کند.

۷. فرض کنید $R \rightarrow P$: R نگاشت پلایکین معرفی شده در شکل ۶.۵ باشد و فرض کنید $R \subset \Lambda$ باشد. ریاضی‌نگاشت پلایکین متناظر با خمینه شاخه‌ای Γ باشد.

الف. نشان دهید P روی Λ آشوبناک است.

ب. نشان دهید P روی Λ مزدوج توپولوژیکی با نگاشت تغییرجا روی فضای حد وارون

$$\Gamma \xleftarrow{g} \Gamma \xleftarrow{g} \Gamma \xleftarrow{g} \dots$$

است.

۸. فرض کنید $\Gamma \rightarrow \Gamma : g$ یک نگاشت ابیساطی روی خمینه شاخه‌ای تعریف شده در شکل ۷.۵ باشد. فرمولی برای تعداد نقاط متناوب با تناوب n برای g بیابید.

۹. نگاشت DA. در این سری از تمرینها، نشان می‌دهیم که چگونه خودریختی هذلولوی چنبره که در بخش قبل معرفی شد، می‌تواند با کمی تغییر، یک نگاشت با ریاضی‌نگاشت تراپا روی چنبره تولید کند.

الف. نگاشت خطی L را که به صورت

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}x \\ y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}y \end{aligned}$$

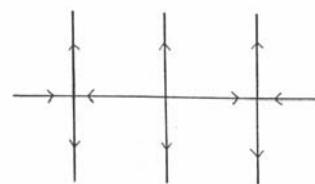
تعریف می‌شود در نظر بگیرید. نگاشتی مانند ϕ بسازید که فقط به x وابسته باشد و نمای فاز L° همانند شکل ۸.۵ باشد.

ب. با استفاده از نگاشتهای برآمدگی که در بخش ۲.۱ توصیف شد، یک نگاشت جدید ψ بسازید به طوری که روی یک همسایگی کوچک U از $^\circ$ همانند ϕ بوده و خارج از یک همسایگی چون V شامل U ، برابر با نگاشت همانی حافظ خطوط افقی در \mathbb{R}^2 باشد. نشان دهید که می‌توان ψ را طوری انتخاب کرد به طوری که نمای فاز L° ψ همانند شکل ۹.۵ باشد.

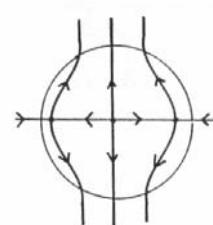
ج. برای یک همسایگی از $[^\circ]$ در چنبره، این تکنیک را روی خودریختی خطی هذلولوی تولید شده توسط ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

که در بخش ۴.۲ توصیف شد، اعمال کنید. نگاشت حاصل یعنی F ، یک نگاشت DA نامیده می‌شود. نشان دهید این نگاشت یک دیفیومورفیسم است.



شکل ۸.۵



شکل ۹.۵

د. نشان دهید یک همسایگی W از 0 در T هست به طوری که F ناحیه $T - W$ را به صورت اکید به داخل خودش می‌نگارد.

ه. با نشان دادن اینکه برگ‌بندی پایدار اصلی برای خودریختی چنبره هذلولوی هنوز توسط F روی $T - U$ حفظ می‌شود، ثابت کنید که $(\bigcap_{n=0}^{\infty} F^n(T - U)) = \Lambda$ یک رباینده ترایاست.

۱۰. رباینده هنون. دیفیومورفیسم روی صفحه را که به وسیله

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + y - 1.4x^2 \\y_1 &= 0.3x\end{aligned}$$

داده می‌شود در نظر بگیرید. این حالت خاصی از نگاشت هنون است که در بخش ۹.۲ مطالعه شد.

الف. چهارضلعی Q در صفحه با رئوس در نقاط $(1.32, 0.132)$, $(-1.33, 0.42)$, $(-1.32, 0.132)$ و $(-0.5, -0.6)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید $F(Q) \subset Q$

ب. با استفاده از یک کامپیوتر، 10000 تکرار از یک نقطه در Q را محاسبه کنید. نقطه آخری را رسم کنید. توجه کنید که تصویر حاصل، بدون توجه به نقطه (تصادفی) اولیه‌ای که انتخاب می‌شود به یک صورت است. این "رباینده غریب" نگاشت هنون است که هنوز به صورت کامل شناخته شده نیست.

۱۱. رباینده لوزی^۴. نگاشت تکه‌تکه خطی روی صفحه را که با

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y - A|x| \\ Bx \end{pmatrix}$$

داده می‌شود در نظر بگیرید که A و B دو پارامتر هستند. فرض کنید A و B در شرایط $1 < B < 10$ و $4 < A + B < 10$ صدق می‌کنند. تحت این شرایط

الف. نشان دهید L دارای دو نقطه ثابت است که یکی از آنها در ربع اول قرار می‌گیرد. آن را می‌نامیم p .

ب. نشان دهید مجموعه ناپایدار (p) W^u شامل یک خط راست است که محور x را در یک نقطه q و محور y را در (q) L^{-1} قطع می‌کند.

ج. فرض کنید ℓ نماینده قطعه خط راست (p) W^u شامل نقاط q و (q) L^{-1} باشد. (q) L^2 را رسم کنید.

د. مثلث T را با رئوس در q ، $L(q)$ و $L^2(q)$ بسازید. نشان دهید T یک ناحیه تله برای L است.

ه. از یک کامپیوتر برای رسم مدار پیشرو نقاط در T استفاده کنید. نتیجه، یک تصویر از رباینده لوزی است.

۶ قضیه خمینه پایدار و ناپایدار

مثالهایی که در سه بخش اخیر مورد بحث قرار گرفتند، دارای ویژگی مشترکی هستند. از هر نقطه در مجموعه "موردتوجه" که دینامیک آشوبناک را بروز می‌دهد، هر دو مجموعه پایدار و ناپایدار عبور می‌کنند. خصلت اصلی که باعث بروز این رفتار می‌شود، هذلولوی بودن است که ما آن را در این بخش و بخش بعدی با جزئیات بیشتر بررسی می‌کنیم. یاد آوری می‌کنیم که یک نگاشت خطی، هذلولوی است هرگاه دارای هیچ مقدار ویژه‌ای روى دایره واحد نباشد. در حالت هذلولوی، ما روی دو زیرفضای پایای گذرنده از 0 یعنی زیرفضاهای پایدار و ناپایدار W^s و W^u بحث می‌کنیم. نقاط در

W^s تحت تکرارهای پیش رو و نقاط در W^u تحت تکرارهای پیش رو به ۰ همگرا هستند. هدف ما در این بخش نشان دادن این مطلب است که سیستم‌های دینامیکی غیرخطی حداقل نزدیک نقاط ثابت و متناوب هذلولوی به صورت مشابه عمل می‌کنند.

تعریف ۱.۶ نقطه ثابت p برای $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ هذلولوی نامیده می‌شود، هرگاه $DF(p)$ یعنی ماتریس ژاکوی در نقطه p ، هیچ مقدار ویژه‌ای روى دایره واحد نداشته باشد. اگر p متناوب با تناوب n باشد، آنگاه p هذلولوی است هرگاه $DF^n(p)$ هیچ مقدار ویژه‌ای روى دایره واحد نداشته باشد.

توجه کنید که برای نقاط متناوب، مقادیر ویژه ماتریس ژاکوی F^n در هر نقطه از مدار مشابه یکدیگر هستند. در واقع، $F^n \circ F^j = F^j \circ F^n$. با استفاده از قاعده زنجیری،

$$DF^n(F^j(p)) \cdot DF^j(p) = DF^j(F^n(p)) \cdot DF^n(p).$$

اگر $F^n(p) = p$ ، آنگاه

$$(DF^j)^{-1}(p) \cdot DF^n(F^j(p)) \cdot DF^j(p) = DF^n(p).$$

بنابراین مقادیر ویژه DF^n در p و $(F^n(p))$ یکسان هستند.
سه نوع نقطه متناوب هذلولوی موجود است: چاهک، چشم و زینی.

تعریف ۲.۶ فرض کنید $F^n(p) = p$.

۱. نقطه p یک چاهک یا یک نقطه متناوب جاذب است، هرگاه قدر مطلق همه مقادیر ویژه $DF^n(p)$ کمتر از یک باشند.

۲. نقطه p یک چشم یا یک نقطه متناوب دافع است، هرگاه قدر مطلق همه مقادیر ویژه $(F^n(p))$ بزرگ‌تر از یک باشند.

۳. در غیر این صورت p یک نقطه زینی است. یعنی، بعضی از مقادیر ویژه $DF^n(p)$ کوچک‌تر از یک و بقیه بزرگ‌تر از یک هستند.

حالت ۳، سیستم‌های با ابعاد بالاتر را از حالت یک بعدی که در فصل اول بررسی کردیم تمیز می‌دهد.

در باقیمانده این بخش، فقط نقاط ثابت در \mathbb{R}^2 را در نظر می‌گیریم. تعیین نتایج زیر به نقاط متناوب سر راست است. تعیین به ابعاد بالاتر پیچیدگی بیشتری دارد ولی تکنیکهای زیر برای \mathbb{R}^n نیز کار می‌کند. بحثهای استفاده شده در صفحه، از نظر هندسی بسیار واضح‌تر از ابعاد بالاتر هستند و جزئیات تکنیکی به طور قابل توجهی ساده‌ترند.

قضیه ۳.۶ فرض کنید F دارای نقطه ثابت جاذب در p باشد. در این صورت یک مجموعه باز حول p هست که در آن همه نقاط تحت تکرارهای پیش روی F به p میل می‌کند.

ملاحظه. بزرگترین چنین مجموعه بازی در \mathbb{R}^2 مجموعه پایدار یا پنهان جذب p نامیده می‌شود و به وسیله $W^s(p)$ نمایش داده می‌شود. برهان. با استفاده از تزویج $T(x) = x + p$, می‌توانیم فرض کنیم $DF(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ و $DF(\mathbf{0})$ به یکی از صورتهای زیر باشد. ϵ در حالت دوم به دلخواه کوچک است:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, |\lambda|, |\mu| < 1.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \epsilon > 0, |\lambda| > 1.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha^2 + \beta^2 < 1.$$

نتیجه ۱۱.۱ و قضیه ۱۲.۱ را ببینید. به راحتی نتیجه می‌شود که اگر $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, آنگاه

$$|DF(\mathbf{0})\mathbf{v}| < |\mathbf{v}|.$$

بنابراین همسایگی U از $\mathbf{0}$ موجود است که در آن، نامساوی فوق برای هر برداریکه e_1 و e_2 و درنتیجه برای هر $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ برقرار است، یعنی، برای هر $x \in U$, $|DF(x)\mathbf{v}| < |\mathbf{v}|$. اکنون δ را طوری انتخاب کنید که اگر $\delta < |p|$, آنگاه $U \cap B(p, \delta) \neq \emptyset$. ادعا می‌کنیم که اگر $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, آنگاه $|F(\gamma(t)) - F(p)| < |p|$. قرار دهید $\gamma(t) = t \cdot p$. داریم $F(\gamma(0)) = F(p)$, $F(\gamma(1)) = F(p)$ و برای هر t که $\gamma(t) \in U$, $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^1 (F \circ \gamma)'(t) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 |(F \circ \gamma)'(t)| dt \\ &= \int_0^1 |DF(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \\ &< \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \end{aligned}$$

□ $.|F(p)| < |p|$. بنابراین $|\gamma'(t)| \neq 0$.

نتیجه ۴.۶ فرض کنید F دارای یک نقطه ثابت دافع در p باشد. در این صورت مجموعه باز شامل موجود است به طوری که در آن همه نقاط تحت تکرارهای پسروی F به p میل کنند.

بزرگ‌ترین چنین مجموعه‌ای را مجموعه ناپایدار نامیده و آن را با $(p)W^u$ نمایش می‌دهیم. اکنون به حالت نقاط زینی باز می‌گردیم. از آنجاکه قدرمطلق یکی از مقادیر ویژه، بزرگ‌تر از یک و دیگری کوچک‌تر از یک است، انتظار برخورد با نواحی را داریم که در آنها F نزدیک ۰ باعث انبساط و انقباض می‌شود. برخلاف حالتی که برای نگاشتهای خطی رخ می‌دهد، انبساط و انقباض در یک جفت خط راست پایای گذرنده از نقطه ثابت انجام نمی‌شود. درواقع یک جفت از منحنیها این نقش را برای حالت غیرخطی ایفا می‌کنند. این موضوع بحث قضیه خمینه پایدار و ناپایدار است که برهان آن موضوع اصلی این بخش است.

قضیه ۵.۶ فرض کنید F دارای یک نقطه زینی p باشد. در این صورت $\circ > \epsilon$ و یک منحنی هموار یعنی، یک منحنی C^1 مانند

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

موجودند به طوری که

$$\gamma(\circ) = p . ۱$$

$$\gamma'(t) \neq \circ . ۲$$

. ۳. γ' یک بردار ویژه ناپایدار برای $DF(p)$ است.

. ۴. $\gamma^{-1} F^{-1}$ پایاست.

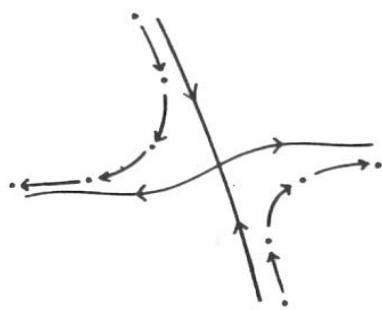
. ۵. با میل کردن $\infty \rightarrow n$ داریم $.F^{-n}(\gamma(t)) \rightarrow p$

. ۶. اگر برای هر $\circ, n \geq \epsilon$ ، آنگاه برای t ای $.q = \gamma(t) | F^{-n}(q) - p | < \epsilon$

این عبارت پیچیده نیازمند توضیح است. خم γ یک خمینه ناپایدار موضعی در p نامیده می‌شود. ما از کلمه ”خمینه“ استفاده می‌کنیم چون عموماً γ یک خط راست نیست. به طور شهودی، خمینه ناپایدار موضعی، یک خم گذرنده از نقطه ثابت است که توسط F^{-1} به درون خودش نگاشته می‌شود. همه نقاط در خمینه ناپایدار موضعی تحت تکرارهای F^{-1} به یک نقطه ثابت میل می‌کنند. شکل ۱.۶ را ببینید.

ملاحظات.

۱. قضیه برای مجموعه‌های پایدار با انجام تغییراتی برقرار است. روی خمینه پایدار موضعی، همه نقاط تحت تکرارهای F به نقطه ثابت میل می‌کنند.



شکل ۱.۶. خمینه‌های پایدار و ناپایدار موضعی.

۲. در ابعاد بالاتر از دو، خم γ با یک "سطح" موضعی که نزدیک p به وسیله یک نگاشت هموار $U \rightarrow \mathbb{R}^n$: ϕ پارامتری شده، جایگزین می‌شود که در آن U یک زیرمجموعه باز از \mathbb{R}^k است که k تعداد مقادیر ویژه با قدر مطلق بزرگ‌تر از یک است. برهان ما برای قضیه ۵.۶ می‌تواند برای این ابعاد بالاتر نیز به کار رود ولی به بعضی از جزئیات تکنیکی اضافه‌تر نیاز است. بنابراین ما به ساده‌ترین حالت ممکن قناعت می‌کنیم.

۳. می‌توان نشان داد که γ , C^∞ است. به طور کلی، اگر F , C^r باشد، آنگاه γ نیز چنین است.

خمینه‌های پایدار و ناپایدار موضعی دارای شباهتهای کلی هستند که در زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۶.۶ فرض کنید p یک نقطه ثابت هذلولوی برای F باشد و فرض کنید γ_u , خمینه ناپایدار موضعی در p باشد. خمینه ناپایدار در p با نمایش $W^u(p)$ به صورت

$$W^u(p) = \bigcup_{n>0} F^n(\gamma_u)$$

داده می‌شود. به طور مشابه، اگر γ_s ، خمینه پایدار موضعی در p باشد، آنگاه خمینه پایدار به صورت

$$W^s(p) = \bigcup_{n>0} F^{-n}(\gamma_s)$$

به دست می‌آید.

بنابراین خمینه‌های پایدار و ناپایدار، خمهای پایایی هستند که از نقطه ثابت یا متناوب خارج می‌شوند. ما قبلًا چنین نوع خمهایی را دیده‌ایم. مثالهای سه بخش اخیر، همگی خمینه‌های پایدار و ناپایدار گذرنده از هر نقطه متناوب و همچنین بعضی از نقاط غیرمتناوب خاص را مشخص می‌کنند.

همانگونه که این مثالها نشان می‌دهند، ممکن است خمینه‌های پایدار و ناپایدار به شکل‌های بسیار پیچیده‌ای بی‌پیچند. البته همیشه این چنین نیست. قبل از ارائه برهان قضیه ۵.۶، چند مثال دیگر از خمینه‌های پایدار و ناپایدار را بررسی می‌کنیم. اینها، مثال‌های متداولی هستند و خمینه‌های پایای آنها را دقیقاً محاسبه می‌کنیم. معمولاً، به دلیل وجود نداشتن فرمولی برای این مجموعه‌ها، این کار امکان‌پذیر نیست. قضیه ۵.۶، وجود چنین مجموعه‌هایی را تضمین می‌کند ولی هیچ روشی برای یافتن آنها ارائه نمی‌دهد. درحالی‌که مثال‌های زیر ساختنی بوده و رفتار این مجموعه‌ها را کاملاً واضح نشان می‌دهد.

مثال ۷.۶ فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با قاعده

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}x \\ \frac{1}{2}y - \frac{15}{7}x^3 \end{pmatrix}$$

داده شده باشد. توجه کنید که $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ و

$$DF(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

درنتیجه، $\mathbf{0}$ یک نقطه زینی است. از آنجاکه

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \end{pmatrix}$$

بنابراین محور y ها خمینه ناپایدار را تشکیل می‌دهد. همچنین

$$F \begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7}t \\ (\frac{1}{7}t)^3 \end{pmatrix}.$$

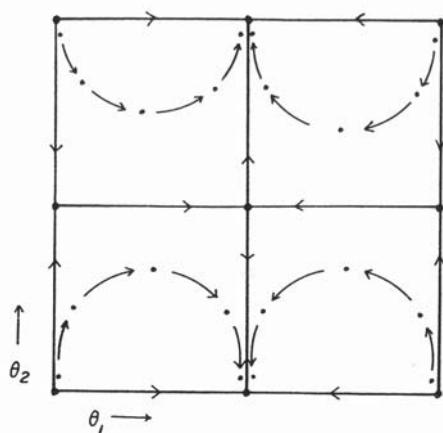
پس خم $x^3 = y$ خمینه پایدار است. درواقع، F مزدوج توپولوژیکی با نگاشت خطی

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

توسط دیفیومorfیسم

$$h \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^3 - y \end{pmatrix}$$

است. یعنی، $F \circ h = h \circ L$. توجه کنید که h زیرفضاهای پایدار و ناپایدار L را به روی خمینه‌های پایدار و ناپایدار F می‌نگارد.



شکل ۲.۶. نمای فاز نگاشت $F\left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \theta_1 + \epsilon \sin \theta_1 \\ \theta_2 + \epsilon \sin \theta_2 \cos \theta_1 \end{array}\right)$

مثال ۸.۶ فرض کنید T چنبره‌ای با پارامترهای θ_1 و θ_2 باشد که توسط مربع $2\pi \leq |\theta_i| \leq 0$ ، که اضلاع آن یکی شده‌اند، پدید آمده است. تعریف کنید

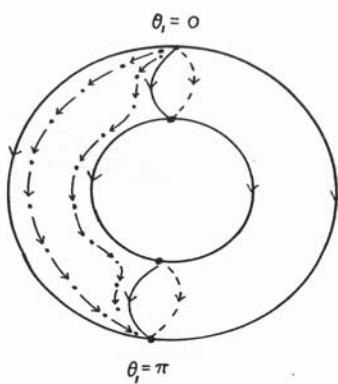
$$F\left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \theta_1 + \epsilon \sin \theta_1 \\ \theta_2 + \epsilon \sin \theta_2 \cos \theta_1 \end{array}\right).$$

اگر ϵ به اندازه کافی کوچک باشد، F یک دیفیومورفیسم است. چهار نقطه ثابت موجود است: نقطه‌های زینی در $(0, \pi)$ و $(\pi, 0)$ ، یک چاهک در $(0, 0)$ و یک چشم در (π, π) . نمای فاز در شکل ۲.۶ نشان داده شده است.

توجه کنید که خمینه ناپایدار گذرنده از $(0, \pi)$ دقیقاً بر خمینه پایدار گذرنده از (π, π) منطبق می‌شود. خمینه پایدار در $(0, \pi)$ از نقطه ثابت دافع در $(0, 0)$ سرچشمه می‌گیرد و خمینه ناپایدار در (π, π) در پهنه جذب نقطه ثابت جاذب $(0, 0)$ قرار می‌گیرد. دینامیک را روی چنبره می‌توان به صورتی که در شکل ۳.۶ آمده نیز نشان داد. در این نمایش، خمینه‌های پایدار و ناپایدار، حالت خطی بودنشان را از دست می‌دهند.

مثال ۹.۶ یک دیفیومورفیسم ساده‌تر روی چنبره به صورت

$$G\left(\begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \theta_1 - \epsilon \sin \theta_1 \\ \theta_2 + \epsilon \sin \theta_2 \end{array}\right)$$

شکل ۳.۶. نمای فاز F روی چنبره.

است. باز هم چهار نقطه ثابت وجود دارد: دو نقطه زینی در $(0, 0)$ و (π, π) ، یک چاهک در $(0, \pi)$ و یک چشممه در $(\pi, 0)$. نمای فاز در شکل ۴.۶ نشان داده شده است.

در این حالت، خمینه‌های پایدار و ناپایدار نقش مهمی در بررسی پایداری ساختاری سیستم‌های دینامیکی پایدار آنها از چشممه پدید می‌آیند.

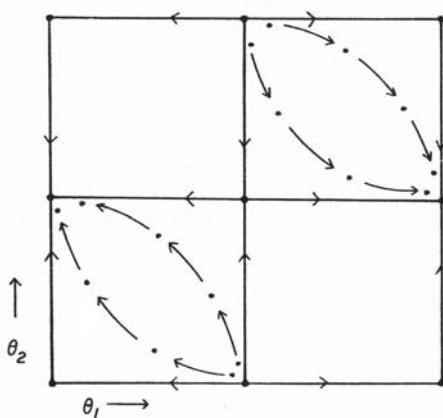
رقتار خمینه‌های پایدار و ناپایدار نقش مهمی در بررسی پایداری ساختاری سیستم‌های دینامیکی با بعد بالاتر بازی می‌کنند. فرض کنید F و G دو دیفیوژنورفیسم روی صفحه باشند که توسط همسان‌ریختی h مزدوج توپولوژیکی هستند. اگر p یک نقطه زینی ثابت هذلولوی برای F باشد، آنگاه G در (p) دارای یک نقطه ثابت است. لزومی ندارد که این نقطه هذلولوی باشد ولی باید دارای خمینه‌های پایدار و ناپایدار باشد. در واقع، به راحتی می‌توان بررسی کرد که اگر $x \in W^s(p)$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G^n(h(x)) = h(p).$$

به صورت مشابه، h نیز حافظ خمینه‌های ناپایدار است.

حال به برهان قضیه خمینه‌های پایدار و ناپایدار بازمی‌گردیم. ایده هندسی برهان بسیار ساده و زیباست ولی ممکن است در بین جزئیات تکنیکی گم شود. بگذارید این ایده را با یک مثال ساده یعنی یک نگاشت خطی که نتایج برای آن شناخته شده است روشن کنیم. فرض کنید $F(x) = Ax$ که

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$



شکل ۴.۶. نمای فاز

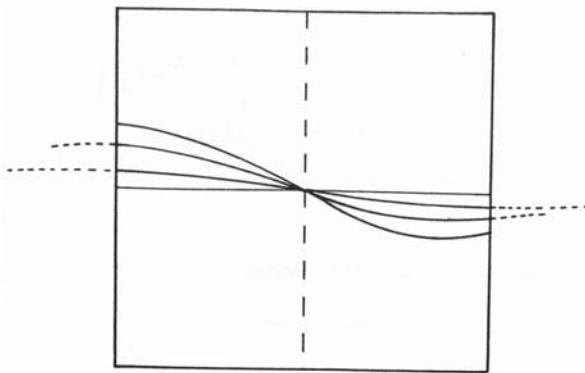
و $\lambda < \mu < 0$. با توجه به نتایج بخش ۲.۲ می‌دانیم که مجموعه ناپایدار، محور x هاست که هر بردار روی آن با ضریب λ ، کشیده می‌شود.

مربع $\epsilon \leq |x|, |y| < \epsilon$ در نظر بگیرید. فرض کنید $(x, h(x)) = (x, \gamma(x))$ یک خم هموار در صفحه باشد که از ۰ می‌گذرد و خطوط‌های مماس بر آن همیشه شبیه بین $\frac{1}{\lambda} \pm \frac{1}{\mu}$ دارند، یعنی، $\frac{1}{\lambda} < |h'(x)| < \frac{1}{\mu}$. نگاشت F را روی چنین خمی اثر دهد. نتیجه، خم جدیدی است که به محور x ها بسیار نزدیک‌تر است و دارای شبیه نزدیک به صفر است. اگر این خم را به مربع $\epsilon \leq |x|, |y| \leq M$ محدود کنیم، می‌بینیم که γ به خم دیگری تبدیل می‌شود که به محور x ها نزدیک‌تر است. با تکرار این روند، به خم‌هایی می‌رسیم که به قطعه‌ای از مجموعه ناپایدار که در $\epsilon \leq |x| \leq R$ قرار می‌گیرد میل می‌کنند. شکل ۵.۶ را ببینید.

اکنون به برهان قضیه خمینه ناپایدار باز می‌گردیم؛ قضیه خمینه پایدار با اعمال این نتیجه روی F^{-1} حاصل می‌شود. نشان می‌دهیم که رفتار یک نگاشت غیرخطی نزدیک یک نقطه ثابت هذلولوی، مشابه نگاشت خطی هذلولوی نزدیک ۰ است.

چند ساده‌سازی اولیه روی F انجام می‌دهیم. ابتدا با مزدوج کردن F توسط تبدیل $T(x) = x + p$ ، می‌توانیم فرض کنیم که نقطه ثابت، نقطه ۰ است. در گام دوم می‌توانیم فرض کنیم

$$DF(0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$



شکل ۵.۶. کاربرد تبدیل نمودار در حالت نگاشت خطی.

که این کار از طریق مزدوج کردن F توسط نگاشت خطی، که $(0)DF$ را به فرم استاندارد در می‌آورد، انجام می‌شود. سوم، فرض می‌کنیم که $\lambda < \mu < \frac{1}{\lambda}$ که آن را می‌توان در صورت لزوم با درنظر گرفتن F^n به جای F انجام داد. پس از اثبات اینکه F^n دارای مجموعه ناپایدار است، می‌توانیم نشان دهیم که چگونه این خم، مجموعه ناپایدار برای F نیز هست.

نقطه $q \in \mathbb{R}^2$ را با مختصات (x_0, y_0) و تصویر آن را تحت F با (x_1, y_1) نمایش می‌دهیم.

يعنى،

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_0, y_0) \\ y_1 &= F_2(x_0, y_0). \end{aligned}$$

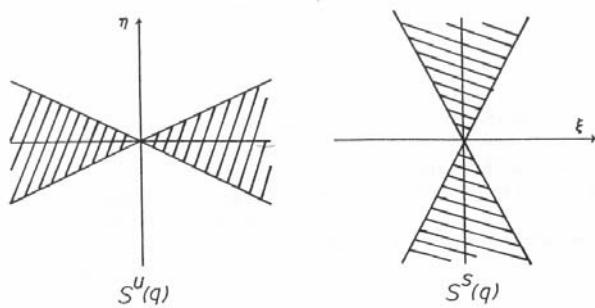
به طور مشابه، $(x_0, y_0) = F^{-1}(x_1, y_1)$. بردار مماس در q را با $_{(q)}(\xi_0, \eta_0)$ و تصویر آن را تحت مشتق F با $_{F(q)}(\xi_1, \eta_1)$ نشان می‌دهیم. يعنى

$$DF(q) \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}_q = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \end{pmatrix}_{F(q)}.$$

با بیان مختصاتی،

$$\xi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}(q)\xi_0 + \frac{\partial F_1}{\partial y}(q)\eta_0,$$

$$\eta_1 = \frac{\partial F_2}{\partial x}(q)\xi_0 + \frac{\partial F_2}{\partial y}(q)\eta_0.$$

شکل ۶.۶. کلافهای قطاع $S^u(q)$ و $S^s(q)$

ما همچنین، به مفهوم کلاف قطاع نیاز داریم. مجموعه‌های زیر را تعریف می‌کنیم

$$S^u(q) = \{(\xi_0, \eta_0) \mid |\eta_0| \leq \frac{1}{\lambda} |\xi_0|\}$$

$$S^s(q) = \{(\xi_0, \eta_0) \mid |\xi_0| \leq \frac{1}{\mu} |\eta_0|\}.$$

شکل ۶.۶ را بینید.

توجه کنید که $DF(\mathbf{0})$ حافظ $S^u(\mathbf{0})$ است به این معنی که اگر $\mathbf{v} \in S^u(\mathbf{0})$ آنگاه

$DF(\mathbf{0})\mathbf{v} \in S^u(\mathbf{0})$ به علاوه، اگر

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix},$$

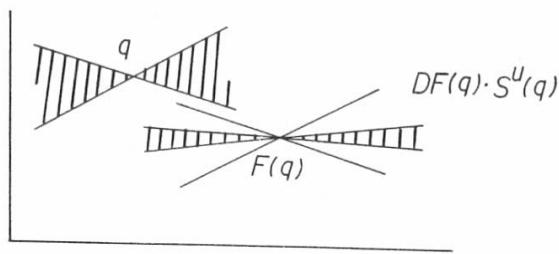
آنگاه $|\xi_0| = \lambda |\xi_1| > 2 |\xi_0|$. به طور مشابه، $(DF(\mathbf{0}))^{-1}$ را حفظ می‌کند و داریم $|\eta_{-1}| = \mu^{-1} |\eta_0| > 2 |\eta_0|$.

از آنجاکه F حداقل C^1 است، ماتریس ژاکوبی $DF(x)$ به صورت هموار نسبت به x تغییر می‌کند و بنابراین باید همسایگی از $\mathbf{0}$ موجود باشد که در آن خواص فوق برقرار باشند. به صورت دقیق‌تر، $|\xi_1| \leq \epsilon |x|$ ، آنگاه $|\eta_{-1}| \geq \mu^{-1} |y|$ موجود است به طوری که اگر $\epsilon < 1$ باشد.

۱. $DF(x, y)$ حافظ $S^u(x, y)$ است، یعنی، برای $\mathbf{v} \in S^u(x, y)$ داشته باشیم $DF(x, y)\mathbf{v} \in S^u(F(x, y))$.

۲. اگر $|\xi_1| \geq 2 |\xi_0|$ باشد، آنگاه $(\xi_0, \eta_0) \in S^u(x, y)$.

۳. اگر $|\eta_{-1}| \geq 2 |\eta_0|$ باشد، آنگاه $(\xi_0, \eta_0) \in S^s(x, y)$.



شکل ۷.۶. حفظ کلافهای قطاع.

مفهوم حفظ کلاف قطاع موضوعی است که هنگام بررسی هذلولوی بودن به آن پرداخته می‌شود و آن را به صورت هندسی در شکل ۷.۶ نشان داده‌ایم.
اکنون روی مربع B که با $\epsilon \leq |y|, |x|$ داده می‌شود تمرکز می‌کنیم. گوییم خم $\gamma(x) = (x, h(x))$ یک خم افقی در B است هرگاه

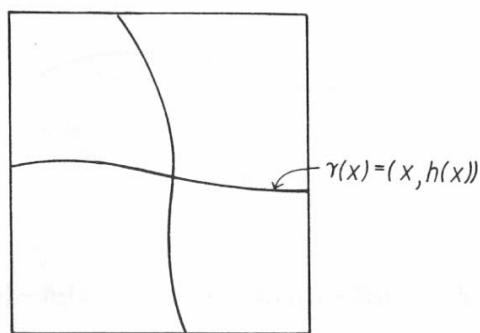
۱. تابع h برای $\epsilon \leq |x|$ تعریف شده و پیوسته باشد،

$$h(\circ) = \circ. \quad .2$$

۲. برای هر x_1 و x_2 که $x_1 - x_2 \leq \epsilon$ و $|x_i| \leq \epsilon$ است که در B قرار می‌گیرد و در شکل ۸.۶ نشان داده شده است. تعویض نقش x و y تعريف خم عمودی را به دست می‌دهد.

лем ۱۰.۶ اگر $\gamma(x) = (x, h(x))$ یک خم افقی باشد، آنگاه تصویر $F(\gamma(x)) = (x, h(x))$ را در یک خم افقی قطع می‌کند.

برهان. ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $(x_1, y_1) = F(\epsilon, h(\epsilon))$ ، آنگاه $2\epsilon \geq x_1$. این نتیجه، بلافرضه از $|x_1| > 2|\epsilon_0|$ حاصل می‌شود. به صورت مشابه، اگر $(x_1, y_1) = F(-\epsilon, h(-\epsilon))$ ، آنگاه $-2\epsilon < x_1$. بهوضوح، $F(0) = 0$ یعنی تصویر خم از مبداء مختصات می‌گذرد. درنهایت، فرض کنید (x_0, y_0) را طوری روی (x'_0, y'_0) قرار داشته باشند و $|x'_0 - x_0| > \frac{1}{4}|\epsilon_0|$. مقادیر α_1 و α_2 را طوری برگزینید که $F(\alpha_1, h(\alpha_1)) = (x_0, y_0)$ و $F(\alpha_2, h(\alpha_2)) = (x'_0, y'_0)$. قطعه خط راست ℓ را که مماس بر ℓ در S^u قرار می‌گیرد. اکنون F را به یک خم هموار که (x_0, y_0) را به (x'_0, y'_0) وصل



شکل ۸.۶. یک خم افقی و یک خم عمودی در B .

می‌کند، می‌نگارد. با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نقطه‌ای روی این خم موجود است به‌طوری که بردار مماس دارای شبیه بیشتر از $\frac{1}{2}$ باشد که با این نکته که با این کلاف DF قطاع S^u را حفظ می‌کند در تناقض است. \square

بنابراین برای هر خم افقی γ در B ، عمل F یک خم افقی جدید در B تعریف می‌کند که آن را با Φ_γ نمایش می‌دهیم. خم Φ_γ تبدیل نمودار نامیده می‌شود چون نمودار $(x, h(x))$ را به نمودار نگاشت دیگری می‌برد.

فرض کنید H نمایانگر همه خمهای افقی در B باشد. بنابراین می‌توانیم Φ را به صورت یک نگاشت $H \rightarrow H$ در نظر بگیریم. یک نقطه ثابت برای H ، یک خم افقی است که به خودش انتقال می‌یابد، یعنی، تصویرش تحت F ، خودش را می‌پوشاند. چنین نقطه ثابتی یک کاندیدا برای مجموعه ناپایدار است.

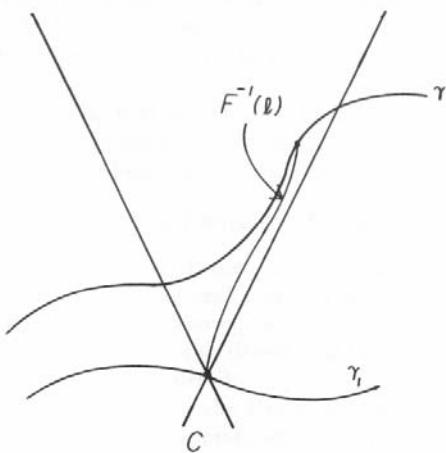
فرض کنید (γ_1, γ_2) خمهای افقی در B باشند. فاصله

$$d[\gamma_1, \gamma_2] = \sup_{|x| \leq \epsilon} |h_1(x) - h_2(x)|$$

را در نظر بگیرید.

لم ۱۱.۶ اگر γ_1 و γ_2 خمهای افقی باشند، آنگاه برای هر γ که $1 < \nu < 0$ ، $d[\Phi\gamma_1, \Phi\gamma_2] < \nu d[\gamma_1, \gamma_2]$

برهان. در اینجا به صورت هندسی بحث می‌کنیم. فرض کنید برای برخی از x ها و برای هر z که $|z| \leq \epsilon$ ، داشته باشیم $|\Phi_{\gamma_2}(x) - \Phi_{\gamma_1}(x)| \geq |h_2(z) - h_1(z)|$. نشان می‌دهیم که این به یک تناقض منجر می‌شود.



شکل ۹.۶

فرض کنید $\ell = P(x)$ خط عمودی باشد که $\Phi_{\gamma_2}(x)$ را به $\Phi_{\gamma_1}(x)$ وصل می‌کند. خم $F^{-1}(\ell)$ را که نقطه $(z_1, h_1(z_1)) = \gamma_1(z_1)$ را به نقطه $(z_2, h_2(z_2)) = \gamma_2(z_2)$ وصل می‌کند، درنظر بگیرید. از آنجاکه DF^{-1} قطاع S^s را در هر نقطه از ℓ حفظ می‌کند، نتیجه می‌شود که بردارهای مماس بر $F^{-1}(\ell)$ همیشه در این قطاع قرار می‌گیرند؛ به عنوان یک نتیجه، $F^{-1}(\ell)$ خودش در مخروطی که رأس آن در $(z_1, h(z_1))$ و خطوط مرزی آن دارای شیب $2 \pm \epsilon$ هستند، قرار می‌گیرد. شکل ۹.۶ را ببینید.

به ویژه،

$$\frac{|h_2(z_2) - h_1(z_1)|}{|z_2 - z_1|} \geq 2.$$

به علاوه، از آنجاکه DF^{-1} مؤلفه‌های عمودی این بردارهای مماس را با ضریب حداقل ۲ منیسٹ می‌کند، داریم

$$|h_2(z_2) - h_1(z_1)| \geq 2|\Phi_{\gamma_2}(x) - \Phi_{\gamma_1}(x)|.$$

بنابراین فرض،

$$|h_2(z_1) - h_1(z_1)| \leq |\Phi_{\gamma_2}(x) - \Phi_{\gamma_1}(x)|.$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} |h_2(z_2) - h_2(z_1)| &\geq |h_2(z_2) - h_1(z_1)| - |h_2(z_1) - h_1(z_1)| \\ &\geq \frac{1}{\gamma} |h_2(z_2) - h_1(z_1)| \\ &\geq |z_2 - z_1|. \end{aligned}$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین، نقطه z با $1 \geq |z| \geq |h_2(z)|$ موجود است که با این نکته که γ_2 یک خم افقی بوده در تناقض بوده و لم اثبات می‌شود. \square

نتیجه می‌شود که Φ یک انقباض روی H است. از آنجاکه H یک زیرمجموعه بسته از مجموعه همه نگاشتهای پیوسته از بازه $\epsilon \leq |x|$ به خودش است، بنابراین H یک فضای متريک کامل می‌شود و درنتیجه Φ دارای یک نقطه ثابت در H است. برای برهان این مطلب می‌توان به هر کتاب استاندارد آنالیز مراجعه کرد.

فرض کنید γ_u خم افقی باشد که توسط Φ ثابت نگه داشته می‌شود. این خم بهوضوح از مبداء مختصات می‌گذرد و اگر (x_0, y_0) یک نقطه روی γ_u با $x_0 \neq y_0$ باشد، آنگاه $|x_0 - x_1| > 0$. بنابراین نقاط روی γ_u یا تحت تکرارهای F ، B را ترک می‌کنند یا به نقاط دیگری از γ_u بسیار دورتر از ۰ نگاشته می‌شوند. بنابراین $(0) \in W^u$.

لم ۱۲.۶ فرض کنید $B \in (x_0, y_0)$ و نیز فرض کنید (x_0, y_0) در γ_u قرار نگیرد. در این صورت یک عدد صحیح مثبت n وجود دارد به طوری که $(x_0, y_0) \in F^{-n}(B)$ در γ_u قرار نگیرد.

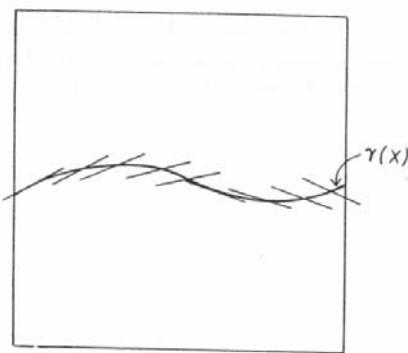
برهان. فرض کنید ℓ خط عمودی واصل از (x_0, y_0) به یک نقطه یکتا در γ_u باشد. بحث مخروط را که در لم قبل بیان شد، اعمال می‌کنیم؛ ارتفاع عمودی $F^{-1}(\ell)$ باید دوبرابر شود. ادامه این روند، نتیجه را به دست می‌دهد. \square

به عنوان یک نتیجه از این لم، γ_u دقیقاً یک مجموعه ناپایدار موضعی برای F است. ما نشان داده‌ایم که γ_u یک خم پیوسته در B است. در حقیقت، γ_u است هرگاه F این چنین باشد. به جای اثبات این مطلب، فقط به صورت ساده یک برهان برای اینکه γ_u C^1 است ارائه می‌دهیم. برای انجام این کار، به اصطلاحات بیشتری نیاز داریم. میدان خطی افقی را یک جفت از توابع $\zeta(x) = (\gamma(x), M(x))$ تعریف می‌کنیم که

۱. γ_u یک خم افقی در B است.

۲. M یک نگاشت پیوسته حقیقی مقدار است که برای هر x با $\epsilon \leq |x|$ ، داریم $\frac{1}{\epsilon} \leq |M(x)|$.

به طور هندسی، $\zeta(x)$ به صورت یک خم افقی همراه با یک گردایه از خطوط راست دیده می‌شود. یک خط راست از هریک از نقاط $\gamma(x)$ می‌گذرد و این خط دارای شیب $M(x)$ است. از آنجاکه $\frac{1}{\epsilon} \leq |M(x)|$ ، هر خط راست دارای یک بردار جهتی است که در S^u قرار می‌گیرد. شکل ۱۰.۶ را ببینید.



شکل ۱۰.۶. یک میدان خطی افقی.

فرض کنید H_1 نمایانگر مجموعه همه میدانهای خطی افقی در B باشد. فاصله بین دو میدان خطی افقی (γ_i, M_i) برای $i = 1, 2$ را به صورت

$$d[\zeta_1, \zeta_2] = \sup_{|x| \leq \epsilon} (|\gamma_1(x) - \gamma_2(x)|, |M_1(x) - M_2(x)|)$$

تعریف می‌کنیم. یک تبدیل نمودار جدید به صورت

$$\Phi_1(\zeta) = (\Phi_\gamma, \hat{M})$$

داده می‌شود که Φ_γ تبدیل نمودار معمولی خم افقی γ بوده و \hat{M} شبیه میدان خطی تبدیل یافته توسط DF است. به طور دقیق‌تر، اگر $(x, h(x)) = \gamma(x)$ و v یک بردار با شبیب $M(x)$ باشد، آنگاه \hat{M} شبیب $DF(\gamma(x))v$ است.

همانند قبل، واضح است که H_1 را به درون خودش می‌نگارد. در واقع، Φ_1 یک مثال از یک انقباض "تاری" است. یعنی، اگر $(\gamma, M_1) = (\gamma, M_2)$ و $\zeta_1 = \zeta_2$ ، میدانهای برداری افقی باشد که پایه هر دوی آنها خم افقی γ است، آنگاه

$$d[\Phi_1(\zeta_1), \Phi_1(\zeta_2)] < d[\zeta_1, \zeta_2].$$

هنگامی که این نتیجه و انقباض در جهت γ با هم در نظر گرفته شوند، می‌توان نشان داد که یک نقطه ثابت یکتا برای H_1 در Φ_1 موجود است. این نقطه ثابت، خم افقی γ_u است که در بالا یافتیم و دارای یک جهت ترجیحی در هر نقطه است. می‌توان ثابت کرد که این جهت در واقع مماس بر خم است ولی جزئیات تکنیکی را بیان نمی‌کنیم.

به این صورت برهان قضیه خمینه‌های پایدار و ناپایدار در حالتی که مقدار ویژه در شرایط مناسبی صدق کنند کامل می‌شود. یادآوری می‌کنیم که از ابتدا فرض کرده بودیم که مقدار ویژه ناپایدار λ و مقدار ویژه پایدار μ در شرایط $2 > \lambda > \frac{1}{\mu}$ صدق کنند. اگر این حالت برقرار نباشد، آنگاه نشان داده‌ایم که یک توان به اندازه کافی بزرگ از F^{-n} دارای مجموعه ناپایداری است که توسط γ_u داده می‌شود. بهوضوح، اگر این مجموعه F^{-1} -پایایا هم نباشد، آنگاه حداقل $(\gamma_u)^{-1}$ تحت F^{-n} پایاست. این، یکتاوی γ_u را نقض می‌کند.

تمرین.

۱. دیفیومورفیسم Q_λ را روی صفحه که با پارامتر λ به صورت

$$\begin{aligned}x_1 &= e^x - \lambda \\y_1 &= -\frac{\lambda}{\beta} \arctan(y)\end{aligned}$$

داده شده در نظر بگیرید.

الف. همه نقاط ثابت و نقاط متناوب با تناوب ۲ نگاشت Q_λ را بیابید.

ب. این نقاط را به دسته‌های چاهک، چشم و زینی تقسیم کنید.

ج. اگر نقطه زینی باشد، خمینه‌های پایدار و ناپایدار را مشخص و ترسیم کنید.

۲. دیفیومورفیسم F را روی صفحه که در مختصات قطبی به صورت

$$\begin{aligned}r_1 &= \lambda r + \beta r^3 \\ \theta_1 &= \theta + \frac{2\pi}{n} + \epsilon \sin(n\theta)\end{aligned}$$

داده می‌شود در نظر بگیرید که در آن ϵ عدد کوچک بوده، $1 > \lambda > \beta < 0$.

الف. همه نقاط متناوب F را مشخص و دسته‌بندی کنید.

ب. نشان دهید دایره γ که به صورت $r = \sqrt{(1-\lambda)/\beta}$ داده می‌شود تحت F پایاست.

ج. خمینه‌های پایایا و ناپایدار نقاط زینی F را مشخص و رسم کنید.

۳. فرض کنید p_1 و p_2 نقاط زینی دیفیومورفیسم F باشند. یادآوری می‌کنیم که نقطه q که نقطه هتروکلینیک برای F است هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(q) = p_1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^{(-n)}(q) = p_2.$$

یعنی، نقاط هتروکلینیک به صورت پیشرو و پسرو به دو نقطه زینی متفاوت مجانب می‌شوند. اگر $p_1 = p_2$ ، آنگاه q هموکلینیک نامیده می‌شود (توجه کنید که تعریف هموکلینیک برای ابعاد بالاتر چگونه با تعریف آن در بخش ۱۶.۱ تفاوت دارد). تعریف ۶.۴ را ببینید. نشان دهید که تزوج تپولوزیکی، نقاط هموکلینیک و هتروکلینیک را حفظ می‌کند.

۴. نقاط هتروکلینیک را در مثال ۸.۶ بباید.

۵. با استفاده از تابع برآمدگی نشان دهید که دیفیومورفیسم مثال ۸.۶ را می‌توان طوری دچار اختلال کرد که دارای تعداد متناهی مدار هتروکلینیک شود. بنابراین بازه‌های نقاط هموکلینیک و هتروکلینیک ممکن است با یک اختلال کوچک از بین بروند. نتیجه بگیرید که این نگاشت دارای پایداری ساختاری نیست.

۶. یک نقطه هموکلینیک یا هترکلینیک، قاطع نامیده می‌شود اگر خمینه‌های پایدار و ناپایدار متناظر، هم‌دیگر را زاویه‌دار قطع کنند، یعنی، بردارهای مماس آنها در نقطه هتروکلینیک هم خط نباشند. نشان دهید می‌توان در تمرین ۵ به‌گونه‌ای اختلال ایجاد کرد که نقاط هتروکلینیک قاطع شوند.

خودریختی‌های خطی روی کره. فرض کنید S^2 نمایانگر کره دو بعدی در \mathbb{R}^3 باشد، یعنی،

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}.$$

فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

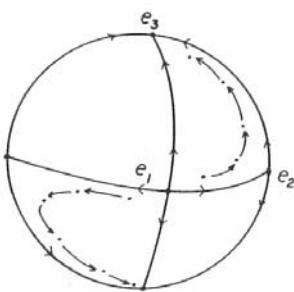
و نگاشت

$$F(x) = F_A(x) = \frac{Ax}{|Ax|}$$

را تعریف کنید. F_A یک خودریختی خطی روی S^2 نامیده می‌شود.

۷. نشان دهید F ، ناحیه $\{0 - \mathbb{R}^3\}$ را به روی S^2 می‌نگارد.

۸. نشان دهید تحدید F به S^2 یک دیفیومورفیسم روی کره است.

شکل ۱۱.۶. دینامیک F .

۹. فرض کنید $(0, 0, 0) = e_3 = (0, 0, 1)$ و $(0, 1, 0) = e_2 = (0, 1, 0)$. نشان دهید $\pm e_j$ نقاط ثابت هستند.

۱۰. ماتریس ژاکوبی $DF(\pm e_j)$ را محاسبه کنید. نشان دهید $DF(\pm e_j)$ دارای یک مقدار ویژه 0° متناظر با بردار ویژه e_j است.

۱۱. نشان دهید که هر یک از سایر بردارهای e_i , $i \neq j$ نیز بردارهای ویژهای برای $DF(\pm e_j)$ هستند. مقادیر ویژه متناظر با آنها را بیابید.

۱۲. نتیجه بگیرید که $\pm e_1$ یک چشم، $\pm e_2$ یک زینی و $\pm e_3$ یک چاهک است.

۱۳. نگاشت $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$: $\phi(x) = |A^{-1}x|^2$ را با ضابطه $\phi(x)$ درنظر بگیرید. نشان دهید $\phi(F(x)) \leq \phi(x)$.

۱۴. نشان دهید $\phi(F(x)) = \phi(x)$ اگر و تنها اگر برای زایی، $x = \pm e_j$. نگاشت ϕ یک نگاشت گرادیان نامیده می‌شود چون در طول همه مدارهای F به جز نقاط ثابت، کاهش می‌یابد. خود نگاشت F ، شیوه گرادیان نامیده می‌شود.

۱۵. از نگاشت گرادیان برای اثبات اینکه نمای فاز F همانند شکل ۱۱.۶ است استفاده کنید.

۱۶. درمورد دینامیک خودریختی خطی کرده توسط ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

مشخص می‌شود بحث کنید.

۱۷. قرار دهید $\{x \in R^{n+1} \mid |x|^2 = 1\} = S^n$ کره یکه در R^{n+1} باشد. فرض کنید A ماتریس قطری با درایه‌های $1, 2, \dots, n+1$ باشد. دینامیک خودریختی خطی روی کره را که توسط A القاء می‌شود و همچنین خمینه‌های پایدار و ناپایدار هر نقطه ثابت این نگاشت را توصیف کنید.

۷ نتایج سرتاسری و مجموعه‌های هذلولوی

هدف این بخش ادغام بسیاری از مفاهیم قبلی سیستم‌های دینامیکی است تا چشم‌اندازی به نظریه سرتاسری دینامیک در ابعاد بالاتر ارائه دهیم. یادآوری می‌کنیم که دیفیومورفیسم‌هایی که در حالت یک بعدی پایداری ساختاری داشتند، از نظر دینامیکی بسیار ساده بودند. فقط تعداد متناهی نقطه متناوب وجود داشت که همه آنها هذلولوی بودند. سایر نقاط نیز به سادگی روی مدارهایی قرار می‌گرفتند که تحت تکرارهای نگاشت از بکی از این نقاط متناوب به دیگری میل می‌کردند.

در ابعاد بالاتر، وضعیت تا حدودی پیچیده‌تر است. همان‌گونه که در سه مثال اصلی مان دیدیم، کاملاً امکان دارد که نامتناهی نقطه متناوب و حتی انواع پیچیده‌تری از بازگشت همانند مدارهای چگال یا نقاط بازگشتی موجود باشند. همه این نقاط در مجموعه‌ای قرار می‌گیرند که نگاشت روی آن مجموعه دارای دینامیک «جالب» است. این مجموعه، مجموعه بازگشتی زنجیری نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۷ فرض کنید F یک دیفیومورفیسم باشد. یک نقطه x برای F ، بازگشتی زنجیری نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $\epsilon > 0$ ، نقاط x_0, x_1, \dots, x_k و x_{k+1}, \dots, x_n اعداد مثبت n_1, \dots, n_k موجود باشند به طوری که برای هر i

$$|F^{n_i}(x_{i-1}) - x_i| < \epsilon.$$

دنیاله نقاط x_0, \dots, x_n یک زنجیر یا شبه مدار نامیده می‌شود. به صورت شهودی، یک زنجیر تقریباً یک مدار است البته با این دید که اجزه جهش یا خطای کوچک در تکرارهای $n_1 + n_2, n_1, \dots$ را داشته باشد. یک نقطه x بازگشتی زنجیری است، هرگاه بتوان زنجیرهایی با جهش‌های به اندازه دلخواه کوچک یافت. توجه کنید که شروع و پایان زنجیرها همیشه نقطه x است.

مثال ۲.۷ هر نقطه متناوب، بازگشتی زنجیری است. همه نقاط مجموعه کانتور منسوب به نعل اسب اسپلی و همچنین همه نقاط در ریاضیاتی های بخش ۵.۲ بازگشتی زنجیری هستند. تمرینهای ۱ تا ۳ را ببینید.

توجه کنید که بازگشتی زنجیری یک مفهوم ضعیفتر از بازگشت است. یادآوری می کنیم که x یک نقطه بازگشتی F است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ موجود باشد به قسمی که $|F^n(x) - x| < \epsilon$. یعنی، یک نقطه بازگشتی، یک بازگشتی زنجیری با یک عزمی زنجیر است که فقط از خود x تشکیل شده است.

نقاطی موجودند که بازگشتی زنجیری هستند ولی بازگشتی نیستند. برای مثال اگر p یک نقطه متناوب هذلولوی باشد و $W^u(p) \cap W^s(p) \neq \emptyset$ ، آنگاه q بازگشتی زنجیری هست ولی بازگشتی نیست. در واقع، هر دو مدار پیش رو و پسروی q به p میل می کنند، بنابراین مدار q هرگز روی خودش تجمع نمی کند. نقاطی مانند q ، نقاط هموکلینیک نامیده می شوند. اگر q به نقاط زینی مجرزا میل کند، آنگاه q یک نقطه هتروکلینیک نامیده می شود.

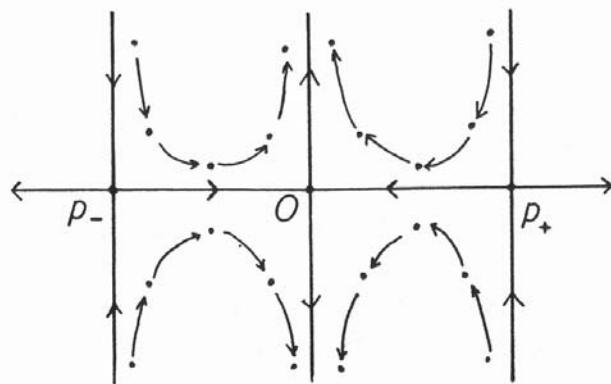
فرض کنید $\Lambda(F) = \Lambda(G)$ نمایانگر مجموعه نقاطی باشد که بازگشتی زنجیری اند؛ Λ مجموعه بازگشتی زنجیری نامیده می شود. برهان قضیه بعدی سرراست است.

قضیه ۳.۷

۱. Λ یک زیرمجموعه بسته از \mathbb{R}^2 است.

۲. اگر F و G توسط همسان ریختی h مزدوج توپولوژیکی باشند، آنگاه $h(\Lambda(F)) = \Lambda(G)$ می نگارد.

اغلب، مجموعه بازگشتی زنجیری یک نگاشت، به دو قطعه متفاوت تفکیک می شود که ممکن است با تکنیکهای مشابه بخشهاي ۲.۲ تا ۵.۲ را تجزیه و تحلیل شوند. ممکن است ریاضیاتی های تراپا یا زیرتغییرجاهای از نوع متناهی، قسمتی از دینامیک را تشکیل دهند. این منجر به مفهوم مجموعه هذلولوی که در ادامه راجع به آن صحبت می کنیم می شود. ولی قبل از آن به این نکته توجه می کنیم که مجموعه بازگشتی زنجیری ممکن است کاملاً ساده باشد. حتی ممکن است متناهی باشد. در واقع، دیفیومورفیسم های مورس-اسپلی روی دایره دارای تعداد متناهی نقطه متناوب به عنوان مجموعه بازگشتی زنجیری هستند. همه نقاط دیگر از یک مدار متناوب به دیگری میل می کنند و در مجموعه بازگشتی زنجیری قرار نمی گیرند. نتیجه اصلی ما در فصل اول این بود که نگاشتهای مورس-اسپلی دارای پایداری ساختاری هستند. در ابعاد بالاتر، لازم است که شرایط اضافه تری به تعریف نگاشت مورس-اسپلی اضافه کنیم تا به این نتیجه دست یابیم.



شکل ۱.۷. یک شاخه از $(0) W^u(p_{\pm})$ به یک شاخه از $(0) W^s(p_{\pm})$ می‌رسد.

تعریف ۴.۷ فرض کنید p_1 و p_2 نقاط زینی F باشند. مجموعه‌های $W^s(p_1)$ و $W^u(p_2)$ تراها هستند اگر

$$W^s(p_1) \cap W^u(p_2) = \emptyset \quad ۱.$$

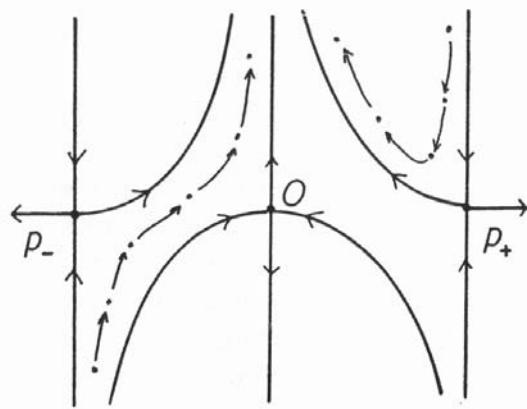
۲. و یا $(p_2) W^s(p_1) \cap W^u(p_2) \neq \emptyset$ که در این حالت مماسها بر $W^s(p_1)$ و $W^u(p_2)$ در q هم خط نیستند.

تقاطع مورب خمینه‌های پایدار و ناپایدار شرط لازم برای یک پایداری ساختاری است.

مثال ۵.۷ دیفیومورفیسم F با تعریف

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(x + x^3) \\ y_1 &= y(\frac{x}{1+2x^2}) \end{aligned}$$

را در نظر بگیرید. این نگاشت دارای نمای فاز شکل ۱.۷ است. توجه کنید که سه نقطه زینی $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$ موجود است. یک شاخه از $(0) W^u(p_{\pm})$ دقیقاً بر $(0) W^s(p_{\pm})$ منطبق می‌شود. این اتصالها را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم.



شکل ۲.۷. خمینه‌های پایدار و ناپایدار اختلال یافته.

فرض کنید ϕ یک نگاشت برآمدگی تعریف شده روی بازه بسته $[1, \infty)$ باشد. یعنی، $\phi(x) = x$ هرگاه $x \in [1, \infty)$ و $\phi(x) > x$. دیفیومورفیسم g با تعریف

$$\begin{aligned}x_1 &= x \\y_1 &= y + \phi(|x|)\end{aligned}$$

را درنظر بگیرید. توجه کنید که ϕ بسیار ساده نقاط نوار $1 < |x| < \infty$ را در جهت عمودی حرکت می‌دهد. به بیان دیگر، می‌توانیم g را به صورت یک فشار ملایم در جهت مثبت محور y ها بگیریم. حال نگاشت اختلال یافته $F = g \circ \hat{F}$ را درنظر بگیرید. فرض کنید S نوار $1 < x < \infty$ و $y \geq 0$ باشد. در نگاشت بدون اختلال، مرز پایینی S حفظ می‌شود در حالی که این برای \hat{F} درست نیست؛ همه نقاط مرز پایینی S به طور اکید به داخل S نگاشته می‌شوند. به علاوه، اگر $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq x < \infty$ ، آنگاه $y_1 > y$. بنابراین، نقاط در این ناحیه تحت تکرارهای \hat{F} به ∞ می‌کنند. نتیجه می‌شود که خمینه پایدار ۰ وارد نوار S نمی‌شود. با بحث مشابه، می‌توان به سادگی نشان داد که خمینه ناپایدار \hat{F} در P_+ کاملاً در S قرار می‌گیرد و بنابراین اتصال شکسته می‌شود. این مطلب در شکل ۲.۷ نشان داده شده است. پدیده مشابهی در نوار $0 < x < 1$ اتفاق می‌افتد.

بنابراین یک شرط لازم برای پایداری ساختاری، تقاطع مورب همه خمینه‌های پایدار و ناپایدار نقاط زینی است. یک دسته مهم از نگاشتهای دارای این خاصیت، نگاشتهای مورس-اسمیل مراتب بالاتر هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۶.۷ یک دیفیومورفیسم، مورس-اسمیل نامیده می‌شود هرگاه

۱. مجموعه بارگشتی زنجیری، یک مجموعه متناهی از نقاط متناوب باشد که همه هذلولوی هستند.

۲. همه خمینه‌های پایدار و ناپایدار نقاط زینی، متقاطع باشند.

یک نتیجه مهم که ابتدا توسط پلیس^۵ ثابت شد این است که دیفیومورفیسم‌های مورس-اسمیل روی سطوح فشرده (همانند کره و چمنه) دارای پایداری ساختاری C^1 هستند.

همان‌گونه که در فصل یک تأکید کردیم، هذلولوی بودن یک جزء لازم برای پایداری ساختاری است. به عنوان یک تمرین ساده می‌توان از قضیهتابع ضمنی برای نشان دادن اینکه نقاط ثابت و متناوب هذلولوی باید تحت اختلالهای کوچک مقاوم باشند استفاده کرد (تمرین ۷ را ببینید). ولی از آنجاکه دیفیومورفیسم با بعد بالاتر ممکن است چیزهایی بیشتر از بارگشت تناوبی را شامل شود، لازم است مفهوم هذلولوی بودن را به همه مجموعه‌های بارگشتی زنجیری تعمیم دهیم. بدین معنی که لازم است مفهوم مجموعه هذلولوی را معرفی کیم. با یک مثال شروع می‌کنیم.

مثال ۷.۷ دیفیومورفیسم F را در صفحه با مختصات قطبی

$$\begin{aligned} r_1 &= 2r - r^3 \\ \theta_1 &= \theta + 2\pi w \end{aligned}$$

در نظر بگیرید. به‌وضوح، مبدأ مختصات یک نقطه ثابت دافع برای F است و دایره $r = r$ پایاست. تحلیل نموداری نگاشت $r_1 = 2r - r^3$ نشان می‌دهد که همه نقاط ناصرف تحت تکرار، به این دایره میل می‌کنند. روی دایره، نگاشت به دوران با زاویه $2\pi w$ تحدید می‌شود. بنابراین نتیجه می‌شود که مجموعه بارگشتی زنجیری، از ۰ و دایره واحد تشکیل شده است.

این وضعیت به راحتی از بین می‌رود. ابتدا یک اختلال مقدماتی ایجاد می‌کنیم تا w یک زاویه گویا مانند $\frac{p}{q}$ شود. سپس اختلال دیگری از طریق ترکیب با نگاشت

$$\begin{aligned} r_1 &= r \\ \theta_1 &= \theta + \epsilon \sin(q\theta) \end{aligned}$$

ایجاد می‌کیم. نگاشت حاصل برابر است با

$$\begin{aligned} r_1 &= 2r - r^3 \\ \theta_1 &= \theta + 2\pi\left(\frac{p}{q}\right) + \epsilon \sin(q\theta). \end{aligned}$$

دایره $r = r$ همچنان پایاست ولی این‌بار نگاشت روی دایره، یک نگاشت مورس-اسمیل است که در بخش ۱۵.۱ درمورد آن بحث شد. در واقع، یک جفت از مدارهای متناوب با تناوب q که یکی جاذب و دیگری دافع است موجود است. به راحتی دیده می‌شود که مجموعه بارگشتی زنجیری، از این دو مدار بعلاوه نقطه ثابت ۰ تشکیل شده است.

برای تعریف مجموعه هذلولوی، ابتدا وضعیت نزدیک به یک نقطه ثابت هذلولوی را یادآوری می‌کنیم. به طور اساسی، هذلولوی بودن دو جزء دارد، سرعت انبساط یا انقباض که توسط مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی در آن نقطه بدست می‌آید و جهت انبساط یا انقباض که به وسیله بردار ویژه متناظر مشخص می‌شود. دیدیم که این جهت توسط خمینه‌های پایدار و ناپایدار روی \mathbb{R}^2 منعکس می‌شود و نگاشت روی آنها درست همانند قسمت خطی نگاشتی که توسط ماتریس ژاکوبی بدست می‌آید رفتار می‌کند. در حالتهای نگاشت نعل اسب، خودریختی هذلولوی چنبره و ریاندها، دیدیم که یک مجموعه بسیار بزرگتر – نه فقط نقاط متناوب – دارای رفتارهای پایدار و ناپایدار مشابهی هستند. اینها مثالهایی از مجموعه‌های هذلولوی هستند که اکنون آنها را تعریف می‌کنیم. برای سادگی، توجه خود را به صفحه معطوف می‌کنیم.

تعریف ۸.۷ فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک دیفیومورفیسم باشد. مجموعه Λ یک مجموعه هذلولوی برای F نامیده می‌شود هرگاه

۱. برای هر نقطه $\Lambda \in p$ ، یک جفت از خطوط $E^u(p)$ و $E^s(p)$ در صفحه مماس بر p موجود باشد که توسط $DF(p)$ حفظ شوند.

۲. تغییرات $E^u(p)$ و $E^s(p)$ بر حسب p پیوسته باشند.

۳. عدد ثابت $\lambda > 1$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $v \in E^u(p)$ و برای هر $|DF(p)v| \geq \lambda |v|$ و $|DF^{-1}(p)v| \geq \lambda |v|$ ، $v \in E^s(p)$.

خط $E^s(p)$ یک خط پایدار و $E^u(p)$ یک خط ناپایدار نامیده می‌شود. هر دوی نگاشت نعل اسب و خودریختی روی هذلولوی چنبره دارای مجموعه‌های هذلولوی هستند: مجموعه پایای کانتور در حالت نعل اسب و کل چنبره در حالت خودریختی هذلولوی چنبره. سیم‌لوله نشان می‌دهد که مفهوم هذلولوی بودن قابل تعمیم به ابعاد بالاتر است؛ قرصها با معادلات $\theta^* = \theta$ نقش صفحات پایا را در این حالت بر عهده دارند. همان‌طور که در همه این مثالها دیدیم، همانند نگاشت درجه دو در فصل اول، مجموعه‌های هذلولوی بستری فراهم می‌آورند که ممکن است در آن آشوب رخ دهد.

همانند حالت یک نقطه ثابت، دینامیک نزدیک به یک مجموعه هذلولوی سرراست است. قضیه بعدی وجود خمینه‌های پایدار و ناپایدار موضعی برای مجموعه‌های هذلولوی را بدست می‌دهد که می‌توان آن را با استفاده از ابزار بخش قبل بررسی کرد.

قضیه ۹.۷ فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک دیفیومورفیسم باشد. فرض کنید Λ یک مجموعه بسته و پایای هذلولوی مشمول در یک ناحیه کراندار در \mathbb{R}^2 باشد. $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که برای هر $p \in \Lambda$ خم هموار $\gamma_p : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^2$ در شرایط زیر صدق کند:

$$\gamma_p(\circ) = p . \text{۱}$$

$$\gamma'_p(t) \neq \circ . \text{۲}$$

۳. γ'_p در طول خط ناپایدار $E^u(p)$ قرار می‌گیرد.

$$F^{-1}(\gamma_p) \subset \gamma_{F^{-1}(p)} . \text{۴}$$

۵. اگر $n \rightarrow \infty$, آنگاه \circ $|F^{-n}(\gamma_p(t)) - F^{-n}(p)| \rightarrow 0$

علاوه بر آن، خمهاي γ_p به صورت پيوسته به p وابسته است.

بنابراین γ_p دقیقاً مانند خمینه‌های ناپایدار موضعی نقاط ثابت رفتار می‌کند. برهان قضیه فوق مشابه ولی بسیار پیچیده‌تر از قضیه خمینه‌های ناپایدار برای یک نقطه است، بنابراین جزئیات آن را حذف می‌کنیم. بهوضوح، گزاره مشابهی برای خمینه‌های پایدار برقرار است.

در مثال‌های ما، بررسی هذلولوی بودن نسبتاً ساده بود چون حداقل در یک جهت، خطی بودن را فرض می‌کردیم. در واقع ما دقیقاً خطوط پایدار و ناپایدار را به دست می‌آوردیم. اغلب سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با چنین شکل مفیدی داده نمی‌شوند. در این حالات، بررسی هذلولوی بودن پیچیده‌تر است. ایده‌های زیر معیاری برای هذلولوی بودن به دست می‌دهد که غالباً مفید است.

برای بردار $v \neq 0$ در \mathbb{R}^3 یا \mathbb{R}^2 ، یک α -محروط حول v تعریف می‌کنیم که شامل همه بردارهایی است که با v یا $-v$ ، زاویه کوچک‌تر از یا مساوی با α می‌سازند. برای مثال، $\frac{\pi}{3}$ -محروط حول e_1 در \mathbb{R}^3 از همه بردارهایی به شکل

$$w = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \nu \end{pmatrix}$$

تشکیل شده است که $|\eta| \geq |\xi|$. $\frac{\pi}{3}$ -محروط حول e_1 در \mathbb{R}^3 از همه بردارهایی مانند

$$W = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \nu \end{pmatrix}$$

تشکیل شده که $\sqrt{\eta^2 + \nu^2} \geq |\xi|$. بردار v هسته α -محروط نامیده می‌شود.

تعریف ۱۰.۷ فرض کنید U یک مجموعه باز باشد، یک میدان-محروط $C(p)$ روی U ، نسبت دادن یک α -محروط به هر نقطه $U \ni p$ است به طوری که

۱. بر حسب p به صورت پیوسته تغییر کند؛

۲. بردار هسته v_p برحسب p به صورت پیوسته تغییر کند.

یک میدان مخروطی را می‌توان به صورت گردایه‌ای از بردارهای مماس در هر نقطه $U \in p$ تصور کرد. کلافهای قطاعی بخش‌های قبل، حالتهای خاص میدانهای مخروطی با هسته e_1 یا e_2 هستند.

مثال ۱۱.۷ چنبرهٔ توپر $D = S^1 \times B^2$ حامل سیم‌لوله را یاد آوری می‌کنیم. هر نقطه در D دارای مختصات (θ, x, y) است. هر بردار مماس بر D را می‌توان به شکل

$$\alpha e + v$$

نوشت که e بردار یکه مماس بر S^1 و

$$v = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

یک بردار در \mathbb{R}^2 است. یک میدان مخروطی طبیعی روی D به صورت

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq |\alpha|$$

تعریف می‌شود.

دربرهان قضیه خمینه‌های پایدار و ناپایدار، دو میدان مخروطی را که توسط DF^{-1} یا DF حفظ و منبسط می‌شوند معرفی کردیم. این شرط، وجود یک خط یکتاً گذرنده از هر نقطه را که تحت DF^{-1} پایا می‌ماند تضمین می‌کند. درحالت کلی نیز بحث مشابهی درست است.

قضیه ۱۲.۷ فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و Λ یک زیرمجموعه بسته و F پایا مشمول در یک ناحیه کران دار در \mathbb{R}^2 باشد. U را یک همسایگی از Λ قرار داده و فرض کنید میدانهای مخروطی دو به دو مجزای C^s و C^u موجودند که برای آنها

$$\alpha \leq \frac{\pi}{4} . ۱$$

$$DF^{-1}(C^s(p)) \subset C^s(F^{-1}(p)) ; DF(C^u(p)) \subset C^u(F(p)) . ۲$$

$$. |DF(p)v| \geq 2|v|, v \in C^u(p) . ۳$$

$$|DF^{-1}(p)w| \geq 2|w|, w \in C^s(p) . ۴$$

در این صورت Λ یک مجموعه هذلولوی بوده و

ملاحظه. بررسی شرط مخروط درسیستم‌های دینامیکی غیرخطی نسبتاً ساده است چون فقط به یک تکرار نگاشت و نه به همه تکرارهای آن وابسته است. این مطلب را در بخش ۹.۲ هنگام بحث درمورد نگاشت هنون روش‌تر می‌کنیم.

یک رده عمومی از دیفیومورفیسم‌ها، از نگاشتهایی تشکیل شده است که مجموعه‌های بازگشته آنها هذلولوی هستند. می‌توان نشان داد که مجموعه‌های بازگشته زنجیری این نگاشتها به اجتماع دو زیرمجموعه‌های پایا (حداقل روی سطوح کران‌دار یا زیرمجموعه‌هایی از صفحه) که روی آنها نگاشت، آشوبناک است تجزیه می‌شود. اگر همه خمینه‌های پایدار و ناپایدار این مجموعه‌ها به صورت مورب همدیگر را قطع کنند، به یک تعیین طبیعی از نگاشتهای مورس-اسمیل دست می‌یابیم. این نگاشتها که به عنوان سیستم‌های دینامیکی اصل A شناخته می‌شوند، دارای پایداری ساختاری هستند در حالی که چند "نکه" آشوبناک همانند سه مثال اصلی مان را دارا هستند.

تمرین.

۱. نشان دهید همه نقاط مجموعه کانتور متناظر با نگاشت نعل اسب اسмیل، بازگشته زنجیری هستند.

۲. نشان دهید هر نقطه در چنبره تحت خودریختی هذلولوی چنبره بازگشته زنجیری است.

۳. نشان دهید همه نقاط در ریاضیاتی‌های موردبخش ۵.۲، بازگشته زنجیری هستند.

۴. نشان دهید مجموعه بازگشته زنجیری، بسته است و تحت تزویج توپولوژیکی پایا می‌ماند.

۵. نشان دهید خودریختی خطی S^2 که با ماتریس

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

القاء می‌شود، مورس-اسمیل است (تمرینهای ۷.۶ تا ۱۶.۶ را ببینید).

۶. مجموعه بازگشته زنجیری را برای خودریختی خطی S^2 که توسط ماتریس

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

القاء می‌شود مشخص کنید.

۷. فرض کنید F یک دیفیومورفیسم و 0 یک نقطه ثابت هذلولوی برای F باشد. نشان دهید که یک همسایگی U از 0 و یک $\epsilon > 0$ موجود است به طوری که اگر G ، به طور C^1 ، ϵ -نزدیک به باشد، آنگاه G دارای یک نقطه ثابت هذلولوی در U است.

۸ انشعاب هاف

همانند حالت نگاشتهای یک بعدی، فقدان هذلولوی بودن، معمولاً نشانه‌ای برای اتفاق افتادن انشعابهای است. در سیستم‌های یک بعدی، هنگامی این اتفاق می‌افتد که مقدار ویژه در یک نقطه متناوب یا $1 +$ باشد (انشعاب زینی-گرهای) یا $1 -$ باشد (انشعاب دوره-دو برابر ساز). برای سیستم‌های با بعد بالاتر نیز این انشعابها رخ می‌دهند ولی انشعابهای دیگری نیز ممکن است در نقاط متناوب رخ دهد. حالت بسیار رایج از آنها، انشعاب هاف است که در این بخش در مورد آن بحث می‌کنیم. قبل از آن چند مثال از انشعابهای زینی-گرهای و دوره-دو برابر ساز در صفحه ارائه می‌دهیم.

مثال ۱.۸ فرض کنید Q_λ نگاشتی در صفحه با ضابطه

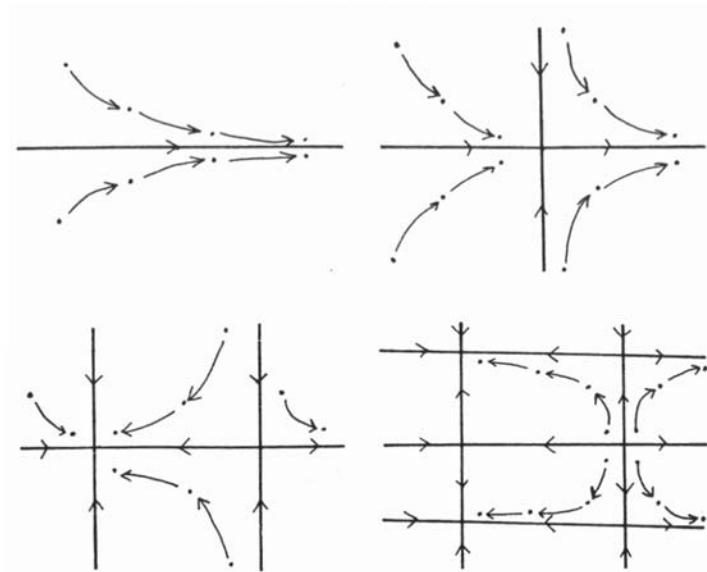
$$\begin{aligned}x_1 &= e^x - \lambda \\y_1 &= -\frac{\lambda}{\pi} \arctan y\end{aligned}$$

باشد. نگاشت Q_λ در واقع از ترکیب دو نگاشت یک بعدی حاصل می‌شود: یکی در جهت x و دیگری در جهت y . با استفاده از نتایج بخش ۱۲.۱ می‌توان به راحتی دید که نگاشت $\lambda - e^x$ در $x \mapsto e^x - \lambda$ دچار یک انشعاب می‌شود در حالی که

$$y \mapsto -\frac{\lambda}{\pi} \arctan y$$

در $\lambda = 2$ دارای انشعاب دوره-دو برابر ساز است. اگر نمای فاز این دو نگاشت را باهم در نظر بگیریم، می‌توانیم نمای فاز Q_λ را توصیف کنیم. هنگامی که $1 < \lambda < 0$ ، Q_λ نقاط را به راست می‌راند و هیچ نقطه متناوبی وجود ندارد. برای $2 < \lambda < 1$ ، Q_λ دارای دو نقطه ثابت است که یکی جاذب و دیگری زینی است. هر دو نقطه ثابت در $\lambda = 2$ متتحمل انشعاب دوره-دو برابر ساز می‌شوند. بنابراین دو مدار متناوب از تناوب 2 برای $\lambda > 2$ موجود است. هنگامی که λ از 2 عبور می‌کند، نقطه ثابت جاذب به یک زینی-گرهای تبدیل می‌شود درحالی که زینی-گرهای به یک دافع تبدیل شده است. شکل ۱.۸ را ببینید.

این وضعیت، کلی است. هنگامی که $\lambda = 1$ شود، یک انشعاب زینی-گرهای در نقطه ثابت 0 اتفاق می‌افتد. در این مقدار λ ، $DQ_\lambda(0)$ دارای یک مقدار ویژه 1 و یک مقدار ویژه با قدر مطلق کمتر

شکل ۱.۸. نمای فاز Q_λ^2 .

از ۱ است. هنگامی که $\lambda = 2$ دو نقطه ثابت دارد که هر دوی آنها دارای یک مقدار ویژه ۱ - و یک مقدار ویژه با قدر مطلق مخالف یک هستند.

در سیستم‌های با بعد بالاتر، یک حالت اضافه وجود دارد که در آن ممکن است یک نقطه ثابت یا متناوب هذلولوی نشود. اگر مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی، مختلط بوده ولی با قدر مطلق یک باشند، نقطه ثابت، غیرهذلولوی است. تا هنگامی که این مقدار ویژه $1 \pm i$ نباشند، معمولاً نوع دیگری از انشعاب رخ می‌دهد.

تحلیل دینامیک نگاشتهای خطی نشان می‌دهد که یک انشعاب باید موقعی رخ دهد که یک مقدار ویژه با دایره واحد برخورد کند. خانواده نگاشتهای

$$L_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

را که $\alpha \neq 0$ یک پارامتر است در نظر بگیرید. اگر $\alpha = 0$ و $\lambda < 1$ ، آنگاه یک نقطه ثابت جاذب است و سایر نقاط به صورت مارپیچ تحت تکرارهای L_λ به سمت مبدأ مختصات می‌چرخند. اگر $\lambda > 1$ ، آنگاه یک نقطه دافع است. بنابراین یک تغییر در $\lambda = 1$ رخ داده است. در مقدار انشعاب، هر دایره با مرکز مبدأ مختصات تحت L_λ پایا می‌ماند. در واقع، دینامیک این دایر بسته به اینکه $\cos \alpha + i \sin \alpha$ یک دوران گویا یا گنگ روی دایره القاء کند متفاوت است.

هنگامی که یک انشعاب در خانواده خطی L_λ هنگام عبور مقدار ویژه از دایره واحد رخ می‌دهد، دینامیک این خانواده در مقدار انشعاب کاملاً خاص است. در دینامیک‌های غیرخطی، انشعاب به صورت دیگری اتفاق می‌افتد. ابتدا به چند مثال توجه می‌کنیم.

مثال ۲.۸ فرض کنید F_λ خانواده نگاشتهای صفحه با ضابطه

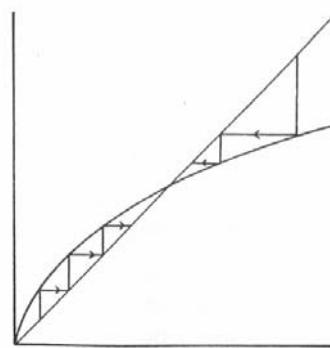
$$F_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g_\lambda(x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

باشد که $g_\lambda(x, y) = \lambda + \beta(x^2 + y^2)$. در اینجا β یک عدد ثابت ناصلفر است که به عنوان پارامتر

دوم در نظر می‌گیریم. هنگامی که $\beta = 0$ به خانواده خطی L_λ تبدیل می‌شود.

توجه کنید که یک نقطه ثابت برای هر λ است و ماتریس ژاکوبی F_λ به صورت

$$DF_\lambda(\circ) = \lambda \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

شکل ۲.۸. نمودار $r \mapsto \lambda r + \beta r^3$

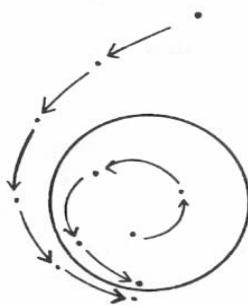
است. بنابراین در $1 = \lambda$ ، مقادیر ویژه همانند قبل از دایره واحد عبور می‌کنند. نتیجه می‌شود که \circ یک نقطه ثابت جاذب برای $1 < \lambda$ و یک نقطه ثابت دافع برای $1 > \lambda$ است. برای مطالعه انشعابی که در $1 = \lambda$ رخ می‌دهد بهتر است که از دستگاه مختصات قطبی استفاده کنیم. در مختصات قطبی، نگاشت دارای شکل

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda r + \beta r^3 \\ \theta_1 &= \theta + \alpha \end{aligned}$$

است. این نگاشت دارای یک دایره پایا با معادله $r = \sqrt{(1 - \lambda)/\beta}$ است هرگاه $\circ > \frac{(1-\lambda)}{\beta}$. بنابراین دو حالت وجود دارد. ابتدا فرض می‌کنیم که $\circ < \beta$. در این صورت اگر $1 > \lambda$ ، دایره پایا تعریف می‌شود و همه نقاط در یک همسایگی به آن جذب می‌شوند. این به راحتی از طریق تحلیل نموداری نگاشت $r \mapsto \lambda r + \beta r^3$ دیده می‌شود. شکل ۲.۸ را ببینید. نمای فاز این انشعاب در شکل ۳.۸ رسم شده است.

بنابراین دیدیم که در مقدار انشعاب با تبدیل شدن یک نقطه ثابت جاذب به دافع، یک دایره پایا متولد می‌شود. این یک انشعاب هاف است.

هنگامی که $\circ > \beta$ ، وضعیت تا حدودی متفاوت است. برای همه $1 < \lambda$ ، \circ یک جاذب و دایره پایا، دافع است. هنگامی که λ از ۱ عبور کند، دایره پایا و مبدأ مختصات یکی می‌شوند و نقطه ثابت در \circ ، دافع می‌شود. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم (تمرین ۱ را ببینید).



شکل ۳.۸. نمای فاز نگاشت F_λ .

یک مثال کلی‌تر از انشعاب هاف به وسیله خانواده زیر از نگاشتهای

$$F_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g_\lambda(x, y) \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \gamma r^2) & -\sin(\alpha + \gamma r^2) \\ \sin(\alpha + \gamma r^2) & \cos(\alpha + \gamma r^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

برای عدد ثابت ناصرف γ است داده می‌شود. در مختصات قطبی، این خانواده از نگاشتها به صورت

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda r + \beta r^3 \\ \theta_1 &= \theta + \alpha + \gamma r^2 \end{aligned}$$

در می‌آید. می‌توان به راحتی بررسی کرد که این خانواده متتحمل انشعابهای همانند بالا می‌شود (تمرین ۲ را ببینید). پس از بحث روی حالت‌های نرمال دوباره به این خانواده باز می‌گردیم. توجه کنید که در هر یک از حالت‌های فوق، دینامیک دایره پایا یک دوران ساده با یک زاویه ثابت است. لزومی ندارد که نگاشت روی دایره پایا همان‌طورکه مثال بعد نشان می‌دهد اینقدر ساده باشد.

مثال ۳.۸ نگاشت

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda r + \beta r^3 \\ \theta_1 &= \theta + \nu + \epsilon \sin(k\theta) \end{aligned}$$

را در دستگاه مختصات قطبی برای یک k صحیح و ϵ کوچک در نظر بگیرید. همانند فوق، دایره $r = \sqrt{\frac{(1-\lambda)}{\beta}}$ پایاست. روی دایره، نگاشت به صورت $\theta + \nu + \epsilon \sin(k\theta)$ است. این، خانواده استاندارد است که به تفصیل در بخش ۱۴.۱ درموردن آن بحث شد. اگر $\nu = \frac{2\pi}{k}$ ، می‌توان به راحتی بررسی کرد که دقیقاً دو مدار متناوب از تناب k برای ϵ کوچک موجود است.

در دو مثال قبل، از آنجاکه هر یک از نگاشتها در حالت ساده و خاص فرض شده بودند، محاسبه انشعاب ساده بود. نمی‌توان انتظار داشت که یک نگاشت دلخواه نیز به این سادگی باشد. با این وجود، در حالت کلی می‌توان از طریق اعمال یک سری از تبدیلات، نگاشت را به صورت ساده‌تری نوشت تا کار کردن با آن ساده‌تر باشد. به این روند، تبدیل یک نگاشت به فرم نرمال گفته می‌شود. از آنجاکه در آینده از روند مشابهی در نقاط مختلف استفاده می‌کنیم، در این بخش با دقت بیشتری آن را بررسی می‌کنیم تا در آینده در زمان صرفه جویی کنیم.

با خانواده F_μ از نگاشتهای غیرخطی به صورت

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha x - \beta y + O(2) \\y_1 &= \beta x + \alpha y + O(2)\end{aligned}$$

که $\alpha + i\beta = \mu$ یک پارامتر است شروع می‌کنیم. عبارت $O(2)$ نماینده جملات با درجه دو یا بیشتر یعنی، جملاتی به صورت

$$\alpha_1 x^2 + \alpha_2 xy + \alpha_3 y^2 + \beta_1 x^3 + \beta_2 x^2 y + \dots$$

هستند. فرض ما این است که تمام ضرایب α_j, β_j و ... به μ وابسته هستند. توجه کنید که با استفاده از سری تیلور، هر نگاشت غیرخطی را که مبدأ مختصات را ثابت نگه دارد می‌توان به صورت چندجمله‌ای با درجه کمتر از یا مساوی با n به اضافه یک باقیمانده نوشت.

توجه کنید که $DF_\mu(0)$ دارای مقدادر ویژه $\bar{\mu} = \mu \pm i\beta$ است. از آنجاکه به طور مقدماتی با نگاشتهایی کار می‌کنیم که برای آنها μ یک عدد مختلط است، بهتر است که این نگاشت را به جای اینکه بر حسب متغیرهای x و y در نظر بگیریم، آنرا به مختصات مختلط ببریم. تعریف کنید

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\ \bar{z} &= x - iy.\end{aligned}$$

ما با این متغیرهای مختلط کار می‌کنیم. توجه کنید که هر اطلاعاتی که در مختصات z و \bar{z} داده شود، به سرعت قابل تبدیل به متغیرهای x و y است چون

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \\ y &= \frac{1}{2i}(z - \bar{z})\end{aligned}$$

تبدیلات عکس هستند. با این متغیرهای جدید، نگاشت به صورت ساده

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 + iy_1 + \dots \\ &= \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y) + \dots \\ &= (\alpha + i\beta)(x + iy) + \dots \\ &= \mu z + \dots\end{aligned}$$

فرض می‌شود و به صورت مشابه داریم

$$(\bar{z})_1 = \overline{\mu z} + \dots$$

که در اینجا سه نقطه نشان‌دهنده جملات با مرتبه بالاتر بر حسب z و \bar{z} هستند. خوبی این کار این است که به جای نوشتن معادله بر حسب دو متغیر x_1 و y_1 ، آن را بر حسب z می‌نویسیم. معادله بر حسب z با مزدوج گیری مختلط از معادله بر حسب \bar{z} به دست می‌آید. سپس؛ با استفاده از ملاحظه فوق، x_1 و y_1 به سرعت به دست می‌آیند. توجه کنید که ضرایب جملات فوق ممکن است مختلط باشند.

برای اینکه کار کردن با نگاشتهایی به این صورت، کارآمد باشد، تقریباً ضروری است که بعضی از جملات با مرتبه بالا حذف شوند. این کار از طریق انتخاب یک تزویج مناسب در نزدیکی مبداء مختصات قابل انجام است. نتیجه، یک صورت نرمال برای نگاشت است. برای حالت موردنظر ما، نتیجه به این صورت است:

قضیه ۴.۸ فرض کنید $F_\mu(z) = \mu z + O(5)$ که μ برای $k = 1, \dots, 5$ ریشه k ام واحد نباشد. در این صورت همسایگی U از 0 و دیفیومورفیسم L روی U موجود است به طوری که نگاشت $L^{-1} \circ F_\mu \circ L$ به صورت

$$z_1 = \mu z + \beta(\mu) z^2 \bar{z} + O(5)$$

است. در اینجا، نماد $O(5)$ به معنی جملات با درجه ۵ یا بالاتر است.

ملاحظه. توجه کنید که جملات غیرخطی در فرم نرمال خود چقدر ساده هستند. هیچ جمله‌ای از درجه دو یا چهار وجود ندارد و فقط یک جمله از درجه سه موجود است. بیشتر غیرخطی بودن به جملات از درجه ۵ که دارای مقادیر نسبتاً کوچکی هستند محدود شده است؛ جمله غیرخطی غالب، جمله درجه سه باقیمانده است.

این قضیه به وسیله دنباله‌ای از قضیه‌ها که هر یک صورت ساده‌تری از نگاشت را به دست می‌دهد اثبات می‌شود. برهان هر یک از قضیه‌ها دارای یک محاسبه سرراست است؛ ترفندی که به کار می‌رود این است که نتیجه موردنظر را از ابتدا حدس می‌زنیم.

قضیه ۵.۸ فرض کنید F_μ یک نگاشت به صورت

$$z_1 = \mu z + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z \bar{z} + \alpha_3 \bar{z}^2 + O(3)$$

با $\mu \neq 0$ باشد. در این صورت همسایگی U_1 از 0 و دیفیومورفیسم $L_1 : U_1 \rightarrow R^2$ موجود است به طوری که $L_1^{-1} \circ F_\mu \circ L_1$ را می‌توان به شکل G_μ که به صورت

$$z_1 = \mu z + O(3)$$

داده می‌شود در نظر گرفت. در اینجا μ ریشه اول یا سوم μ نیست.

برهان. فرض کنید L_1 به صورت

$$L_1(z) = z + a_1 z^1 + a_2 z \bar{z} + a_3 \bar{z}^2$$

باشد که

$$a_1 = \frac{-\alpha_1}{\mu(1 - \mu)}$$

$$a_2 = \frac{-\alpha_2}{\mu(1 - \bar{\mu})}$$

$$a_3 = \frac{-\alpha_3}{\mu - \bar{\mu}^2}.$$

از آنجاکه $D L_1 = I$ (۰)، از قضیه نگاشت وارون نتیجه می‌شود که L_1 یک دیفیومورفیسم روی یک همسایگی U_1 از 0 است. توجه کنید که در عبارات مربوط به a_1 و a_2 به صورت پیش‌فرض باید $1 \neq \mu$ ، در حالی که در عبارت مربوط به a_3 ، μ باید ریشه سوم 1 باشد. در این صورت به راحتی می‌توان رابطه

$$F_\mu \circ L_1 = L_1 \circ G_\mu$$

را به وسیله جملاتی با درجات یک یا دو محاسبه کرد. \square

خواننده ممکن است متعجب باشد که L_1 چگونه انتخاب شده است. می‌توان L_1 را با فرض (با امید) اینکه G_μ قابل انتقال است و سپس، حل معادله تزویج بر حسب جملات شامل L_1 به دست آورد. محاسبات جبری آن سرراست است.

قضیه ۶.۸ فرض کنید G_μ نگاشتی به صورت

$$z_1 = \mu z + \beta_1 z^1 + \beta_2 z^2 \bar{z} + \beta_3 z \bar{z}^2 + \beta_4 \bar{z}^3 + O(4)$$

برای $\mu \neq 0$ باشد. در این صورت همسایگی U_2 از صفر و دیفیومورفیسم $L_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ موجود است به طوری که $L_2^{-1} \circ G_\mu \circ L_1$ را می‌توان به صورت H_μ که با فرم

$$z_1 = \mu z + \beta_2 z^2 \bar{z} + O(4)$$

داده می‌شود فرض کرد. در اینجا μ ریشه دوم یا چهارم واحد نیست.

برهان. فرض کنید L_2 به صورت

$$L_2(z) = z + b_1 z^3 + b_2 z \bar{z}^2 + b_3 \bar{z}^3$$

باشد که

$$b_1 = \frac{-\beta_1}{\mu(1 - \mu^3)}$$

$$b_2 = \frac{-\beta_2}{\mu(1 - \bar{\mu}^3)}$$

$$b_3 = \frac{-\beta_3}{\mu - \bar{\mu}^3}.$$

در این صورت می‌توان به سادگی بررسی کرد که $G_\mu \circ L_2 = L_2 \circ H_\mu$

ملاحظه. جمله $\beta_2 z^2 \bar{z}$ را نمی‌توان با اضافه کردن یک جمله به صورت $b_2 z^2 \bar{z}$ به L_2 حذف کرد چون منجر به معادله‌ای به صورت

$$b_2 = \frac{-\beta_2}{\mu(1 - \mu\bar{\mu})}$$

می‌شود. جمله $\mu\bar{\mu} - 1$ برای هر μ روی دایره واحد برابر با صفر می‌شود و این دقیقاً حالت مورد مطالعه ماست. همچنین توجه می‌کنیم که اگر $1 = \mu^3$, آنگاه عبارت

$$\mu - \bar{\mu}^3 = \frac{\mu^3 - 1}{\mu^3}$$

نیز برابر با صفر می‌شود. بنابراین، در این حالت، جمله $\beta_4 \bar{z}^3$ را نیز نمی‌توان حذف کرد. قضیه بعدی دقیقاً مانند دو قضیه قبلی اثبات می‌شود. بنابراین برهان را به خواننده واگذار می‌کنیم.

قضیه ۷.۸ فرض کنید H_μ نگاشتی به صورت

$$z_1 = \mu z + \beta_2 z^2 \bar{z} + O(4)$$

با $\mu \neq 0$ باشد. در این صورت همسایگی U_3 از 0 و دیفیومorfیسم $L_3 : U_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ موجود است به طوری که می‌توان $L_3^{-1} \circ H_\mu \circ L_3$ را به صورت

$$z_1 = \mu z + \beta_2 z^2 \bar{z} + O(5)$$

فرض کرد. در اینجا μ ریشه سوم یا پنجم نیست.

ملاحظات.

۱. همانند قضیه ۶.۸، اگر $\mu^5 = 1$ ، می‌توان بررسی کرد که جمله $\beta\bar{z}^4$ را نمی‌توان با تبدیل فوق حذف کرد. بنابراین فرم نرمال دراین حالت به صورت

$$z_1 = \mu z + \beta |z|^2 z + \gamma \bar{z}^4 + O(5)$$

است که β و γ اعداد ثابت بوده و $|z|^2 = z\bar{z}$.

۲. این سه قضیه، روند پایه‌ای را تشکیل می‌دهند که ما را قادر می‌کنند که یک نگاشت را به فرم نرمال آن درآوریم. فرض کنید $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ دارای مقدار ویژه μ باشد. دراین صورت یک دنباله از تبدیلات به ما اجازه می‌دهد که F را به صورت

$$z_1 = \mu z + \beta_1 |z|^2 z + \beta_2 |z|^4 z + \dots + \beta_\ell |z|^{2\ell} z + \gamma \bar{z}^{k-1} + O(k)$$

درآوردیم که $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ و γ اعداد ثابت بوده و ℓ قسمت کسری $\frac{k-2}{2}$ است. این فرم نرمالی را که برای حالت $k=5$ پیدا شد تعمیم می‌دهد. تمرینهای ۴ و ۵ را ببینید.

ترکیب سه قضیه قبلی، برهان قضیه ۴.۸ را به دست می‌دهد. توجه کنید که در مختصات قطبی، فرم نرمال قضیه ۴.۸ به صورت

$$\begin{aligned} r_1 &= |\mu|r + \beta(\mu)r^3 + O(5) \\ \theta_1 &= \theta + \alpha(\mu) + \gamma(\mu)r^2 + O(5) \end{aligned}$$

است که $|\mu|e^{i\alpha} = \mu$ ، β و γ اعداد ثابت هستند. در اینجا، $O(5)$ نماینده جملاتی است که حاوی توانهای پنجم یا بالاتر از r هستند. لازم به ذکر است که تا جملات با توان پنجم، این نگاشت اساساً همانند مثال ۲.۸ در فوق است.

اکنون به هدف اصلی مان در این بخش یعنی بیان قضیه انشعاب هاف باز می‌گردیم.

قضیه ۸.۸ فرض کنید F_λ خانواده نگاشتهایی است که به پارامتر λ وابسته‌اند و در شرایط زیر صدق می‌کنند.

$$1. \text{ برای هر } \lambda, F_\lambda(0) = 0$$

$$2. \text{ } DF_\lambda(0) \text{ دارای مقادیر ویژه } \mu(\lambda) \text{ و همچنین } \bar{\mu}(\lambda) \text{ است که } 1 = |\mu(\lambda)| \text{ و همچنین } |\bar{\mu}(\lambda)| = 1 \text{ نیست.}$$

$$3. \text{ برای } \lambda = 0, \frac{d}{d\lambda} |\mu(\lambda)| > 0$$

۴. در فرم نرمالی که در قضیه ۴.۸ داده شد، $\beta(\mu(\circ)) < \lambda$ برای $\epsilon < \lambda$ تعريف شده و

در این صورت $\epsilon > 0$ و یک منحنی بسته ζ_λ به صورت $r = r_\lambda(\theta)$ که برای $\epsilon < \lambda < \zeta_\lambda$ در یک همسایگی از F_λ پایاست موجود است. به علاوه، ζ_λ در یک همسایگی از λ جاذب است و با λ داریم $\zeta_\lambda \rightarrow 0$.

ملاحظات.

۱. فرض $|\frac{d}{d\lambda}|\mu(\lambda)| > 0$ برای $\lambda = 0$ ، به این معنی است که با افزایش λ ، مقادیر ویژه از درون دایره واحد به بیرون آن عبور می‌کنند.

۲. اگر نامساویهای ۳ و ۴ در فوق را بر عکس کنیم، قضیه درست باقی می‌ماند. اگرچه پس از انشعاب، دایره پایا، دافع می‌شود در حالی که مبداء مختصات جاذب باقی می‌ماند. مثال ۳.۸ را ببینید.

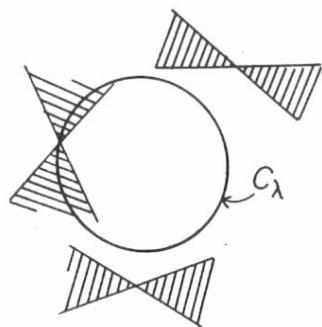
از آنجاکه برهان این قضیه تا حدودی تکنیکی است، آن را ثابت نمی‌کنیم. ایده اصلی اثبات، مشابه ایده برهان در قضیه خمینه‌های پایدار است. بنابراین فقط در چند مرحله طرح کلی اثبات آن را در ساده‌ترین شکل بیان می‌کنیم.

فرض کنید N_λ نگاشتی باشد که از حذف جملات با مرتبه بالاتر در فرم نرمال F_λ به دست آمده باشد، یعنی، N_λ به صورت

$$\begin{aligned} r_1 &= (1 + \lambda)r + \beta(\lambda)r^3 \\ \theta_1 &= \theta + \alpha(\lambda) + \gamma(\lambda)r^3 \end{aligned}$$

داده شود. همانند مثال ۳.۸ دایره C_λ جاذب پایاست که به صورت $r = \sqrt{\frac{-\lambda}{\beta(\lambda)}}$ برای $\lambda > 0$ و $\beta(\lambda) > 0$ داده می‌شود. یک خم ساده بسته دیگر مانند $r = r(\theta)$ در یک همسایگی C_λ در نظر بگیرید. همان‌طور که در مثال ۳.۸ نشان دادیم، این خم را به سمت C_λ جذب می‌کند. به علاوه، اگر فرض کنیم $1 \leq |r'(\theta)| < r$ ، آنگاه می‌توان بررسی کرد که تصویر خم دارای شبیه با قدر مطلق اکیداً کمتر از ۱ است. یعنی، N_λ همان‌طور که در شکل ۴.۸ نشان داده شده است، کلاف قطاعی نزدیک C_λ را حفظ می‌کند.

این به ما اجازه می‌دهد که یک تبدیل نمودار نزدیک C_λ مشابه آن چیزی که در برهان قضیه خمینه‌های پایدار استفاده کردیم، تنظیم کنیم. برای N_λ ، این تبدیل نمودار دارای یک نمودار ثابت یکتاست که البته این نمودار، دایره پایای C_λ است. سپس می‌توان نشان داد که روند مشابهی هنگامی که جملات با مرتبه بالاتر به N_λ اضافه می‌شوند نیز برقرار است. نتیجه، یک خم بسته پایای جاذب یکتا برای F_λ نزدیک به C_λ برای مقدار λ به اندازه کافی کوچک و مثبت است.

شکل ۴.۸. کلاف‌های قطاعی نزدیک C_λ

تمرین.

۱. ساختار انشعاب نگاشت

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda r + \beta r^3 \\ \theta_1 &= \theta + \alpha \end{aligned}$$

را برای $1 < \lambda < \infty$ و $\beta > 0$ تجزیه و تحلیل کنید.

۲. ساختار انشعاب نگاشت

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda r + \beta r^3 \\ \theta_1 &= \theta + \alpha + \gamma r^2 \end{aligned}$$

را برای $\beta, \gamma \neq 0$ و $\lambda > 0$ تجزیه و تحلیل کنید.

۳. قضیه ۷.۸ را ثابت کنید.

۴. فرض کنید $F(\phi) = 0$ دارای یک مقدار ویژه $\mu = \mu^k$ باشد. نشان دهید که اگر F قابل تبدیل به

$$z_1 = \mu z + \beta |z|^2 z + \gamma \bar{z}^3 + O(4)$$

است. اگر $k = 5$ ، نشان دهید F قابل تبدیل به

$$z_1 = \mu z + \beta |z|^2 z + \gamma \bar{z}^4 + O(5)$$

است.

۵. فرض کنید $\circ = DF(\circ)$ دارای مقدار ویژه $\mu^k = 1$ باشد. نشان دهید F را می‌توان به فرم نرمال

$$z_1 = \mu z + \beta_1 |z|^{\frac{k}{2}} z + \dots + \beta_\ell |z|^{\frac{k}{2}\ell} z + \gamma \bar{z}^{k-1} + O(k)$$

$$\text{تبديل کرد که } \ell \leq \frac{k-2}{2}$$

۹ نگاشت هنون

این بخش نمایانگر بسیاری از تکنیکها و ایده‌های معرفی شده در فصل دو بوده و شامل تعداد زیادی تمرین است که همه آنها در مورد نگاشتی به نام نگاشت هنون است. این نگاشت یک خانواده دو پارامتری از نگاشتهای روی صفحه است و بسیاری از ساختارها و پدیده‌هایی را داراست که در این فصل بیان شد. مجموعه‌های هذلولوی، نقاط هموکلینیک، انشعابها، نعل اسبها، "رباینده‌های غریب" و تقریباً هر آنچه در مورد آن صحبت کردیم و حتی بیشتر از آن برای این نگاشت اتفاق می‌افتد. به عنوان یک پاداش، خانواده درجه دو یک بعدی که نقش برجسته‌ای در فصل اول بازی می‌کرد نیز در دینامیک این بخش گنجانده شده است. بنابراین ما به این بخش به عنوان یک تکرار از رئوس مطلب هر آنچه که در گذشته آمده نگاه می‌کنیم. همچنین نگاشت هنون یک موضوع مهم در تحقیقات اخیر است و هنوز بسیاری از مقادیر پارامتری این نگاشت به خوبی شناخته شده نیست. در واقع، ما به این بخش به عنوان انگیزه‌ای برای تحقیقات بعدی در سیستم‌های دینامیکی نگاه می‌کنیم. بعضی از مسائل مهمی که حل نشده را در پایان این بخش می‌آوریم.

فرض کنید $H = H_{a,b}$ نگاشت روی صفحه با ضابطه

$$\begin{aligned} x_1 &= a - by - x^2 \\ y_1 &= x \end{aligned}$$

باشد. نگاشت H به دو پارامتر حقیقی وابسته است و نگاشت هنون نامیده می‌شود. توجه کنید که فقط یک جمله غیرخطی وجود دارد. بنابراین H یکی از ساده‌ترین نگاشتهای غیرخطی در ابعاد بالاست.

۱. DH را محاسبه کنید و نشان دهید $\det(DH) = b$. ثابت کنید که اگر $b \neq 0$ ، آنگاه H وارون پذیر با نمایش H^{-1} است.

۲. اگر $b = 0$ ، H کل صفحه را به روی سهمی P با ضابطه $x = a - y^2$ می‌نگارد. نشان دهید تحدید H به P مزدوج توبولوژیکی با یک دوست قدیمی یعنی $y = g(y)$ است. (راهنمایی: P را به روی محور y تصور کنید و نگاشت القاء شده را محاسبه کنید.)

۳. نشان دهید که اگر $1 < |b| \leq 1$ و آنگاه A و B با $|B| > 1$ موجود است به طوری که $H_{a,b}$ مزدوج توپولوژیکی با $H_{A,B}^-$ است.

به عنوان یک نتیجه از این سه تمرین، کافیست که فقط حالت $1 \leq |b| < 0$ را در نظر بگیریم چون $b = 0$ نگاشت درجه دو را می‌دهد که در فصل یک بررسی شد (تمرین ۷.۱ از فصل ۱ را ببینید). حالت $1 = |b|$ بعداً بررسی می‌شود. بنابراین فعلاً فرض کنید $1 < |b| < 0$.

۴. نقاط ثابت $H_{a,b}$ را بباید. نشان دهید که برای هر b , $a = a_0$ موجود است به طوری که

الف. اگر $(b) < a_0$, آنگاه H هیچ نقطه ثابتی ندارد.

ب. اگر $(b) = a_0$, آنگاه H دارای یک نقطه ثابت یکتاست.

ج. اگر $(b) > a_0$, آنگاه H دارای دونقطه ثابت به صورت (x_+, x_-) است که $x_+ > x_-$

۵. نشان دهید p_- یک نقطه زینی برای $a > a_0$ است.

۶. نشان دهید $a_1 = a_1(b)$ موجود است به طوری که اگر $a < a_1 < a_0$, نقطه ثابت p_+ جاذب است.

سه تمرین قبل نشان می‌دهند که انشعاب زینی-گرهای در نگاشت هنون در $(b) = a_0$ اتفاق می‌افتد.

۷. با رسم x_+ و x_- در مقابل a , تصویری از نمودار انشعاب برای نقاط ثابت H ارائه دهید.

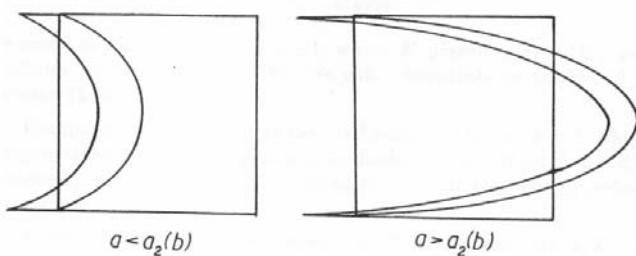
۸. ثابت کنید

الف. اگر $(b) = a_1$ دارای یک مقدار ویژه ۱ – است؛

ب. اگر $(b) = a_1$ یک نقطه زینی است. در دو حالت $b > 0$ و $b < 0$ با تغییر a , درمورد رفتار مقادیر ویژه $DH(p_+)$ بحث کنید.

۹. نقاط متناوب با تناوب ۲ نگاشت H را محاسبه کنید. نشان دهید یک مدار متناوب یکتا با تناوب ۲ برای $a > a_1(b)$ موجود است و اگر $a \leq a_1$, چنین مداری وجود ندارد. ثابت کنید این مدار متناوب با $a_1 \mapsto a_1$ به p_+ میل می‌کند. البته این انشعاب دوره-دو برابر ساز است.

۱۰. از طریق گامهای زیر نشان دهید که اگر $a < a_0$ و $b > 0$, آنگاه برای هر $p \in \mathbb{R}^2$, با $n \rightarrow \pm\infty$ داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} H^n(p) = \emptyset$. نتیجه بگیرید که هنگامی که $a < a_0$, H دارای هیچ نقطه متناوبی نیست.



شکل ۱.۹

الف. قرار دهید $\{(x, y) | x \leq -|y|, y \in M_1\}$. نشان دهید که اگر $(x_0, y_0) \in M_1$ ، آنگاه $x_1 < x_0$ و $(x_1, y_1) \in M_1$

ب. قرار دهید $\{x, y) | x \geq -|y|, y \leq 0\} \subset H(M_1)^o$. نشان دهید که $M_2 = \{(x, y) | x \geq -|y|, y \leq 0\}$

ج. قرار دهید $H^{-1}(M_1 \cup M_2) = M_3 = \{(x, y) | x \geq -|y|, y \geq 0\} \subset (M_2)^o$. نشان دهید که $(x_0, y_0) \in M_3$ که $|y_{-1}| > |y_0|$

د. اگر $H^{-1}(x_0, y_0) = (x_{-1}, y_{-1})$ ، نشان دهید که $|y_{-1}| > |y_0|$

۱۱. ساختار مشابهی برای برهان حالت $a < b$ و $a > b$ بیان کنید.

بنابراین این دو تمرین ثابت می‌کنند که "هیچ" دینامیکی برای نگاشت هنون قبل از انشعاب زینی-گرهای وجود ندارد. این مشابه وضعیتی است که برای نگاشت درجه دویک بعدی با آن برخورد کردیم.

۱۲. فرض کنید R ریشه بزرگ‌تر $\rho^2 - (|b| + 1)\rho - a = 0$ و همچنین S مربعی با مرکز مبداء مختصات و رؤوس $(\pm R, \pm R)$ باشد. با استفاده از افزار بالا، نشان دهید که همه نقاط متناوب برای $x_0, y_0 \in S$ درون H قرار می‌گیرند. این کار را با نشان دادن اینکه اگر $x_n \rightarrow \infty$ یا $x_n \rightarrow -\infty$ یا $y_n \rightarrow \infty$ یا $y_n \rightarrow -\infty$ آنگاه هنگامی که $n \rightarrow \infty$ انجام دهید.

۱۳. ثابت کنید که تصویر S تحت H همانند شکل ۱.۹ است. نشان دهید که $a_2 = a_2(b)$ موجود است به طوری که تصویر S کاملاً a_2 را قطع می‌کند. a_2 را دقیقاً محاسبه کنید.

^۶ علامت o نشان‌دهنده درون مجموعه است.

به شباخت بسیار زیاد این تصاویر و نگاشت نعل اسب در بخش ۳.۲ توجه کنید. در حقیقت، مجموعه نقاطی که مدار آنها در همه زمانها در S باقی می‌ماند، همسان ریخت با Σ_2 همانند حالت نگاشت نعل اسب است. چند تمرین بعدی، برخانی برای این حقیقت ارائه می‌دهد.

۱۴. مخروطهای

$$C^u(\lambda) = \{(\xi, \eta) \mid |\xi| \geq \lambda|\eta|\},$$

$$C^s(\lambda) = \{(\xi, \eta) \mid |\eta| \geq \lambda|\xi|\}$$

را برای $1 \geq \lambda$ در نظر بگیرید. نشان دهید اگر $\frac{\lambda(1+|b|)}{4} \geq |x|$ ، آنگاه $C^u(\lambda)$ تحت $DH(x, y)$ پایاست. به صورت مشابه اگر $\frac{\lambda(1+|b|)}{4} \geq |y|$ ، نشان دهید $C^s(\lambda)$ تحت $DH^{-1}(x, y)$ پایاست.

۱۵. فرض کنید $(\lambda, \xi_0, \eta_0) \in C^u(\lambda)$ و $\frac{\lambda(1+|b|)}{4} \geq |x| > \lambda|\xi_0|$. نشان دهید که $|\xi_1| > \lambda|\eta_0|$ و $|\eta_{-1}| \geq \lambda|\xi_0|$.

۱۶. نشان دهید $a_3 = a_2(b)$ موجود است به طوری که اگر $a > a_3$ ، آنگاه λ در تمرینهای بالا ممکن است بزرگ‌تر از ۲ انتخاب شود.

فرض کنید D نمایانگر مربع S با دو نوار حذف شده $\frac{\lambda(1+|b|)}{4} \leq |x|, |y|$ باشد. قرار دهید $\Lambda = \{(x, y) \in D \mid H^n(x, y) \in D, \forall n \in \mathbb{Z}\}$. با این شرط که $a > a_3(b)$ ، سه تمرین فوق ثابت می‌کنند که Λ یک مجموعه هذلولوی است.

اکنون دینامیک نمادین را دقیقاً مشابه آنچه برای نگاشت نعل اسب انجام دادیم معرفی می‌کنیم. از $\frac{\lambda(1+|b|)}{4} > |x|$ ، S را به دو نوار عمودی تقسیم می‌کند که آنها را با V_1 و V_2 نمایش می‌دهیم. به صورت مشابه، $\frac{\lambda(1+|b|)}{4} > |y|$ ، S را به دو نوار افقی تقسیم می‌کند که آنها را با H_1 و H_2 نمایش می‌دهیم. گوییم یک زیرمجموعه V از S یک نوار عمودی است هرگاه

الف. $V \subset V_1 \cup V_2$

ب. $V = \{(x, y) \mid v_1(y) \leq x \leq v_2(y)\}$ که v_1 و v_2 خمهای عمودی در S هستند.

نوارهای افقی به صورت مشابه تعریف می‌شوند. قرار دهید $s = (\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots) \in \Sigma_2$. تعریف کنید

$$V_{s_0s_1\dots s_k} = \{(x, y) \in D \mid V^i(x, y) \in V_{s_i}, 0 \leq i \leq k\}$$

$$H_{s_{-1}\dots s_{-k}} = \{(x, y) \in D \mid H^i(x, y) \in H_{s_i}, -k \leq i \leq -1\}.$$

۱۷. نشان دهید که اگر $a_3(b) > a$ یک نوار عمودی و $H_{s_{-1} \dots s_k}$ یک نوار افقی است.

۱۸. نشان دهید

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} V_{s_{-1} \dots s_k} = V_s$$

یک خم عمودی است و

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} H_{s_{-1} \dots s_{-k}} = H_s$$

یک خم افقی است.

۱۹. نشان دهید نگاشت $h : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$ داده می‌شود $h(\dots s_{-2}s_{-1}.s_0s_1s_2\dots) = V_s \cap H_s$ که با Σ_2 یک همسان ریختی است.

۲۰. نشان دهید h یک تزوج تپولوژیکی بین H روی Λ و σ روی Σ_2 ارائه می‌دهد.

بنابراین نگاشت هنون مشابه نگاشت درجه دو در بعد دو است. برای یک مقدار ثابت b ، با افزایش پارامتر a ، دینامیک $H_{a,b}$ بسیار پیچیده‌تر می‌شود. برای مقدار کوچک a ، $H_{a,b}$ هیچ نقطه متناوبی ندارد، در حالی که برای مقدار بزرگ a ، بی‌نهایت نقطه متناوب موجود است و در واقع، $H_{a,b}$ دارای یک مجموعه پایاست که $H_{a,b}$ روی آن، مزدوج تپولوژیکی با خود ریختی تغییر جاست.

ملاحظات.

۱. با وجود اینکه تبدیل دینامیک نگاشت هنون از ساده به پیچیده، مسئله مهم و قابل توجهی در تحقیقات ریاضی است ولی هنوز به خوبی شناخته شده نیست.

۲. قضیه شارکوفسکی مسلماً در \mathbb{R}^3 برقرار نیست. در واقع هنگامی که $1 = b$ ، در ادامه نشان می‌دهیم که تناوب دو، آخرین تناوبی است که با افزایش a رخ می‌دهد.

۲۱. حالت حافظ مساحت. هنگامی که $1 = b$ ، نگاشت هنون دارای خاصیت ویژه حفظ مساحت در صفحه است. یعنی، اگر S یک مستطیل در \mathbb{R}^3 باشد و $H(S)$ تصویر آن باشد، نشان دهید که

$$\int \int_S dx dy = \int \int_{H(S)} dx dy.$$

این نتیجه برای $b = -1$ نیز درست است و نگاشت H حافظ مساحت است (ولی با جهت عکس، چون $1 = -\det(DH)$). در تمرینهای ۲۲ تا ۳۴ روی حالت $b = 1$ تمرکز می‌کنیم.

۲۲. در حالت $b = 1$ ، مقادیر ویژه را در نقاط ثابت p_{\pm} محاسبه کنید. نشان دهید مقادیر ویژه p_{\pm} مختلط بوده و دارای قدر مطلق ۱ هستند هرگاه $a_1 < a < a_0$. مقادیر a_0 و a_1 را دقیقاً مشخص کنید. بنابراین نقاط ثابت p_{\pm} برای $a < a_0$ هذلولوی نیستند.

۲۳. نشان دهید هر نقطه متناوب برای H دارای مقادیر ویژه λ^{-1} و λ^1 است که (در حالت $b = 1$) در یکی از حالت‌های زیر صدق می‌کند

الف. $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{ب. } \lambda^{-1} = \bar{\lambda}, \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{و } |\lambda| = 1$$

در حالت الف، نقطه متناوب مطابق معمول هذلولوی است. در حالت ب، نقطه متناوب بیضوی نامیده می‌شود.

فرض کنید R نگاشت خطی باشد که توسط

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ y_1 &= x \end{aligned}$$

داده شده است. توجه کنید که R ، خط Δ را که با $x = y$ داده می‌شود حفظ می‌کند و در $R \circ R = \text{id}$ صدق می‌کند. نگاشت با این خاصیت یک برگشت نامیده می‌شود.

۲۴. نشان دهید در حالتی که $b = 1$ ، $H = U \circ R \circ H^{-1}$. نتیجه بگیرید R که U نیز یک برگشت است. مجموعه $\text{Fix}(U)$ را مشخص کنید. نگاشتهایی با این خاصیت ویژه، R برگشت پذیر نامیده می‌شوند. این تقارن در بسیاری از سیستم‌های دینامیکی که در مکانیک کلاسیک پدید می‌آید، دیده می‌شود. خوبی آن این است که اغلب، مسئله یافتن بعضی از نقاط متناوب خاص یا نقاط هموکلینیک را ساده‌تر می‌کند.

۲۵. نشان دهید که اگر $\Delta \in \mathcal{D}$ و $q \in \Delta$ ، آنگاه q متناوب با تناوب $2k$ است.

۲۶. نشان دهید که اگر $q \in \text{Fix}(U)$ و $H^k(q) \in \text{Fix}(U)$ ، آنگاه q متناوب با تناوب $2k$ است.

۲۷. نشان دهید که اگر $\Delta \in \mathcal{D}$ و $q \in \text{Fix}(U)$ ، آنگاه q متناوب با تناوب $1 - 2k$ است. نقاط متناوب که در سه تمرین قبلی پدید می‌آیند، نقاط متناوب متقارن نامیده می‌شوند.

۲۸. ملاقات دوباره با دینامیک نمادین. با استفاده از دینامیک نمادین که در بالا معرفی شد، نشان دهید که عمل R ، نگاشت

$$\hat{R}(\dots s_{-2}s_{-1}.s_0.s_1s_2\dots) = (\dots s_2s_1s_0.s_{-1}s_{-2}\dots)$$

را روی دنباله‌ها القاء می‌کند.

۲۹. نشان دهید که نگاشت تغییرجای σ را می‌توان به صورت ترکیب دو برگشت یعنی $\sigma = \hat{U}o\hat{R}$ نوشت.

۳۰. همه دنباله‌های متناوب متقارن تحت σ را مشخص کنید.

۳۱. نظریه انشعاب برای نگاشتهای برگشت‌بذر. یادآوری می‌کنیم که برای $a_0 < a < a_1$ مقادیر ویژه در نقطه ثابت p_+ روی دایره واحد قرار می‌گیرند. نشان دهید که این مقادیر ویژه هنگامی که از a_0 به a_1 افزایش پیدا می‌کند یک بار دایره واحد را قطع می‌کنند. نتیجه بگیرید که یک مقدار پارامتری یکتا موجود است که برای آن این مقدار ویژه یک ریشه n ام واحد است $(n \geq 3)$.

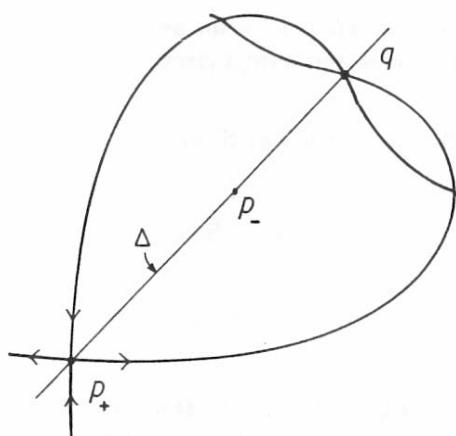
۳۲. فرض کنید یک ریشه n ام واحد برای $3 \geq n$ بوده و فرض کنید a^* مقدار پارامتری باشد که برای آن مقدار ویژه p_+ ، برابر با a^* و a است. نشان دهید یک انشعاب در a^* موجود است که در آن با گذشتن مقدار a از a^* ، حداقل یک مدار متناوب متقارن با تناوب n از p_+ جدا می‌شود (راهنمایی: به رفتار (Δ) H^n هنگامی که a از a^* می‌گذرد توجه کنید).

بنابراین دیدیم که نقاط متناوب نگاشت هنون هنگامی که مقادیر ویژه از یک ریشه n ام واحد بگذرند پدید می‌آیند. در واقع، می‌توان نشان داد در هر چنین نقطه انشعابی، یک جفت مدار متناوب متقارن حادث می‌شود.

ملاحظات.

۱. این نشان می‌دهد که انشعابهایی در یک مجموعه چگال از مقادیر پارامتری بین a_0 و a_1 موجود است.

۲. توجه کنید که نقاط متناوب با تناوب $3 \geq n$ باید در یک افزایش از a_0 به a_1 رخ دهند. در اولین ظهور یک نقطه با تناوب دو را داریم؛ یعنی تناوب دو آخرین چیزی است که رخ می‌دهد. این کاملاً با ترتیب شارکوفسکی مغایرت دارد!



شکل ۲.۹.

۳۳. انشعاب هموکلینیک. فرض کنید $\Delta \subset W^u(p)$ و $q \in W^s(p)$. نشان دهید $q \in W^u(p)$ و بنابراین یک نقطه هموکلینیک است. چنین نقاط هموکلینیکی، نقاط هموکلینیک متقارن نامیده می‌شوند.

۳۴. نشان دهید که اگر $a > a_*$ آنگاه H دارای یک نقطه متقارن هموکلینیک در p_- است. یعنی، به محض اینکه اولین نقطه ثابت هذلولوی H در یک انشعاب زینی-گرهای متولد شود، به یک نقطه هموکلینیک گسترش می‌یابد. نشان دهید که نمای فاز H همانند شکل ۲.۹ است.

تمرینهای بالا نشان می‌دهند که شاخصه نگاشتهای حافظ مساحت کاملاً با نگاشتهایی که حافظ مساحت نیستند ($|b| > 1$) متفاوت است. نگاشتهای حافظ مساحت رده مهمی از نگاشتهای را تشکیل می‌دهند که اغلب در کاربردهایی از مکانیک پدید می‌آیند. ساختار چنین نگاشتهایی نزدیک به نقطه ثابت بیضوی، معمولاً پیچیده است و هنوز به طور کامل شناخته شده نیست. این قضیه معروف موثر تویست^۷ است که بیان می‌کند با اعمال یک همواری خاص و شرایط مقادیر ویژه، بی نهایت دایره پایا حول یک نقطه ثابت بیضوی موجود است. نگاشت روی این دوایر، به سادگی یک دوران گویاست. اگرچه نگاشت در بین این دوایر ممکن است کاملاً آشوبناک باشد. مطالعه نگاشتهای نزدیک به یک نقطه بیضوی می‌تواند یک جلد کامل دیگر به کتاب اضافه کند.

ملاحظات. در ادامه دو مسئله باز مطرح شده است.

۱. هنگامی که $a = 1.4$ و $b = -0.3$ ، مطالعات عددی نشان می‌دهد که نگاشت هنون دارای یک ”رباینده غریب“ است. تمرین ۱۰.۵ را ببینید. در اینجا چه اتفاقی می‌افتد؟
۲. نمودار انشعاب کامل $H_{a,b}$ را بسازید (در صفحه $a b$ با $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$.

برای مطالعه بیشتر

تعدادی کتاب موجود است که می‌توانند موضوعات فصل ۲ را تکمیل کرده و گسترش دهد. در این کتاب، سعی کردیم از استفاده از خمینه‌ها در سیستم‌های دینامیکی اجتناب کنیم ولی اغلب نتایج این فصل به سادگی قابل بیان برای حالت کلی‌تر است. همچنین اکثر این مطالب را می‌توان به میدانهای برداری یا شارها، بدون زحمت زیاد گسترش داد. کتابهای اساسی که ترکیبی از این دو گسترش هستند در زیر آمده است.

- Palis, J. and de Melo, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- Arnol'd, V.I. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1977.
- Szlenk, W. *An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems*. John Wiley and Sons, Chichester, 1984.

ما همچنین از کاربردهای نظریه سیستم‌های دینامیکی در این کتاب خودداری کردہ‌ایم. در سالهای اخیر، مشخص شده است که دینامیک آشوبناک در تعداد بسیار زیادی از سیستم‌های فیزیکی مهم اتفاق می‌افتد. دو کتاب که تعدادی از این کاربردها را تجزیه و تحلیل می‌کند عبارتند از:

- Guckenheimer, J. and Holmes, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- Wiggins, S. *Global Bifurcations and chaos*. Springer-Verlag, New York, 1988.

کاربردهای سیستم‌های معادلات دیفرانسیل که در مکانیک کلاسیک پدید می‌آید یک منبع مفید از مسائل در سیستم‌های دینامیکی ایجاد کرده است. تعدادی از کتابهای پیشرفته در این زمینه عبارتند از:

- Abraham, R. and Marsden, J. *Foundations of Mechanics*. Second Edition. Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978.
- Arnol'd, V. I. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York. 1974.
- Moser, J. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1973.

کتاب اخیر حاوی یک مثال از این موضوع است که چگونه نگاشت نعل اسب اس梅یل در مسئله محدود شده سه جسم، در مکانیک سماوی به کار می‌رود. برای اثبات قضیه خمینه پایدار و ناپایدار برای مجموعه‌های هذلولوی، خواننده می‌تواند به کتاب زیر مراجعه کند.

- Shub, M. *Global Stability of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 1987.

کتاب زیر حاوی سه مقاله مروری در چند زمینه مهم است: نظریه انشعاب توسط گوکن‌هایمر، مجموعه‌های هذلولوی نیو‌هاوس^۸ و سیستم‌های انتگرال پذیر موزر.

- *Dynamical Systems*. CIME Lectures, Bressanone, Italy. Birkhäuser, Boston, 1980.

کتاب زیر حاوی معرفی نظریه ارگودیک در سیستم‌های دینامیکی است.

- Maně, R. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

در انتهای، سری چهار جلدی "سری ریاضی شهودی" تألیف آبراهام^۹ با رهیافتی هندسی به سیستم‌های دینامیکی با شکل‌های رنگارنگ و جالب معرفی می‌شود.

- Abraham, R. and Shaw, C. *Dynamics: The Geometry of Behavior. Part One: Periodic Behavior. Part Two: Chaotic Behavior. Part Three: Global Behavior. Part Four: Bifurcation Behavior*. Aerial Press, Santa Cruz, Calif., 1982.

Newhouse^۸
Abraham^۹

فصل ۳

دینامیک توابع تحلیلی

موضوع نسبتاً تخصصی دینامیک توابع تحلیلی مختلط در سالهای اخیر به صورت قابل ملاحظه‌ای موردنوجه قرار گرفته است. این گرایش که توسط ریاضی دانانی چون فتو^۱ و جولیا^۲ در سال ۱۹۲۰ پدید آمد، تا اواخر دهه هفتاد در بسیاری از بخشها مسکوت باقی مانده بود. پس از آن به سبب تصاویر کامپیوتری اغواکننده مندلبروت^۳ و همچنین کارهای جالب‌توجه دوادی^۴، هابارد^۵ و سالیوان^۶، یک‌بار دیگر توجه به دینامیک نگاشتهای مقدماتی صفحه مختلط جلب شد.

هدف ما در این فصل این نیست که مروری از کارهای انجام شده اخیر ارائه دهیم. به جای آن، سعی می‌کنیم که نشان دهیم چگونه اضافه کردن شرط تحلیلی بودن، موجهای جدیدی در سیستم دینامیکی ایجاد می‌کند. یک نگاشت تحلیلی مختلط، صفحه را به دو زیرمجموعهٔ مجرزا تقسیم می‌کند؛ مجموعهٔ پایدار، که روی آن دینامیک نسبتاً آشناست و مجموعهٔ جولیا که نگاشت روی آن آشوبناک است. سعی می‌کنیم این رفتار آشوبناک را با جزئیات بیان کنیم و انواع ساده رفتارهای پایدار را که ممکن است رخ دهد، مثال بزنیم.

برای ساده‌تر کردن توصیف، به صورت عمدۀ روی چند جمله‌ای‌های صفحه مختلط تمرکز می‌کنیم. اغلب نتایج برای دسته عمومی تراز نگاشتهای تحلیلی مانند نگاشتهای گویا و نگاشتهای تام برقرار است. در انتهای این فصل، به صورت خلاصه چند پدیده اضافه‌تر را که برای این دسته از نگاشتها رخ

Fatou^۱
Julia^۲
Mandelbrot^۳
Douady^۴
Hubbard^۵
Sullivan^۶

می‌دهد، بیان می‌کنیم.

در واقع، این فصل باید بین دو فصل نگاشتهای یک بعدی و نگاشت ابعاد بالاتر قرار می‌گرفت. در ادامه خواهیم دید که نگاشتهای تحلیلی، علی‌رغم این واقعیت که دارای زمینه‌ای با بعد بالاترند، بسیاری از خواص سیستم‌های یک بعدی را دارا هستند. از آنجاکه مطالعه نگاشتهای تحلیلی، نیازمند تکنیک‌های ریاضی بیشتری ممکن است برگرایش آنالیز مختلط است، تصمیم گرفتیم که این فصل را در انتهای موردنیاز این گرایش را به صورت خلاصه در بخش بعد می‌آوریم.

۱ پیش‌نیازهایی از آنالیز مختلط

ما در این فصل به صورت عمده روی دینامیک نگاشتهای چندجمله‌ای تمرکز می‌کنیم ولی اغلب تکنیک‌های مهم مورد استفاده، قابلِ إعمال روی دسته بسیار کلی‌تری از نگاشتهای تحلیلی مختلط هستند. برخی از نتایج بسیار مهم را در این بخش خلاصه می‌کنیم. برای برهان و جزئیات بیشتر، خواننده را به هریک از کتابهای کانوی^۷ یا آلفورس^۸ که معرفی بسیار خوبی از آنالیز مختلط ارائه می‌دهند ارجاع می‌دهیم.

صفحه مختلط را با \mathbb{C} نمایش می‌دهیم. یک عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ نوشته می‌شود که $i = \sqrt{-1}$. قسمت حقیقی z ، یعنی x را با $\operatorname{Re}(z)$ و قسمت موهومی آن، یعنی y را با $\operatorname{Im}(z)$ نمایش می‌دهیم. اندازه z را با $|z|$ نشان می‌دهیم، یعنی،

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

تعریف ۱.۱ نگاشت $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ در z تحلیلی است هرگاه

$$F'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}$$

موجود باشد.

تعریف ۲.۱ فرض کنید $U \subset \mathbb{C}$ یک مجموعه باز همبند باشد. نگاشت $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ روی U تحلیلی است هرگاه در هر نقطه $U \in \mathbb{C}$ تحلیلی باشد.

Conway^۷
Ahlfors^۸

قضیه ۳.۱ فرض کنید $F(z)$ در \mathbb{C} تحلیلی باشد. در این صورت $|z - z_0| < r$ موجود است به طوری که برای

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

این بدان معناست که هر نگاشت را حداقل به صورت موضعی می‌توان با یک سری توانی نمایش داد. البته چندجمله‌ای‌ها حالت بسیار خاصی هستند و از آنجا که برای آنها مجموع بالا متناهی است، سوال همگرایی مطرح نیست.

بسیاری از نگاشتهایی که با آنها در ریاضیات مقدماتی مواجه می‌شویم، تحلیلی هستند. علاوه بر چندجمله‌ای‌ها، همه نگاشتهای گویا به صورت $\frac{P(z)}{Q(z)}$ که P و Q چندجمله‌ای هستند، در دامنه تعریف‌شان تحلیلی‌اند. در ادامه نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان تعریف این نگاشتهای را به نقاطی که در آنها $Q(z) = 0$ گسترش داد. دسته دیگری از توابع تحلیلی، توابع تمام متعالی هستند، یعنی، توابعی که سری توانی غیرچندجمله‌ای آنها در کل صفحه مختلط همگراست. مثالهایی از توابع تمام، توابعی چون توابع نمایی مختلط، سینوس و کسینوس هستند. برای استفاده‌های بعدی، تعاریف این نگاشتهای مختلط را در اینجا یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۴.۱ فرض کنید $z = x + iy$.

$$\exp(z) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

ما از مجموعه‌های باز همبند بدون "حفره" استفاده می‌کنیم. این نواحی، همبند ساده نامیده می‌شوند. به جای وارد شدن به توصیف تکنیکی مجموعه‌های همبند ساده، تعریف ویژه زیر از همبندی ساده را قبول می‌کنیم. در واقع از طریق قضیه بسیار مهم نگاشت ریمان، تعریف ما کاملاً عمومیت دارد

(حداقل برای نواحی روی صفحه). تأکید می‌کنیم که این تعریف استاندارد همبندی ساده نیست، ولی برای اهداف ما کافی است.

تعریف ۵.۱ زیرمجموعه باز U از \mathbb{C} همبند ساده است هرگاه یا $U = \mathbb{C}$ و یا اینکه یک نگاشت تحلیلی یک به یک و به روی $U \rightarrow D$: موجود باشد که D ، قرص باز واحد با معادله $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ است.

مثال ۶.۱ هر نیم صفحه به صورت $\text{Im}(z) > a$ یا $\text{Re}(z) > a$ همبند ساده است. در واقع، نگاشت

$$F(z) = \frac{z+1}{1-z},$$

را به روی نیم صفحه راست $\text{Re}(z) > 0$ می‌نگارد.

قضیه زیر بعضی از خواص بکتابی نگاشتهای تحلیلی را به طور خلاصه بیان می‌کند.

قضیه ۷.۱ فرض کنید $U \subset \mathbb{C}$ باز بوده و فرض کنید $F : U \rightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی باشد. در این صورت

۱. نگاشت $F : U \rightarrow \mathbb{C}^{(n)}$ تحلیلی است که در اینجا n نماینده امین مشتق F است.

۲. در \mathbb{C} باز است با این شرط که F ناثابت باشد.

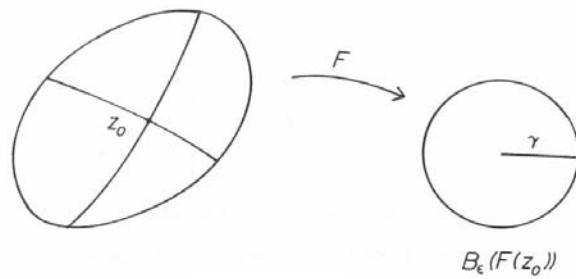
۳. (اصل ماکسیمم) اگر \overline{U} کران دار باشد، آنگاه $|F(z)|$ مقادیر ماکسیمم خود را روی مرز \overline{U} اخذ می‌کند.

با استفاده از قضیه تابع وارون، وجود یک وارون (تحلیلی) موضعی نتیجه می‌شود.

قضیه ۸.۱ فرض کنید F تحلیلی بوده و z_0 که برای آن $F'(z_0) = 0$ و یک همسایگی U از z_0 موجود است به طوری که F ، U را به صورت یک به یک به روی $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - F(z_0)| < \epsilon\}$ تحلیلی است.

فرض تحلیلی بودن به ما این اجازه را می‌دهد که تا حدودی در مورد رفتار یک تابع تحلیلی نزدیک یک نقطه بحرانی یعنی نقطه‌ای چون z_0 که برای آن $F'(z_0) = 0$ صحبت کنیم.

قضیه ۹.۱ فرض کنید F تحلیلی است و برای $n \geq j < 1$ ، $F^{(j)}(z_0) = 0$ ، ولی $F^{(j+1)}(z_0) \neq 0$ و یک همسایگی U از z_0 موجود است به طوری که اگر $w \in U$ باشد، آنگاه دقیقاً n جواب برای معادله $F(z) = w$ در U وجود داشته باشد.



شکل ۱.۱.

محتوی این قضیه از طریق هندسی به خوبی دیده می‌شود. قرص با شعاع ϵ حول $F(z_0)$ را با $B_\epsilon(F(z_0))$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید γ شعاعی باشد که $F(z_0)$ را به مرز $B_\epsilon(F(z_0))$ وصل کند. در این صورت، پیش‌تصویرهای مختلف γ ، U را به n قطاع تقسیم می‌کند و F ، درون هر قطاع را به صورت همسان ریخت به روی $\gamma - B_\epsilon(F(z_0))$ می‌نگارد. شکل ۱.۱ را ببینید. برای مثال، برای $n \geq 2$ ، $F(z) = z^n$ را در نظر بگیرید. یک جواب یکتا برای معادله $z^n = w$ موجود است. همچنین $F(z) = w$ برای هر $w \neq 0$ ، دارای دقیقاً n جواب است که ریشه‌های آن در ادامه باعث می‌شود که آن را با عنوان قضیه بیان کیم.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنید F در قرص $1 < |z|$ تحلیلی باشد و در شرایط

$$|F(z)| \leq 1$$

$$F(0) = 0$$

صدق کند. در این صورت $|F'(0)| \leq |F(z)| \leq 1$. تساوی فقط هنگامی برقرار است که $F(z) = e^{i\theta}z$

برای برهان، خواننده را به کتاب آلفورس ارجاع می‌دهیم. لم شوارتس نشان می‌دهد که نگاشتهای تحلیلی روی نواحی همبند ساده، بسیار خاص هستند. گزاره بعدی، نسخه بسیار مفیدتری از هدف ما را در مورد این نتیجه نشان می‌دهد.

نتیجه ۱۱.۱ فرض کنید U یک زیرمجموعه همبند ساده از \mathbb{C} بوده و $U \rightarrow F : U \rightarrow \mathbb{C}$ تحلیلی باشد. اگر F دارای نقطه ثابت z_0 در U باشد، آنگاه یا

۱.۱ و برای هر $z_0 \in U$ ، $|F'(z_0)| < 1$ و یا $F^n(z) \rightarrow z_0$.

۲.۲ $e^{i\theta}$ و $F'(z_0) = e^{i\theta}$ به صورت تحلیلی مزدوج با دوران روی قرص واحد تحت نگاشت است.

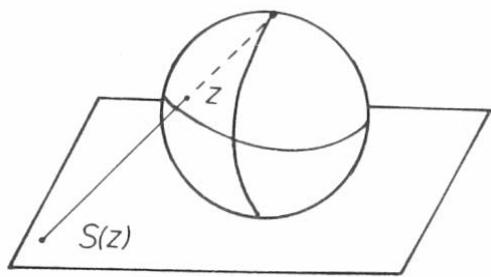
ملاحظه. حالت $\mathbb{C} = U$ باید مستثنی شود چون نگاشت $F(z) = az$ با $|a| > 1$ بهوضوح یک مثال نقض است. این یکی از خصلتهای قابل توجه نگاشتهای تحلیلی مختلط است که روی هیچ زیرمجموعه باز همبند ساده دیگر از \mathbb{C} نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

یکی از دلایل اصلی ما برای تمرکز کردن روی چندجمله‌ای‌ها، توانایی قضیه زیر است که به قضیه اساسی جبر معروف است.

قضیه ۱۲.۱ فرض کنید $P(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد. اگر z_0 آنگاه $P(z)$ را می‌توان به صورت $P(z) = a_n(z - z_0)^n + \dots + a_1(z - z_0)$ نوشت که a_i ‌ها لزوماً مجرزاً نیستند.

نگاشتهای تحلیلی مختلط، اغلب رفتار نسبتاً سرراستی با ∞ دارند. برای مثال، $Q(z) = z^{\alpha}$ را در نظر بگیرید. اگر $1 < |\alpha|$ ، آنگاه تحت تکرار، $Q^n(z) \rightarrow \infty$ در حالی که اگر $1 < |\alpha|$ ، آنگاه $Q^n(z) \rightarrow \infty$. بنابراین، برای این نگاشت، نقاط ∞ را می‌توان به عنوان " نقاط ثابت "جاده در نظر گرفت. البته ما باید (∞) را ∞ تعریف کنیم تا این مطلب معنی داشته باشد و این کار کاملاً درست است. نگاشت $H(z) = \frac{1}{z}$ را در نظر بگیرید. نگاشت H را به ∞ می‌نگارد و بالعکس. توجه کنید که H یک به یک و تحلیلی است و $H \circ Q = Q \circ H^{-1}$ ، یعنی H را با خودش مزدوج می‌کند! ملاحظه کنید که رفتار موضعی Q نزدیک ∞ به رفتار Q نزدیک صفر برد می‌شود. یعنی، رفتار این نگاشت حول ∞ همانند رفتار آن نزدیک صفر است. این بدین معنی است که هیچ چیز خاصی در مرور ∞ وجود ندارد و ما ممکن است با ∞ به عنوان نقطه دیگری در صفحه مختلط یا ترجیحاً صفحه مختلط گسترش یافته رفتار کنیم. همه اینها با معرفی کره ریمان واضح می‌شود. این کره به صورت زیر حاصل می‌شود. هر نقطه از $\{\infty\} \cup \mathbb{C}$ را با یک نقطه یکتا روی کره به طریق زیر یکی می‌کنیم.

یک کره را در نظر گرفته و قطب جنوب آن را روی مبدأ مختصات در \mathbb{C} قرار دهید. از قطب شمال آن یک خط راست به نقطه‌ای چون ∞ رسم کنید. این خط راست، کره را دقیقاً در یک نقطه که آن را با $S(z)$ نمایش می‌دهیم قطع می‌کند. توجه کنید که در این صورت S یک همسان‌ریختی از \mathbb{C} به روی کره به جز قطب شمال آن به دست می‌دهد. برای تکمیل این تصویر، قرار می‌دهیم $S(\infty) =$ قطب شمال. هنگامی که به این طریق نگاه کنیم، "قضای" $\{\infty\} \cup \mathbb{C}$ ، کره ریمان نامیده شده و با $\overline{\mathbb{C}}$ نمایش داده می‌شود. به صورت شهودی، کره ریمان از طریق جمع کردن صفحه به روی کره به جز قطب شمال و سپس اضافه کردن یک نقطه "در بی‌نهایت" و چسباندن همه آنها به هم حاصل می‌شود. شکل ۲.۱ را ببینید.



شکل ۲.۱. کره ریمان

نگاشتهای تحلیلی روی کره ریمان چگونه توصیف می‌شوند؟ دقیقاً همان کاری را می‌کنیم که برای نگاشت $z = Q(z)$ انجام دادیم؛ به سادگی نگاشت را با نگاشت دیگری که ∞ را به جای دیگری " منتقل می‌کند" مزدوج می‌کنیم. به طور دقیق‌تر، فرض کنید $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ و $F(\infty) = z$. برای سادگی، فرض می‌کنیم $z \neq \infty$. در این صورت F در ∞ تحلیلی نامیده می‌شود هرگاه در \circ $H \circ F \circ H^{-1}$ در این صورت F در ∞ تحلیلی نامیده می‌شود هرگاه $H(z) = \frac{1}{z}$ باشد که در اینجا $H(z) = \frac{1}{z}$ همانند بالاست (اگر $F(\infty) = z$ که $z \mapsto \frac{1}{z} - a$ جایگزین می‌کنیم).

مثال ۱۳.۱ فرض کنید $P(z) = a_n z^n + \dots + a_0$ یک چندجمله‌ای با $n \geq 2$ باشد. در این صورت $P(\infty) = \infty$ و P در ∞ تحلیلی است. در واقع،

$$H \circ P \circ H^{-1}(z) = \frac{1}{P\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{z^n}{a_n + a_{n-1}z + \dots + a_0 z^n}.$$

این نگاشت گویا بوده و مشتق آن در $z = 0$ صفر می‌شود. درنتیجه $P'(0) = 0$.

مثال ۱۴.۱ فرض کنید

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

که ضرایب a, b, c, d مختلط بوده و در $ad - bc \neq 0$ صدق می‌کنند. نگاشت L یک تبدیل خطی کسری نامیده می‌شود. اگر $a \neq 0$ با استفاده از تزویج $\frac{1}{z}$ به نگاشت

$$F(z) = \frac{c + dz}{a + bz}$$

می‌رسیم و $F'(\infty) = \frac{ad - bc}{a^2} \neq 0$. بنابراین ∞ یک نقطه منظم برای L است.

به طور کلی، اگر $R(z)$ یک نگاشت گویا به صورت $\frac{P(z)}{Q(z)}$ باشد که P و Q چندجمله‌ای هستند، آنگاه R یک نگاشت تحلیلی روی کل کره ریمان القاء می‌کند. نقطه در ∞ ممکن است همانند حالت چندجمله‌ای یک نقطه ثابت باشد، یا اینکه همانند حالت $\frac{1}{z} = R(z)$ ، متناوب باشد. در واقع، ∞ تحت تکرار یک نگاشت تحلیلی می‌تواند همانند سایر نقاط رفتار کند. توجه کنید نقاطی که تحت یک نگاشت گویا به ∞ نگاشته می‌شوند، قطب نامیده می‌شوند.

تمرین.

تمرینهای زیر مربوط به نگاشتهای گویا به صورت

$$T(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

هستند که $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$. اگر $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ، نگاشت فوق، یک تبدیل موبیوس نامیده می‌شود. از این پس فرض می‌کنیم $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

۱. نشان دهید یک تبدیل موبیوس، یک دیفیومorfیسم تحلیلی روی کره ریمان القاء می‌کند.

۲. نشان دهید که وارون T موجود است و باز یک تبدیل موبیوس است.

۳. مقدار (∞) را محاسبه کرده و نشان دهید $\infty = T(\frac{-\delta}{\gamma})$.

۴. نشان دهید هر تبدیل موبیوس را می‌توان به صورت ترکیبی از انتقالات (نگاشتهایی به صورت $z \rightarrow z + a$ ، انعکاسها $\frac{1}{z} \rightarrow z$ و تبدیل تجانس $z \rightarrow bz$) نوشت. تبدیل تجانس ممکن است یک انقباض ($1 < |b|$)، یک ابساط ($1 > |b|$) یا یک دوران ($1 = |b|$) باشد.

۵. نشان دهید یک تبدیل موبیوس، خطوط راست در \mathbb{C} را به دوایر یا خطوط راست می‌نگارد. به صورت مشابه نشان دهید که دوایر نیز به دوایر یا خطوط راست نگاشته می‌شوند. از آنجاکه خطوط راست در \mathbb{C} ، متناظر با دوایر واقعی در کره ریمان هستند، دایره (تعمیم یافته) نامیدن آنها قابل توجیه است. بنابراین این تمرین را به صورت مختصر می‌توان این چنین بیان کرد: نشان دهید تبدیلات موبیوس، دوایر را به دوایر در $\overline{\mathbb{C}}$ می‌نگارد.

۶. نشان دهید اگر $\alpha - \delta = 0$ و $\beta\gamma = 2$ ، آنگاه T دارای یک نقطه ثابت یکتا در ∞ است. در این حالت، T یک تبدیل سهموی نامیده می‌شود.

۷. نشان دهید که یک تبدیل سهموی به صورت تحلیلی مزدوج با یک تبدیل به صورت $z \mapsto z + \mu$ است.

۸. نشان دهید اگر T دارای دو نقطه ثابت باشد، آنگاه T به صورت تحلیلی مزدوج (از طریق یک تبدیل موبیوس) با یک نگاشت خطی یکتا به فرم $\mu z \mapsto z$ است. اگر $1 = |\mu|$ ، T بیضوی و اگر $1 \neq |\mu|$ ، T هذلولوی نامیده می‌شود.

۹. مشخص کنید کدامیک از تبدیلات موبیوس زیر سهموی، هذلولوی یا بیضوی هستند.

الف. $T(z) = \frac{1}{z}$

ب. $T(z) = 2z + 1$

ج. $T(z) = \frac{z+1}{z-1}$

د. $T(z) = \frac{z}{2-z}$

ه. $T(z) = iz + 1 - i$

۱۰. فرض کنید C_1 مجموعه خطوط گذرنده از مبدأ مختصات و C_2 مجموعه دوایر هم مرکز حول نقطه 0 باشند. توجه کنید که $\mu z \mapsto z$ اعضای C_1 و C_2 را حفظ می‌کند. تحت تزویج توصیف شده در تمرین ۸ هر دوی C_1 و C_2 به "دوایر" در کره ریمان نگاشته می‌شوند. تصاویر دوایر C_1 و C_2 ، دوایر اشتاینر^۹ برای T نامیده می‌شوند. این دوایر را برای نگاشتهای موبیوس زیر رسم کنید.

الف. $T(z) = \frac{1}{z}$

ب. $T(z) = 2z + 1$

ج. $T(z) = \frac{z}{2-z}$

۱۱. نشان دهید مشتق شوارتسی یک تبدیل موبیوس، متعدد با صفر است.

۲ ملاقات دوباره با نگاشتهای درجه دو

در این بخش، به دوست قدیمی‌مان یعنی نگاشتهای درجه دوم باز می‌گردیم. این‌بار این نگاشتها به جای خط حقیقی برای سیستم‌های دینامیکی روی صفحه مختلط به کار می‌روند. دینامیکهای حاصل حداقل برای مقادیر پارامتری خاص به صورت قابل ملاحظه‌ای پیچیده‌تر هستند. ما مطالعه نگاشتهای درجه دوم به صورت $z^2 + c = Q_c(z)$ را که یک پارامتر مختلط است انتخاب می‌کنیم به‌این دلیل که برای این نگاشتها، نقطه بحرانی به صورت مناسب در صفر واقع شده است. در دینامیک

مختلط، مدار نقطه بحرانی نقش بر جسته‌ای دارد. قابل ذکر است که برای هر عدد مختلط $\lambda \neq 0$ ، یک $c(\lambda) = c$ موجود است که برای آن نگاشت درجه دوم $(1 - \lambda z)^{-1} \mapsto z$ که در فصل یک مطالعه شد، به صورت تحلیلی مزدوج با $c + z^2 \mapsto z$ از طریق نگاشتی به صورت $az + b \mapsto z$ است (تمرین ۱.۷ در فصل اول را ببینید).

ما ابتدا "ساده‌ترین" نگاشت از این خانواده یعنی $z = (z)_0$ را برمی‌گزینیم. روی خط حقیقی، این نگاشت فقط دارای دو نقطه ثابت 0 و 1 بوده و سایر نقاط دیگر تحت تکرار به یکی از این دو نقطه یا به ∞ میل می‌کنند. در صفحه مختلط، دینامیک پیچیده‌تر بوده ولی قابل مطالعه است.

ملاحظه کنید که اگر $1 < |z|$ ، آنگاه $0 \rightarrow (Q^n)_0(z)$ ، در حالی که اگر $|z| > 1$ ، آنگاه $\infty \rightarrow (Q^n)_0(z)$. بنابراین دینامیک Q خارج از دایره واحد بسیار آرام است اگرچه روی S^1 ، نگاشت آشوبناک است. در واقع، 0 روی S^1 به یک دوست قدیمی دیگر یعنی $2\theta \mapsto e^{i\theta}$ تبدیل می‌شود. در بخش ۳.۱، نشان دادیم که نقاط متناوب هذلولوی برای این نگاشت در S^1 چگال هستند و سپس در بخش ۴.۱ دیدیم که در واقع این نگاشت آشوبناک است. یادآوری می‌کنیم که سه جزء یک دینامیک آشوبناک عبارتند از

۱. وابستگی حساس به شرایط اولیه

۲. ترایایی توپولوژیکی بودن

۳. داشتن نقاط متناوب چگال.

این حقیقت که $2\theta \mapsto e^{i\theta}$ طول کمانها را با فاکتور 2 منبسط می‌کند به ما این توانایی را می‌دهد که موارد ۱ تا ۳ را برای این نگاشت ثابت کنیم. در این مثال، دایره واحد، مجموعه جولیا برای Q است. بیشترین تلاش ما در این فصل، توصیف ساختار و دینامیک این مجموعه برای سایر نگاشتهای تحلیلی مختلط است.

تعریف ۱.۲ فرض کنید $\mathbb{C} \rightarrow P$ یک چندجمله‌ای باشد. مجموعه جولیای P که با $J(P)$ نمایش داده می‌شود، بستان مجموعه نقاط متناوب دافع P است.

همانند فصلهای گذشته، یک نقطه متناوب $(z_0)_0 = P^n(z_0)$ دافع است، هرگاه $1 > |(P^n)'(z_0)|$. قابل ذکر است که برای یک سیستم دینامیکی مختلط، این مشتق، یک عدد مختلط است و بنابراین قدرمطلق مقدار آن، اندازه $(z_0)_0'$ را نشان می‌دهد. به سایر خواص $J(Q)$ می‌پردازیم. ابتدا، $J(Q)$ کاملاً پایاست. منظور از این جمله این است که $J(Q)$ شامل همه تصاویر پیش رو و پیش تصویر این نقاط در J است. به عنوان یک نتیجه، مکمل $J(Q)$ نیز کاملاً پایاست. این مجموعه را مجموعه پایدار نامیده و دوباره تأکید می‌کنیم که دینامیک روی این مجموعه کاملاً آرام است.

تعريف ۲.۲ مجموعه پایدار P که آن را با $S(P)$ نمایش می‌دهیم، مکمل مجموعه جولیاست.

یک خاصیت بسیار جالب مجموعه جولیای Q این است که همسایگی‌های هر نقطه در J ، تحت تکرارهای Q کل صفحه را در بر می‌گیرد. به صورت دقیق‌تر،

قضیه ۳.۲ فرض کنید $1 = |z_0|$ و فرض کنید U یک همسایگی از z_0 باشد. در این صورت برای هر $z \in \mathbb{C}$ که $|z - z_0| < r$ موجود است به‌طوری که $z \in Q^m(U)$.

برهان. فرض کنید $e^{2\pi i\theta} = z_0$. یک $\epsilon > 0$ موجود است به‌طوری که بخشی از قطاع W که با $\theta - \epsilon < \arg(z) < \theta + \epsilon$ تشکیل می‌شود در داخل U قرار می‌گیرد. حال Q_ϵ را در هر دو راستای θ و $\theta + \epsilon$ منبسط می‌کند. به ویژه، n ای موجود است به قسمی که Q^n_ϵ کمان $\epsilon < |\theta - \theta_0|$ و $1 < r = n$ را به قدر کافی انبساط می‌دهد به‌طوری که تصویر آن S^n را می‌پوشاند. نتیجه می‌شود که $Q^n_\epsilon(W)$ شامل حلقه $(1 - \epsilon)^k < r < (1 + \epsilon)^k$ است و

نتیجه به سرعت حاصل می‌شود. \square

روش دیگر برای دیدن این قضیه این است که هر نقطه (به جز 0) دارای یک توالی از پیش‌تصویرهاست که به مجموعه جولیا میل می‌کند. بنابراین مجموعه جولیا برای Q_ϵ یک دافع آشوبناک است. نگاشتهای Q^n_ϵ نه تنها نقاط را روی مجموعه جولیا از هم دور کرده و پخش می‌کنند بلکه این نگاشتها همسایگی‌های کوچک از نقاط در مجموعه جولیا را نیز روی کل صفحه پخش می‌کنند (0 تنها نقطهٔ فاقد این خاصیت است). این خاصیت خانواده نگاشتهای $\{Q^n_\epsilon\}$ هنگامی که در بخش بعد درمورد خانواده‌های نرمال صحبت می‌کنیم، بسیار اساسی است.

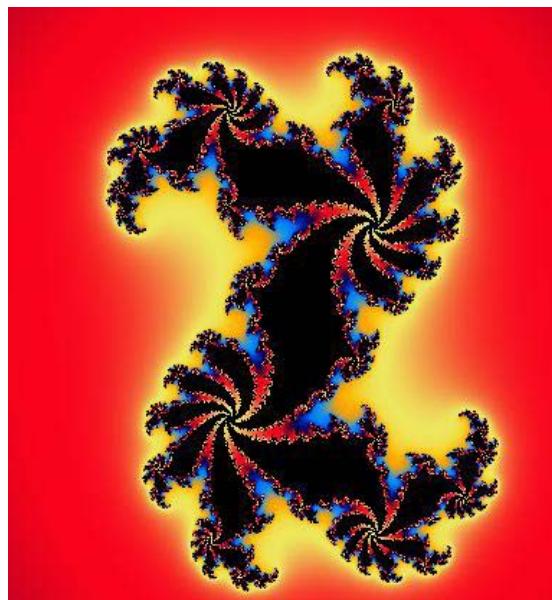
قابل ذکر است که در حالت کلی، $J(P)$ همانند حالت Q_ϵ یک خم هموار نیست. معمولاً $J(P)$ از نظر هندسی بسیار پیچیده‌تر است. مثال بعدی که باز یک دوست قدیمی است، نشان می‌دهد که J ممکن است مجموعه کانتور باشد.

نگاشت $c + Q_c(z) = z^2$ را در نظر بگیرید. اگر c حقیقی بوده و $-2 < c$ ، آنگاه به راحتی دیده می‌شود که Q_c مزدوج توپولوژیکی با نگاشتی به صورت $(z - 1)\lambda z \mapsto z$ برای $\lambda > 4$ است. یادآوری می‌کنیم که حداقل روی \mathbb{R} ، این نگاشتها دارای این خاصیت هستند که تحت تکرار، اغلب نقاط به جز نقاط یک مجموعه کانتور، که نگاشت روی آن مجموعه با نگاشت تغییرجا مزدوج است، به ∞ میل می‌کنند. این مطلب روی صفحه مختلط نیز برقرار است.

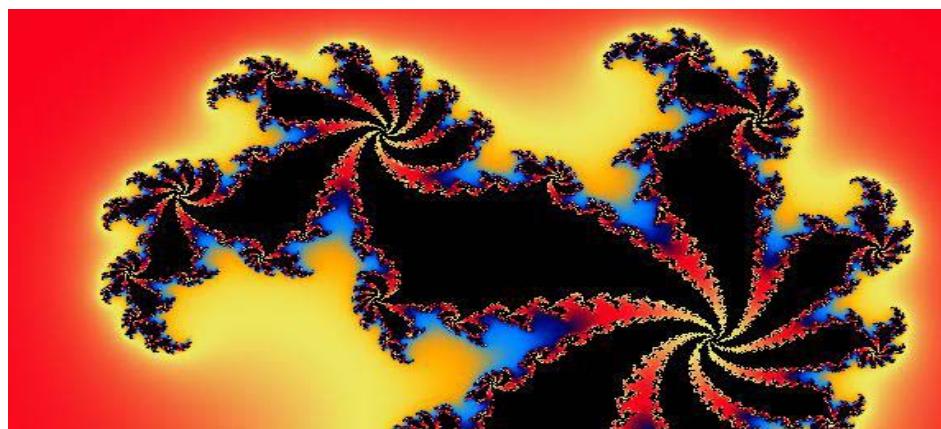
قضیه ۴.۲ فرض کنید $2 > |c|$ و $|z| \geq n$. در این صورت $|Q_c^n(z)| \rightarrow \infty$ هرگاه $n \rightarrow \infty$.

برهان. فرض کنید $2 > |c| = r \geq |z|$. نگاشت Q_c دایره‌ای با شعاع r و مرکز 0 را به دایره‌ای با شعاع r^2 و مرکز c می‌نگارد. از آنجاکه $2r > r^2$ ، نتیجه می‌شود که دایره تصویر، بیرون دایره با شعاع r قرار می‌گیرد. در نتیجه برای هر z که $|z| \geq |c|$ داریم $|Q_c(z)| > \infty$ و

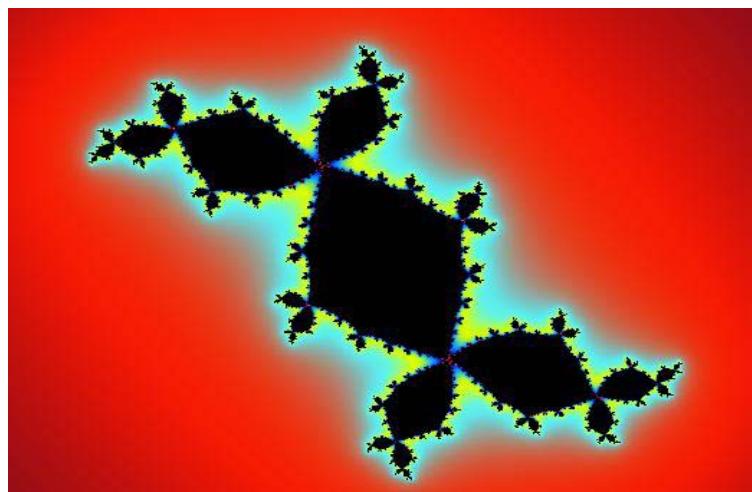
\square



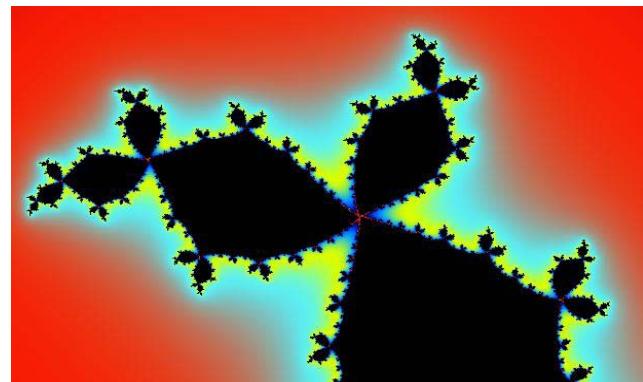
شکل ۱. ازدها؛ مجموعه جولیای $z^2 + 0.360284 + 0.100376i$ بعد از ۳۰۰ تکرار.



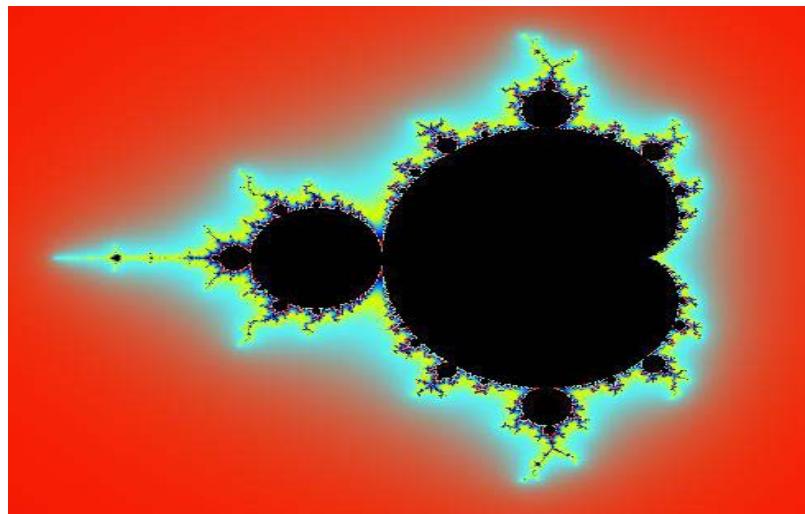
شکل ۲. بزرگنمایی شکل ۱.



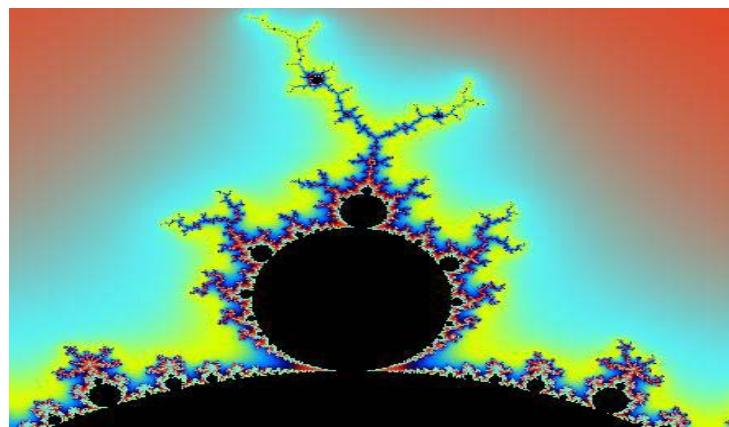
شکل ۳. خرگوش دوادی؛ مجموعه جولیای $z^2 - 0.745i + 0.122$ بعد از ۳۰۰ تکرار.



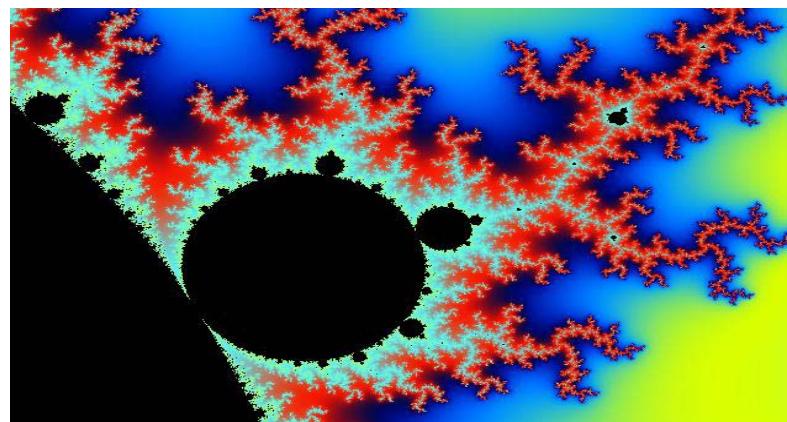
شکل ۴. بزرگنمایی شکل ۳.



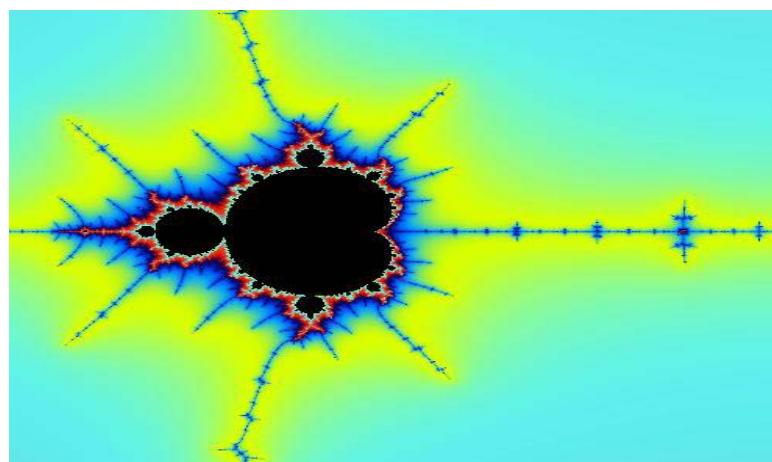
شکل ۵. مجموعه مندلبروت.



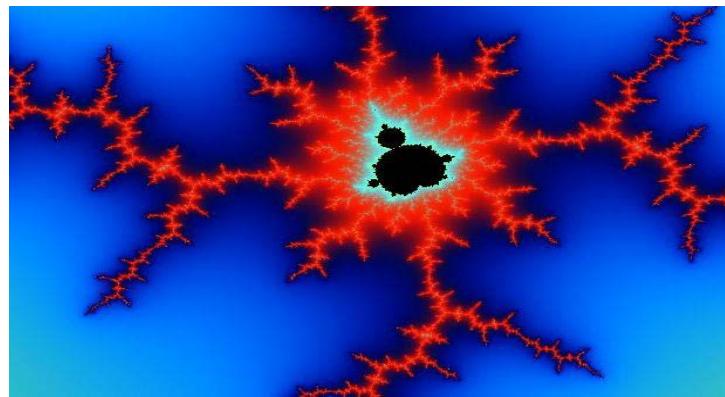
شکل ۶. جزئیات مجموعه مندلبروت؛ آذینهای مجموعه مندلبروت.



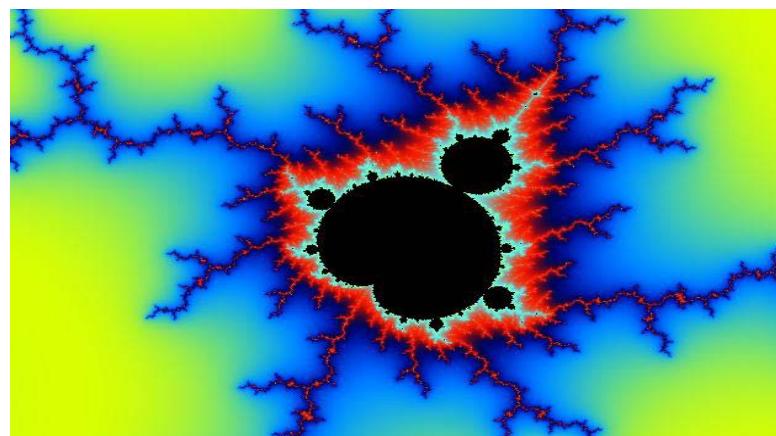
شکل ۷. جزئیات مجموعه مندلبروت؛ آذینهای بیشتری در مجموعه مندلبروت.



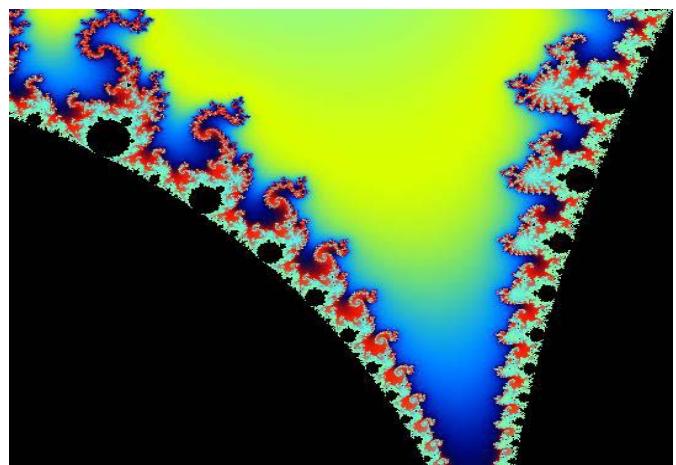
شکل ۸. کپی‌های کوچک مجموعه مندلبروت در \mathcal{M} .



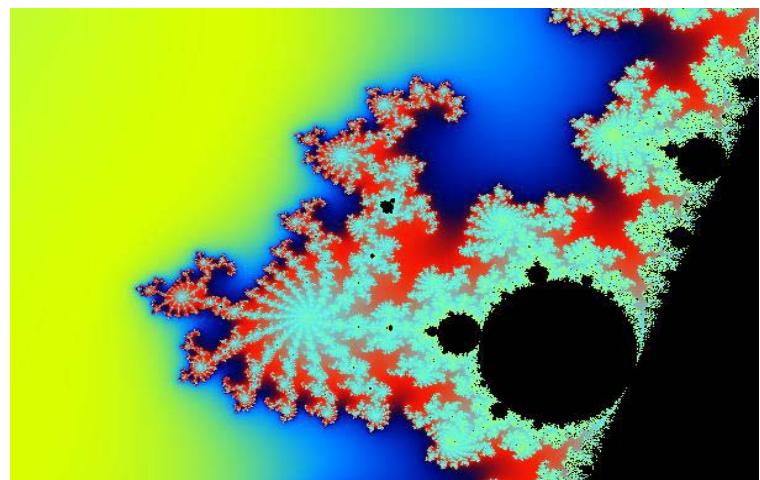
شکل ۹. کپی‌های کوچک مجموعه مندلبروت در \mathcal{M} .



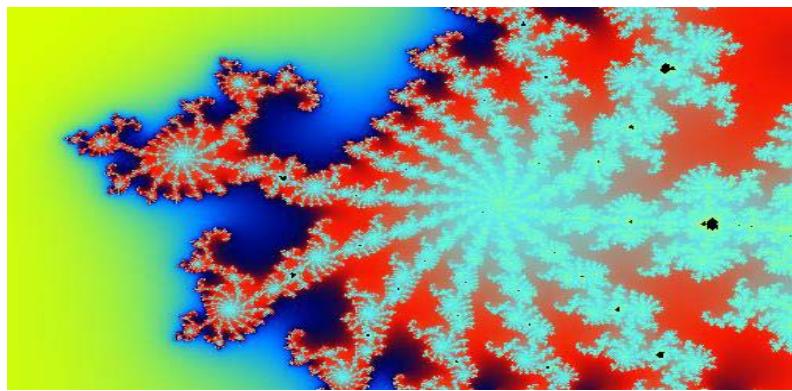
شکل ۱۰. کپی‌های کوچک مجموعه مندلبروت در \mathcal{M} .



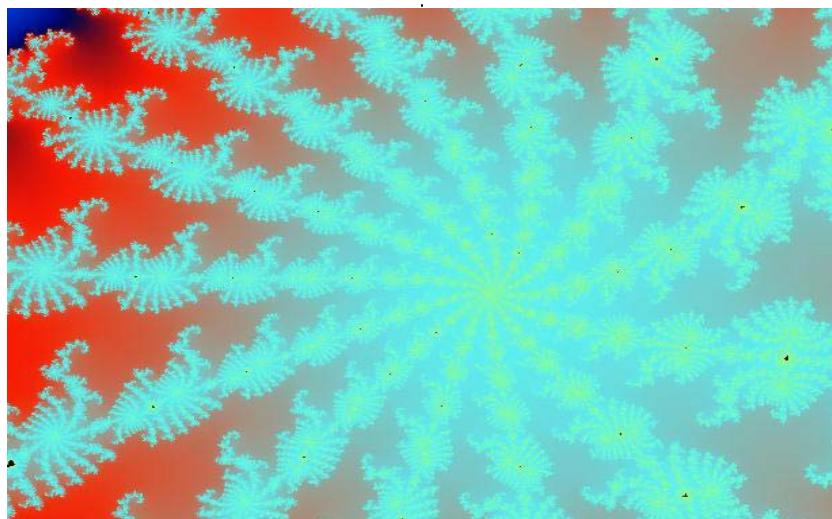
شکل ۱۱. فیلهای.



شکل ۱۲. اسبهای دریایی، بزرگنمایی شکل ۱۱.



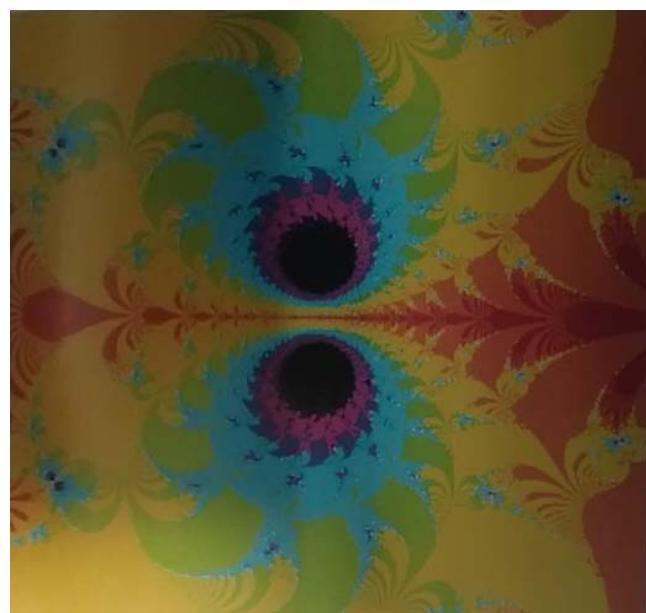
شکل ۱۳. بزرگ‌نمایی شکل ۱۲.



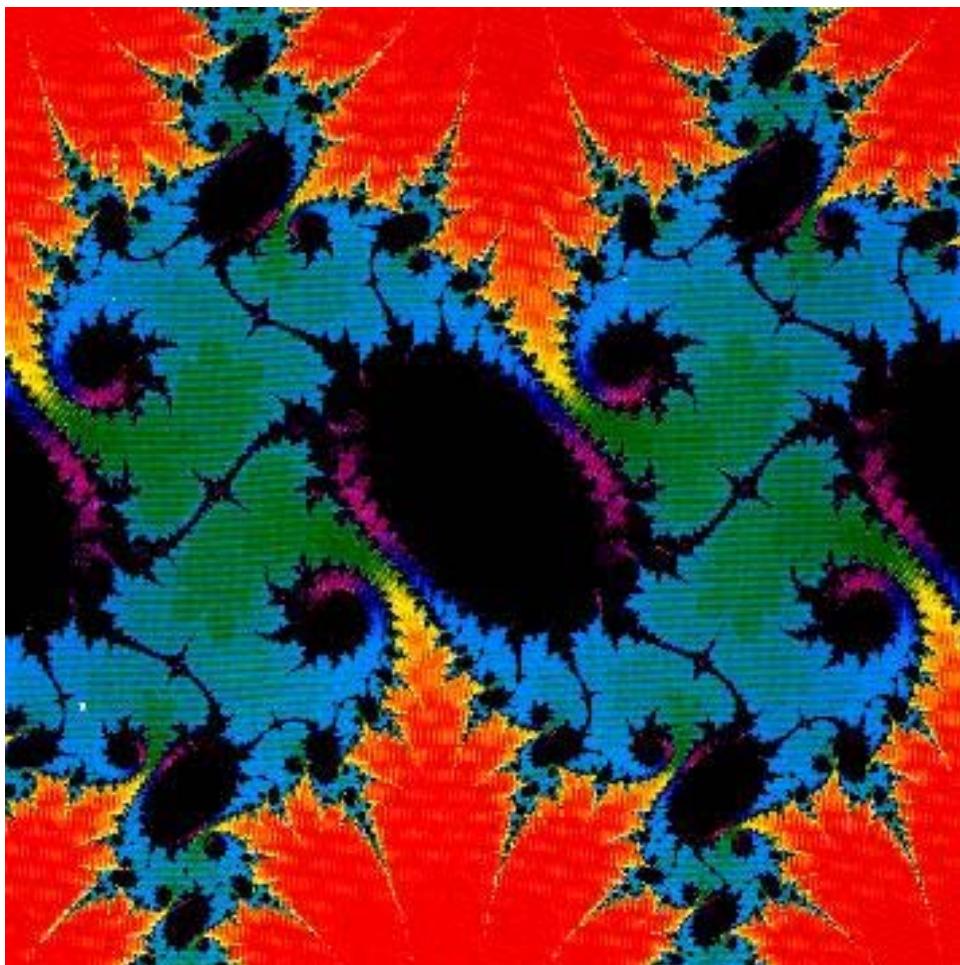
شکل ۱۴. ماربیچها، بزرگ‌نمایی شکل ۱۳.



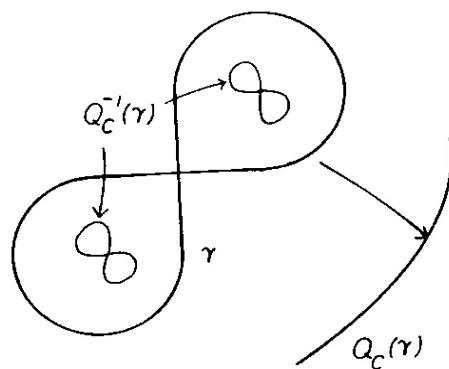
شکل ۱۵. تابع نمایی مبسوط؛ مجموعه جولیایی $0.367e^z$ بعد از ۱۰۰ تکرار.



شکل ۱۶. تابع نمایی مبسوط؛ مجموعه جولیایی $0.369e^z$ بعد از ۵۰۰ تکرار.



شکل ۱۷. مجموعه جولیایی تابع سینوس مختلط؛ مجموعه جولیایی $z \sin(z) + 1$ بعد از ۳۵ تکرار.



شکل ۱.۲

از آنجاکه هیچ نقطه متناوبی برای Q_c در خارج از $|z| = |c|$ موجود نیست، نتیجه می‌شود که کل این ناحیه، درون $S(Q_c)$ قرار می‌گیرد. علاوه بر آن، هر نقطه که نهایتاً به این ناحیه نگاشته شود باید در $S(Q_c)$ نیز قرار گیرد. مجموعه Λ را مجموعه نقاطی قرار می‌دهیم که کل مدارپیشو و آنها درون دایره $|z| = |c|$ قرار می‌گیرد. قضیه بعدی دور از انتظار نیست.

قضیه ۵.۲ اگر $|c|$ به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه Λ یک مجموعه کانتور Q_c -پایاست و روی آن Q_c با یک تغییرجا با دو نماد، مزدوج توپولوژیکی است. همه نقاط در $\Lambda \subset \mathbb{C}$ تحت تکرارهای Q_c به ∞ میل می‌کنند.

برهان. اثبات بسیار شبیه به حالت نگاشتهای درجه دوم حقیقی است با این تفاوت که به جای دنباله تودرتواز بازه‌ها که مجموعه کانتور را تعریف می‌کند، از دنباله‌ای از فرصها استفاده می‌کنیم که بیشتر شبیه به حالت سیم‌لوله است.

فرض کنید γ پیش تصویر دایره $|z| = |c|$ باشد. ادعا می‌کنیم که γ یک خم شبیه عدد هشت انگلیسی همانند شکل ۱.۲ است. برای دیدن این مطلب کافیست ملاحظه کنیم که \circ ، تنها پیش تصویر c است در حالی که همه نقاط دیگر روی $|z| = |c|$ دارای دو پیش تصویر هستند. توجه کنید γ درون قرص $|c| \leq |z| \leq |c| + r$ قرار می‌گیرد. همچنین نقاط بین γ و دایره $|z| = |c|$ به توالی خارج $|z| = |c|$ نگاشته می‌شوند. درنتیجه این نقاط روی مجموعه پایدار قرار می‌گیرند.

اکنون $|c| < r$ را طوری انتخاب کنید که γ در درون قرص D با معادله $r \leq |z| \leq |c| + r$ قرار گیرد. پیش تصویر قرص D از دو مجموعه همبند ساده که هر کدام یکی از برگ‌های γ هستند تشکیل می‌شود. هریک از این "فرصها" به صورت دیفیومorfیک به روی $r \leq |z| \leq |c| + r$ نگاشته می‌شوند. بهوضوح،

همانند مثالهای قبلی می‌توان به راحتی بررسی کرد که $\Lambda = \cap_{n=1}^{\infty} Q_c^{-n}(D)$ از 2^n قرص تشکیل شده است و $Q_c^{-n}(D) \subset Q_c^{-n+1}(D)$. شکل ۲.۲ را ببینید. اشتراک دنباله تودرتوی این فرصلها، یک نقطه یکتاست. برای اثبات این مطلب، نیاز به یک فرض اضافه در این نقطه است (همانند شرط مشتق که در بخش ۵.۱ از آن استفاده کردیم).

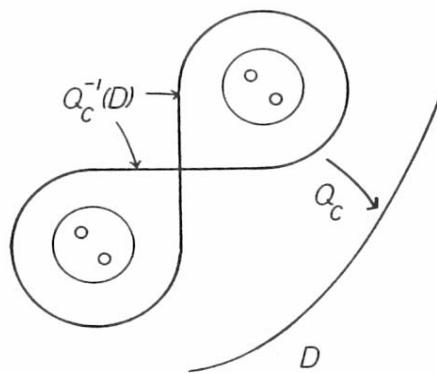
فرض کنید B نشان‌دهنده یک قرص با شعاع $\frac{1}{c}$ و مرکز مبداء مختصات باشد. مجموعه $Q_c(B)$ یک قرص با شعاع $\frac{1}{c}$ و مرکز c است. فرض می‌کنیم $Q_c(B) \cap \gamma = \emptyset$. توجه کنید که اگر $1 < |Q'_c(z)|$ ، آنگاه $B \in z$. بنابراین فرض ما باعث می‌شود که هر نقطه با مشتق کمتر از یک به بیرون γ نگاشته شود. بنابراین برای هر $\Lambda \in z$ ، $|Q'_c(z)| > 1$ و نتیجه می‌شود که Λ یک مجموعه کانتور است. \square

ملاحظات.

۱. به وضوح، نقاط دافع متناوب در Λ چگال بوده و بنابراین Λ دقیقاً مجموعه جولیای c است.
۲. اگر $\Lambda \in z$ ، آنگاه هر همسایگی کوچک N از z باید شامل یک قرص باشد که یک پیش تصویر از D است. بنابراین درنهایت Q_c ، مجموعه N را تحت تکرار منسق می‌کند به طوری که هر نقطه در C دریکی از $(Q_c^n(N))$ قرار گیرد.
۳. توجه کنید که شرط ما روی c که کانتور بودن مجموعه $J(Q_c)$ را تضمین می‌کند تا حدودی قابل ساده‌تر کردن است. می‌توان نشان داد که اگر $\infty \rightarrow (c, Q_c^n(c))$ ، آنگاه $J(Q_c)$ همانند فوق یک مجموعه کانتور است. درمورد این خاصیت در بخش ۸.۳ صحبت خواهیم کرد. تمرین ۱ را ببینید.

تمرین.

۱. نشان دهید که اگر $|c| > |z|$ و $2 > |z|/|Q_c(z)|$. نتیجه بگیرید که برای چنین z و c ای، $Q_c^n(z) \rightarrow \infty$.
۲. نشان دهید اگر $2 > |c|$ ، آنگاه $\infty \rightarrow (c, Q_c^n(z))$.



شکل ۲.۲.

۳ خانواده‌های نرمال و نقاط استثنایی

در این بخش، خواص متعدد ویژه‌ای را که خانواده نگاشتهای تحلیلی مختلط دارا هستند در نظر می‌گیریم. این خواص هستند که به دینامیک این نگاشتها ساختار غنی‌تری نسبت به نگاشتهایی که قبلًا با آنها مواجه بودیم القاء می‌کنند. فرض کنید $\{F_n\}$ خانواده توابع تحلیلی مختلط تعریف شده روی یک مجموعه باز U باشند. اغلب اوقات، برای اهدافمان، F_n نماینده n امین تکرار از نگاشت داده شده F است ولی در این لحظه، رهیافت عمومی‌تری را برمی‌گزینیم.

تعریف ۱.۳ یک خانواده $\{F_n\}$ یک خانواده نرمال روی U است هرگاه هر دنباله از F_n ‌ها دارای یک زیردنباله باشد که یا

۱. همگرای یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده از U است و یا

۲. روی U همگرای یکنواخت به ∞ است.

مثال ۲.۳ برای $1 < |a|$ فرض کنید $F(z) = az$ و همچنین $F_n(z) = F^n(z)$ تکرار n می‌باشد. در این صورت $\{F_n\}$ یک خانواده نرمال از توابع روی هر دامنه در C تشکیل می‌دهد چون F_n روی زیرمجموعه‌های فشرده، همگرای یکنواخت به نگاشت ثابت \circ است.

مثال ۳.۳ اگر برای $|a| > 1$ ، $F(z) = az$ ، آنگاه خانواده فوق، روی هر دامنه‌ای که شامل \mathbb{C} نباشد نرمال است ولی اگر دامنه شامل \mathbb{C} باشد نرمال نمی‌شود. درواقع، در هر همسایگی از z_0 ، یک نقطه چون z موجود است که برای n ‌ای، $|F^n(z)|$ به دلخواه بزرگ باشد. بدینهای باید توجه کرد که برای هر چنین همسایگی U داریم

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U) = \mathbb{C}.$$

مثالهای قبلی نشان می‌دهند که مجموعه‌های جولیای نگاشتهایی به فرم $F(z) = az$ یا به طور کلی تر، $F(z) = az + b$ بسیار ساده هستند. بنابراین پس از این، چنین نگاشتهایی را در نظر نمی‌گیریم. این یعنی اینکه از این پس با چند جمله‌ای‌هایی با درجه بزرگ‌تر از یا مساوی با ۲ کار می‌کنیم.

تعریف ۴.۳ خانواده $\{F_n\}$ در \mathbb{C} نرمال نیست هرگاه در هیچ‌یک از همسایگی‌های \mathbb{C} نرمال نباشد.

قضیه بعدی یکی از مهم‌ترین خواص دنباله‌های توابع تحلیلی را به دست می‌دهد.

قضیه ۵.۳ فرض کنید F_n یک دنباله از توابع تحلیلی بوده که روی یک دامنه U همگرای یکنواخت به یک نگاشت همانند F باشد. در این صورت F در U تحلیلی است و به علاوه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n^{(k)}(z) = F^{(k)}(z).$$

برای برهان، به کتاب کانوی مراجعه کنید. این قضیه یک محک مفید برای اینکه یک خانواده از توابع تحلیلی در یک نقطه نرمال نباشد ارائه می‌دهد.

قضیه ۶.۳ فرض کنید F تحلیلی بوده و یک نقطه متناوب دافع برای F باشد. در این صورت، خانواده تکرارهای F در \mathbb{C} نرمال نیست.

برهان. اثبات این قضیه را برای نقاط ثابت بیان می‌کنیم. برهان برای نقاط متناوب فقط کمی پیچیده‌تر است. تمرین ۱.۳ را ببینید. فرض کنید $\{F^n\}$ روی یک همسایگی U از \mathbb{C} نرمال است. از آنجاکه برای هر n ، $F^n(z_0) = z_0$ ، نتیجه می‌شود که $F^n(z)$ روی U به ∞ میل نمی‌کند. بنابراین دنباله‌ای در $\{F^n\}$ دارای زیردنباله $\{F^{n_i}\}$ است که روی U همگرای یکنواخت به G باشد. بنابراین $D(F^{n_i})' = (F^{n_i})'(z_0) \rightarrow |G'(z_0)|$. ولی $|G'(z_0)| \rightarrow \infty$. این تناقض، حکم را به دست می‌دهد. \square

نتیجه ۷.۳ فرض کنید F تحلیلی باشد. خانواده تکرارهای $\{F^n\}$ در هیچ‌یک از نقاط $J(F)$ یک خانواده نرمال نیست.

یکی از مهم‌ترین نتایج اینکه یک خانواده در یک نقطه داده شده نرمال نباشد، این است که خانواده نگاشتها باید تقریباً همه مقادیر خود را در هر همسایگی از یک نقطه بگیرد. این نتیجه، صورت دیگری از قضیه‌ای به نام ماتل ۱° است.

قضیه ۸.۳ فرض کنید $\{F_n\}$ یک خانواده از نگاشتهای تحلیلی باشد که روی یک همسایگی U تعریف شده‌اند. فرض کنید $a, b \in \mathbb{C}$ که $a \neq b$ موجود باشند به قسمی که برای هر n و هر $z \in U$ مخالف a یا b باشد. در این صورت $\{F_n\}$ یک خانواده نرمال در U است. برای منظور ما، نتیجه زیر حائز اهمیت است.

نتیجه ۹.۳ فرض کنید F یک نگاشت تحلیلی باشد. فرض کنید $(z \in J(F) \text{ و } U \text{ یک همسایگی از } z)$ باشد. در این صورت

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U)$$

فاقد حداقل یک نقطه از \mathbb{C} است.

برهان. اگر $F^n(U)$ دو نقطه باشد، آنگاه $\{F^n\}$ یک خانواده نرمال در U است. \square
بنابراین بدترین حالت رفتار خانواده تکرارهای F در یک همسایگی از یک نقطه در مجموعه جولیا این است که یک نقطه از \mathbb{C} را نداشته باشد. این حالت همان‌گونه که مثال $F(z) = z^2$ نشان می‌دهد اتفاق می‌افتد. مجموعه جولیای این نگاشت، دایره واحد است و اگر U یک مجموعه باز باشد که S^1 را قطع کرده و لی شامل \circ نباشد، آنگاه

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F^n(U) = \mathbb{C} - \{\circ\}.$$

تمرین ۱۰.۲ را بینید. این نقاط، نقاط استثنایی نامیده می‌شوند و همان‌گونه که اسم آنها القاء می‌کند، به ندرت اتفاق می‌افتد. در واقع، می‌توانیم همه چند جمله‌ای‌های ممکن را که دارای نقاط استثنایی هستند فهرست کنیم.

قضیه ۱۰.۳ فرض کنید P یک چندجمله‌ای باشد. فرض کنید یک نقطه $(z \in J(P) \text{ و یک همسایگی } U \text{ از } z)$ موجود باشد به طوری که

$$\bigcup_{n=\circ}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} - \{a\}.$$

در این صورت برای بعضی $\lambda \in \mathbb{C}$ و عدد صحیحی چون k ، $P(z) = a + \lambda(z - a)^k$

برهان. فرض کنید $P(b) = a$. از آنجاکه هیچ نقطه‌ای چون $z \in U$ نیست که ابتدا به b و سپس به a نگاشته شود، بنابراین b یک نقطه استثنایی برای P است. نتیجه ۹.۳ نشان می‌دهد که $a = b$ بنابراین a یک نقطه ثابت برای P بوده و در واقع، a تنها پیش‌تصویر آن است.

در نتیجه برای k ای،

$$\frac{P(z) - a}{(z - a)^k} = G(z)$$

که G یک چندجمله‌ای بوده و برای هر $z \neq 0$ ، $G(z) \neq 0$. در غیر این صورت a باید پیش‌تصویر دیگری نیز داشته باشد. در نتیجه طبق قضیه اساسی جبر، $G(z)$ باید ثابت باشد. \square
در واقع، این نگاشتها با دارا بودن یک نقطه استثنایی در a ، مزدوج توپولوژیکی با نگاشت ساده $z \mapsto z^k$ هستند.

قضیه ۱۱.۳ فرض کنید P یک چندجمله‌ای با درجه $n \geq 2$ باشد که دارای یک نقطه استثنایی در a است. در این صورت P با $z^n \mapsto z$ مزدوج توپولوژیکی است.

برهان. قرار دهید $Q(z) = z^n$. قضیه ۱۰.۳ نشان می‌دهد که برای $0 \neq \lambda$ ای،

$$P(z) = a + \lambda(z - a)^n.$$

یک ریشه $(1 - n)\lambda$ مانند μ را انتخاب کرده و تعریف کنید $H(z) = \mu(z - a)$. در این صورت یک محاسبه سرراست نشان می‌دهد که $H \circ P = Q \circ H$. \square
نتیجه می‌شود مجموعه جولیای یک چندجمله‌ای با یک مقدار استثنایی، یک دایره است. این حالت نسبتاً خاصی است. از آنجاکه می‌توانیم فرض کنیم که دینامیک چنین نگاشتهایی کاملاً شناخته شده است، می‌توانیم این نگاشتها را کنار گذاشته و فقط چندجمله‌ای‌هایی را در نظر بگیریم که فاقد نقاط استثنایی هستند.

تمرین.

۱. نشان دهید خانواده $\{F_n\}$ در هیچ‌یک از نقاط متناوب دافع F ، نرمال نیست.

۴ نقاط متناوب

به طور اساسی ممکن است سه نوع نقطه متناوب برای یک نگاشت تحلیلی مختلط رخ دهد؛ جاذب، دافع یا خنثی. همانند فصلهای قبل، یک نقطه ثابت \circ نگاشت P ، جاذب (دافع، خنثی) است هرگاه $1 < |P'(z_0)| = |P'(z_0)| < 1$. نقاط متناوب خنثی در حالت یک بعدی همانند نگاشت دوران $z \mapsto e^{i\theta} z$ ممکن است کاملاً متناوب باشند. بنابراین در این بخش، تمرکز اصلی ما روی نقاط متناوب جاذب و دافع است و حالت سخت نقاط خنثی را به بعد موکول می‌کنیم.

بین دو نوع مختلف نقاط ثابت جاذب تمایز قائل می‌شویم: حالت فوق جاذب که در آن $|F'(z_0)| = 1$ و حالت جاذب که برای آن $|F'(z_0)| < 1$. این دو حالت از نظر تحلیلی کاملاً متفاوت هستند در حالی که دینامیک یکسانی دارند. در حال حاضر روی حالت جاذب تمرکز می‌کنیم.

ابتدا دینامیک موضعی نزدیک به چنین نقطه ثابتی را توصیف می‌کنیم. همان‌گونه که در نگاشتهای یک بعدی دیدیم، با استفاده از بحث دامنه اساسی، می‌توانیم یک تزویج تپیلوزیکی موضعی بین خود نگاشت و نگاشت خطی که با مشتق آن در نقطه ثابت تعیین می‌شود ایجاد کنیم. برای نگاشتهای مختلط می‌توانیم این کار را بهتر انجام دهیم؛ در واقع می‌توانیم نگاشت تزویج را طوری برگزینیم که تحلیلی مختلط باشد. درنتیجه می‌توان گفت که یک نگاشت تحلیلی مختلط نزدیک یک نقطه ثابت جاذب، قابل خطی شدن است. این قضیه دارای یک تاریخچه طولانی است که به کوئیگ^{۱۱} در قرن نوزدهم باز می‌گردد. برهانی که در اینجا ارائه می‌دهیم منسوب به زیگل^{۱۲} و موژراست. همه جریات تکنیکی را بیان می‌کنیم چون به خوبی نشان می‌دهد که چه مشکلی در حالت نقطه متناوب خنثی وجود دارد. توجه کنید که فرض چندجمله‌ای بودن نگاشت برای مسائل موضعی همانند اینجا، نفع خاصی برای ما ندارد و بنابراین با نگاشتهای تحلیلی عمومی‌تر کار می‌کنیم.

قضیه ۱.۴ فرض کنید $P(z)$ یکتابع تحلیلی با $P(\circ) = \lambda$ که $|\lambda| < 1$ باشد. در این صورت یک همسایگی U از \circ و یک نگاشت تحلیلی $H : U \rightarrow \mathbb{C}$ موجود است به طوری که

$$P \circ H(z) = H \circ L(z)$$

$$\text{و } L(z) = \lambda z$$

ملاحظه. معادله تابعی $P \circ H = H \circ L$ معادله تابعی شروع در^{۱۳} نامیده می‌شود.

Koenigs^{۱۱}

Siegel^{۱۲}

Schröder^{۱۳}

برهان. می‌توانیم P را به صورت سری توانی

$$P(z) = \lambda z + \sum_{\ell=2}^{\infty} a_{\ell} z^{\ell}$$

بنویسیم که این سری روی یک همسایگی از \circ همگراست. بنابراین باید نگاشت تحلیلی چون (z) $H(z)$ بیابیم که معادله تابعی $P \circ H = H \circ L = \circ$ حل کند. چنین تابع تحلیلی باید به صورت یک سری توانی قابل نمایش باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$H(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_{\ell} z^{\ell}.$$

ابتدا مقادیر ضرایب c_{ℓ} را در سری توانی مشخص می‌کنیم. این یک حل صوری از معادله تابعی است. سپس باید نشان دهیم که سری تعریف شده، در واقع در یک همسایگی از \circ همگراست. تعیین حل صوری، قسمت ساده کار است. از آنجاکه هر دوی P و L ، \circ را ثابت نگه می‌دارند، بنابراین H نیز چنین است. این بدان معنی است که $= \circ$. سپس با مقایسه جملات درجه اول $P(H(z))$ و $H(\lambda z)$ در می‌یابیم که c_1 به دلخواه انتخاب می‌شود (ولی ناصفر است). بنابراین قرار می‌دهیم $c_1 = 1$ و درنتیجه

$$H(z) = z + \sum_{\ell=2}^{\infty} c_{\ell} z^{\ell}.$$

حال سایر c_{ℓ} ‌ها را به صورت بازگشتی به دست می‌آوریم. معادله تابعی را می‌توانیم به صورت

$$\lambda H(z) + \sum_{\ell=2}^{\infty} a_{\ell} (H(z))^{\ell} = \lambda z + \sum_{\ell=2}^{\infty} c_{\ell} \lambda^{\ell} z^{\ell}$$

بنویسیم. بنابراین

$$\sum_{\ell=2}^{\infty} (\lambda^{\ell} - \lambda) c_{\ell} z^{\ell} = \sum_{\ell=2}^{\infty} a_{\ell} (H(z))^{\ell}. \quad (*)$$

فرض کنید c_2, \dots, c_{k-1} معلوم هستند. درین صورت جمله درجه k سمت راست معادله فقط شامل c_2, \dots, c_{k-1} است چون مجموع، با جمله درجه دو شروع می‌شود. به ویژه، ضریب z^k در سمت راست یک چندجمله‌ای بر حسب a_2, \dots, a_k و همچنین c_2, \dots, c_{k-1} بوده که دارای ضرایب مثبت است. این جمله را با $K_k(a_2, \dots, a_k, c_2, \dots, c_{k-1})$ نمایش داده و تأکید می‌کنیم که تا هنگامی که c_2, \dots, c_{k-1} معلوم باشند، K_k نیز مشخص است. سپس با مقایسه ضرایب داریم

$$c_k = \frac{K_k(a_2, \dots, a_k, c_2, \dots, c_{k-1})}{\lambda^k - \lambda}. \quad (**)$$

درنتیجه مشروط بر اینکه $c_k \neq \lambda^k$ ، توسط ضرایب قبلی تعیین می‌شود و ما حل صوری را به دست می‌آوریم.

پیش از اینکه نشان دهیم این حل همگراست، مشاهده می‌کنیم که عبارتی که c_k را تعیین می‌کند، نشان می‌دهد که چرا این روند هنگامی که $\lambda = 0$ یا $\lambda = 1$ ریشه $(k-1)$ ام واحد باشد متوقف می‌شود. در هریک از این دو حالت، عبارت برای c_k ، تعریف نشده است.

برای اثبات اینکه سری توانی

$$H(z) = \sum_{\ell=2}^{\infty} c_{\ell} z^{\ell}$$

همگراست، به چند لم نیاز داریم.

لم ۲.۴ فرض کنید $P(z) = z + \sum_{\ell=2}^{\infty} a_{\ell} z^{\ell}$. در این صورت $P(z)$ مزدوج خطی بانگاشت است که برای هر $\ell, |a_{\ell}| < 1$.

برهان. از آنجاکه سری $\sum_{\ell=2}^{\infty} a_{\ell} z^{\ell}$ روی یک همسایگی از 0 همگراست، $0 > A$ موجود است که برای آن برای هر $\ell, |a_{\ell+1}| < A^{\ell}, \ell \geq 1$. قرار دهید

$$R(z) = z + \sum_{\ell=2}^{\infty} b_{\ell} z^{\ell}$$

که $b_{\ell} = \frac{a_{\ell}}{A^{\ell-1}}$. بهوضوح، برای هر $\ell, |b_{\ell}| < 1$. در این صورت به راحتی دیده می‌شود که $h(z) = R \circ h(z)$. \square

لم ۳.۴ فرض کنید $1 < |\lambda| < c$. در این صورت $0 > c$ موجود است به طوری که برای هر $1 > k$ ،

برهان. از آنجاکه $1 < |\lambda| < c$ ، نتیجه می‌شود که برای هر $2 \leq k \leq \lfloor \lambda^k \rfloor < |\lambda|$. بنابراین $|\lambda^k - \lambda| \geq |\lambda| - |\lambda|^2 > 0$. \square

اکنون دیده می‌شود که سری توانی بر حسب w که به صورت

$$z = w - \frac{1}{c} \sum_{\ell=2}^{\infty} w^{\ell}$$

داده می‌شود برای هر $w \in \mathbb{R}$ و $1 < |w|$ همگراست. در واقع، برای $1 < |w|$

$$z = z(w) = w - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{1-w} - 1 - w \right).$$

اکنون $w = z^0 + a_1 z^1 + \dots$ درنتیجه نگاشت تحلیلی $w(z)$ دارای یک وارون است که در یک همسایگی از $z = 0$ تعریف شده و تحلیلی است. از آنجاکه $w = w(z)$, بنابراین می‌توانیم نگاشت وارون را به صورت

$$w = w(z) = z + \sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} z^{\ell}$$

بنویسیم و می‌دانیم که سری

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} a_{\ell} z^{\ell}$$

همگراست. نشان خواهیم داد که مشروط بر اینکه c به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، این سری بر سری توانی صوری که H را مشخص می‌کند غالب است.

лем ۴.۴ مقدار c را همانند لم ۳.۴ انتخاب کنید. در این صورت برای هر $k \geq 1$,

$$|c_k| \leq \alpha_k.$$

برهان. مشاهده کنید که سری توانی برای $w(z) = w = w(z)$ یک حل از معادله تابعی

$$cw(z) - cz = \sum_{\ell=1}^{\infty} (w(z))^{\ell}$$

است. این معادله را همانند معادله تابعی شرودر به دقت حل می‌کنیم. معادله بر حسب α_k به صورت

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \alpha_k z^k = \sum_{\ell=1}^{\infty} (w(z))^{\ell}$$

است. اکنون این معادله را با معادله (*) مقایسه کنید. این معادله دقیقاً به همان فرم فرض شده است به جز اینکه λ^{ℓ} با c , a_{ℓ} با 1 جایگزین شده است. درنتیجه، جواب دقیقاً با روش فوق تعیین شده و

$$\alpha_k = \frac{K_k(1, \dots, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1})}{c}$$

که در $(**)$ داده شده است. اکنون K_k دارای ضرایب صحیح مثبت است و با استقراء برای هر $\alpha_k > 0$. همچنین از آنجاکه $1 < |\alpha_k|$, نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} |c_k| &\leq \frac{|K_k(\alpha_1, \dots, \alpha_k, c_1, \dots, c_{k-1})|}{c} \\ &\leq \frac{1}{c} K_k(1, \dots, 1, |c_1|, \dots, |c_{k-1}|) \\ &\leq \frac{1}{c} K_k(1, \dots, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}) \\ &= \alpha_k. \end{aligned}$$

□

ملاحظات.

۱. تأکید می‌کنیم که این نتایج برای نگاشتهای تحلیلی که به صورت موضعی حول یک نقطه ثابت جاذب تعریف شده‌اند به دست آمده است و نه فقط برای چندجمله‌ای‌ها. در واقع، برهان برای چندجمله‌ای‌ها ساده‌تر نیست چون نگاشت تزویج H , معمولاً یک چندجمله‌ای نمی‌شود.

۲. برهان مشابهی برای حالت $1 > |\lambda|$ با درنظر گرفتن نگاشت وارون برقرار است. درنتیجه، نقاط متناوب دافع را نیز می‌توان خطی کرد.

۳. ممکن است کسی فکر کند که معادله تابعی شرودر برای $1 = |\lambda|$ که برای هیچ عدد صحیحی q ، λ^q مساوی با ۱ نشود دارای یک جواب همگراست. پس از آن نتیجه می‌شود که جمله λ^k برای هر k ناصفر بوده و بنابراین می‌توان همه c_k ‌ها را تعیین کرد. اگرچه از آنجاکه $|\lambda|^k$ ممکن است به اندازه دلخواه کوچک باشد (که باعث می‌شود $|c_k|$ بزرگ شود $(**)$ را ببینید)، سؤال همگرای این سری بسیار طریف است. این مسئله معروف مقسوم‌علیه‌های کوچک است که در آینده به آن باز می‌گردیم.

۴. نتیجه مشابهی برای حالت سویر جاذبهای نیز برقرار است. بنابراین P به صورت موضعی به صورت تحلیلی مزدوج با یک نگاشت به فرم $z^k \mapsto z$ است. توان k با اولین مشتق ناصفر P در 0 تعیین می‌شود. جزئیات را بیان نمی‌کنیم.

اکنون توجه‌مان را به حالت کلی تر رفتاریک نگاشت تحلیلی حول یک نقطه متناوب جاذب معطوف می‌کنیم. فرض کنید \mathbb{C} چنین نقطه‌ای با متناوب n باشد. با توجه به نتایج قبلی، یک همسایگی U از \mathbb{C} موجود است که در آن برای هر U , $z \in U$, $z \mapsto F^{jn}(z)$. درنتیجه، مدار هر نقطه در U به یک مدار متناوب همگرا می‌شود. مجموعه همه نقاطی را که به یک مدار متناوب جاذب میل می‌کند، پهنه

جذب می‌نامیم. به‌وضوح پهنه جذب، یک مجموعه باز است. مکمل این مجموعه که در بردارنده نقطه ∞ (و بنابراین همسایگی U) است پهنه جذب بالاصل نامیده می‌شود. برخلاف نگاشت $z^2 = Q(z)$ که برای آن پهنه جذب بالاصل در واقع کل پهنه جذب است، در اغلب اوقات پهنه جذب از بی‌نهایت مؤلفه مجزا تشکیل می‌شود که همه آنها درنهایت به‌توی یکی از پهنه‌های جذب بالاصل نگاشته می‌شوند.

ملاحظات.

۱. فرض کنید C مؤلفه‌ای از پهنه جذب یکی از مدارهای متناوب جاذب برای F باشد. در این صورت خانواده تکرارهای F در C نرمال است (تمرین ۱۰.۴ را ببینید). بنابراین $C \cap J(F) = \emptyset$.

۲. اگر ∞ یک مدار جاذب متناهی باشد (یعنی $\infty \neq z$)، آنگاه هر مؤلفه از پهنه جذب آن همبند ساده است. این حقیقت، نتیجه ساده‌ای از اصل ماکسیمال است (تمرین ۲۰.۴ را ببینید).

۳. برای یک چندجمله‌ای، ∞ به عنوان یک "نقطه ثابت" جاذب درنظر گرفته می‌شود. اگرچه پهنه جذب ∞ لزوماً همبند ساده نیست. قضیه ۵.۲ را ببینید.

یکی از خواص برجسته نگاشتهای یک بعدی با مشتق شوارتسی منفی، این نکته بود که هر مدار متناوب جاذب، حداقل به یک مدار بحرانی جذب می‌شد و این مطلب، مطالعه این نگاشتها را بهشت ساده می‌کرد چون کرانی برای تعداد مدارهای جاذب ایجاد می‌کرد. نتیجه مشابهی برای نگاشتهای تحلیلی برقرار است ولی برهان آن کاملاً متفاوت است. قبل از اثبات آن، رده همسان ریختی‌های تحلیلی روی قرص واحد باز D را معرفی می‌کنیم.

قضیه ۵.۴ قرار دهید ۱ < $|a|$. تعريف کنید

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

در این صورت T_a برای $|a|^{-1} < |z|$ تحلیلی است. علاوه بر آن، برای $|z| < 1$ و $T_a^{-1} = T_{-a}$ برای $1 < |z|$ تحلیلی است. علاوه بر آن، $T_a : D \rightarrow D$

برهان. اثبات یک محاسبه سرراست بوده و آن را به عنوان یک تمرین واگذار می‌کنیم. \square

قضیه ۶.۴ فرض کنید P یک چندجمله‌ای باشد به طوری که ∞ یک نقطه متناوب جاذب برای P است. در این صورت یک مقدار بحرانی موجود است که درون پهنه جذب ∞ قرار می‌گیرد.

برهان. دوباره برای سادگی، قضیه را فقط برای حالت یک نقطه ثابت جاذب مانند \circ بررسی می‌کنیم. با توجه به نتایج قبلی، یک همسایگی U از \circ و یک همسان ریختی تحلیلی $H : U \rightarrow D$ موجود است که P را خطی می‌کند. فرض کنید V یک مجموعه باز شامل U بوده به طوری که $V \rightarrow U$ پوشایش دارد. ادعا می‌کیم که P یا دارای یک نقطه بحرانی در V است و یا اینکه دارای یک وارون تحلیلی $V \rightarrow U$ است.

برای نشان دادن این مطلب، فرض می‌کنیم که P روی U وارون تحلیلی ندارد. از آنجاکه P تحلیلی بوده و روی V پوشاست، نتیجه می‌شود که P نباید یک به یک باشد. درنتیجه، $z_1, z_2 \in V$ موجود است به طوری که $q = P(z_1) = P(z_2)$. فرض کنید $a = H(q) = T_a : D \rightarrow D$ همانند قضیه قبل باشد.

دوایر C_r با شعاع $r < 1$ و مرکز \circ در D را در نظر بگیرید. نگاشت T_a^{-1} این خانواده ازدوایر را به یک دنباله تودرتواز خمهای بسته ساده حول a بر می‌گرداند. از آنجاکه $V \rightarrow U$ تحلیلی بوده و برای هر i , $P'(z_i) \neq 0$, نتیجه می‌شود که برای r کوچک، $(H^{-1} \circ T_a^{-1}(C_r))$ یک جفت از خانواده دوایر تودرتواست که یک خانواده حول z_1 و دیگری حول z_2 قرار دارند. بنابراین P^{-1} تصویر وارون را نشان می‌دهد و نه نگاشت وارون را. حال با افزایش r ، کوچکترین $*_{r_*}$ موجود است که برای آن، این دو خانواده برای اولین بار همیگر را قطع می‌کنند. فرض کنید p نقطه مشترک دو خانواده ساده به صورت $(H^{-1} \circ T_a^{-1}(C_{r_*}))$ باشد. دراین صورت به راحتی دیده می‌شود که p یک نقطه بحرانی برای P است.

درنتیجه، می‌توانیم تعريف \circ را روی پهنه‌های جذب بزرگ‌تری از \circ ادامه دهیم تا اینکه یا به یک نقطه بحرانی برخورد کنیم و یا اینکه از پهنه جذب بالاصل با ساختن $U \rightarrow \mathbb{C}$ برای همه k های مثبت خارج شویم. توجه کنید که برای هر k , $P^{-k}(U)$ نمی‌تواند کل \mathbb{C} را پوشاند؛ در واقع $P^{-k}(U)$ پهنه جذب ∞ را که شامل $\{z \mid |z| > R\}$ برای R به اندازه کافی بزرگ است، دارا نیست (تمرین ۴.۴ را ببینید). خانواده نگاشتهای P^{-k} روی U به دلیل نقطه ثابت دافع بودن \circ برای هر کدام از آنها نرمال نیست. بنابراین طبق قضیه مانتل $(U) \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}$ باید \mathbb{C} به جزء حداکثر یک نقطه را پوشاند. این تناقض، حکم را به دست می‌دهد. \square

ملاحظات.

- در این بحث، تنها جایی که از چندجمله‌ای بودن استفاده کردیم برای این بود که نشان دهیم پهنه جذب \circ فاقد حداقل دونقطه است و این به ما اجازه می‌داد که از قضیه مانتل استفاده کنیم. درنهایت، نشان خواهیم داد که مجموعه جولیای یک نگاشت تحلیلی مختلط شامل بی‌نهایت نقطه است که در خارج از پهنه جذب \circ قرار می‌گیرند. این موضوع، قضیه فوق را برای نگاشتهای غیرچندجمله‌ای اثبات می‌کند.

۲. این قضیه بسیار کلی تراز نتیجه ما برای نگاشتها با مشتق شوارتسی منفی است چون می‌تواند روی چندجمله‌ای‌هایی مانند $x^3 + x = P(x)$ که دارای مشتق شوارتسی مثبت در نقاط خاصی هستند اعمال شود. همچنین، چندجمله‌ای‌های مختلط ممکن است دارای مشتق شوارتسی غیرحقیقی باشند.

۳. همان‌گونه که در ملاحظه بعد از قضیه ۱.۴ بیان کردیم، ∞ ممکن است به عنوان یک نقطه ثابت جاذب برای یک نگاشت چندجمله‌ای درنظر گرفته شود. سپس برهان بالا ممکن است برای نشان دادن این موضوع استفاده شود که اگر همه مدارهای نقاط بحرانی کران دار باقی بمانند، آنگاه پهنه جذب ∞ حداقل اگر ∞ مشمول در پهنه باشد، همبند ساده است. این مطلب را در آینده نشان می‌دهیم.

تمرین.

۱. نشان دهید که تکرارهای یک نگاشت تحلیلی، یک خانواده نرمال در پهنه جذب یکی از نقاط متناوب جاذب را تشکیل می‌دهند.

۲. نشان دهید پهنه جذب بلافصل یک نقطه متناوب جاذب (متناهی) همبند ساده است.

۳. برای $|a| < 1$ قرار دهید

$$T_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}.$$

نشان دهید که T_a یک همسان‌ریختی تحلیلی از $\{z \mid |z| < 1\} = D$ به خودش است.

۴. ثابت کنید که اگر P یک چندجمله‌ای با درجه بزرگ‌تر از یک باشد، آنگاه $\circ R >$ موجود است به‌طوری که اگر $R > |z|$ ، آنگاه $|P(z)| > |z|$. نتیجه بگیرید که اگر $R > |z|$ ، آنگاه $|P^n(z)| \rightarrow \infty$.

۵ مجموعه جولیا

هدف این بخش ارائه خواص پایه‌ای مجموعه جولیایی یک نگاشت چندجمله‌ای در صفحه مختلط است. همان‌طور که برخی از مباحث ما متکی بر خواص حاصل از چندجمله‌ای بودن نگاشت است

خیلی از مباحثت این گونه نیستند. در واقع تقریباً همه نتایج این بخش روی رده عمومی تری از نگاشتهای تحلیلی همچون نگاشتهای دوران و یا نگاشتهای تام برقرار است. روی هم رفته بررسی اینکه مجموعه جولیا ناتھی است یا نه، ساده نیست. حتی برای چند جمله‌ای‌ها، برانها ای این مطلب اغلب دارای تکنیکهای توپولوژیکی هستند تا جبری. قضیه بعدی نشان می‌دهد که مجموعه جولیا برای اغلب چند جمله‌ای‌ها ولی نه همه آنها، ناتھی است. ابتدا به یک لم نیاز داریم.

لم ۱.۵ فرض کنید $R(z)$ یک چند جمله‌ای با درجه $2 \leq n$ با ریشه‌های مجزای ζ_1, \dots, ζ_n باشد. در این صورت

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{R'(\zeta_i)} = \infty.$$

برهان. هنگامی که $n = 2$ ، نتیجه از محاسبات سرراست حاصل می‌شود. برای $2 < n$ از استقراء استفاده می‌کنیم. فرض کنید $R(z) = (z - \zeta_n)(Q(z))$ که ریشه‌های $(z - \zeta_1, \dots, z - \zeta_{n-1})$ هستند. فرض کنید همه ζ_i ‌ها مجزا هستند. با استفاده از کسرهای جزئی داریم

$$\frac{1}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(Q'(\zeta_i))(z - \zeta_i)}.$$

بنابراین

$$\frac{1}{Q(\zeta_n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{Q'(\zeta_i)(\zeta_n - \zeta_i)}.$$

حال $R'(\zeta_i) = (\zeta_i - \zeta_n)Q'(\zeta_i)$ داریم $i < n$. درنتیجه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R'(\zeta_i)} &= \frac{1}{Q(\zeta_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(\zeta_i - \zeta_n)Q'(\zeta_i)} \\ &= \frac{1}{Q(\zeta_n)} - \frac{1}{Q'(\zeta_n)}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۵ فرض کنید $P(z)$ یک چند جمله‌ای باشد. در این صورت یا

۱. $P(z)$ دارای یک نقطه ثابت q است که $P'(q) = 1$.

۲. و یا $|P'(q)| > 1$ است که $P(z)$ دارای یک نقطه ثابت q است.

برهان. فرض کنید $z = P(z) - R(z)$. در این صورت ریشه‌های R دقیقاً نقاط ثابت P هستند. اگر همه ریشه‌های R مجزا نباشند، آنگاه کمتر از یک موجود است که $\circ = R(\zeta) = R'(\zeta) = \circ$. در این صورت $P(\zeta) = \zeta$ و $P'(\zeta) = 1$. درنتیجه می‌توانیم فرض کنیم که ریشه‌های R همگی مجزا هستند. فرض کنید ζ_1, \dots, ζ_n این ریشه‌ها باشند. طبق لم،

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(\zeta_i) - 1} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R'(\zeta_i)} = \circ.$$

فرض کنید $1 \leq |P'(\zeta_i)|$ ولی برای هر i , $1 \neq P'(\zeta_i)$. در این صورت $1 - \frac{1}{|P'(\zeta_i)|}$ در دایره $|z| + 1$ که مبدأ مختصات از آن حذف شده است قرار می‌گیرد. بنابراین $\frac{1}{P'(\zeta_i) - 1}$ خوش‌تعريف است و در نیم‌صفحه چپ قرار می‌گیرد. ولی از آنجاکه

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(\zeta_i) - 1} = \circ,$$

حداقل یکی از $(1 - \frac{1}{|P'(\zeta_i)|})$ ها باید در ناحیه $\circ = \text{Re}(z) \geq 0$ قرار گیرد. این تناقض، حکم را به دست می‌دهد. \square

بنابراین یا P دارای یک نقطه ثابت دافع است (و بنابراین $J(P) \neq \emptyset$) و یا اینکه P دارای یک نقطه ثابت خنثی با مشتق دقیقاً برابر با یک است. در بخش بعد، نشان خواهیم داد که چنین نقطه‌ای باید حدی برای نقاط متناوب دافع باشد. در حال حاضر با فرض این نتیجه داریم

قضیه ۳.۵ فرض کنید P یک چندجمله‌ای با درجه n بزرگ‌تر از یا مساوی با ۲ باشد. در این صورت $J(P) \neq \emptyset$.

ملاحظه. یک چندجمله‌ای ممکن است دارای هیچ نقطه ثابت دافعی نباشد. در واقع، $P(z) = z + z^2$ دارای یک نقطه ثابت یکتا در صفر با مشتق ۱ است. اگرچه می‌توان به راحتی بررسی کرد که P دارای نقطه متناوب با تناوب دو است. برهان قضیه زیر سرراست است.

$$\text{قضیه ۴.۵} \quad J(P) = J(P^n).$$

تعریف ما از مجموعه جولیا به عنوان بستار مجموعه نقاط دافع، یک تعریف کلاسیک نیست. در زمان فتو و جولیا، این مجموعه به عنوان مجموعه نقاطی که خانواده تکرارهای P در آن نرمال نیست تعریف می‌شد. قضیه بعدی نشان می‌دهد که این دو تعریف معادل هستند.

$$\text{قضیه ۵.۵} \quad J(P) = \{z \in \mathbb{C} \mid P^n(z) \text{ نرمال نیست}\}.$$

برهان. تاکنون نشان داده ایم که $\{P^n\}$ در هیچ یک از نقاط $J(P)$ نرمال نیست. بنابراین کافیست نشان دهیم یک نقطه متناوب دافع در هر همسایگی از نقطه‌ای که $\{P^n\}$ در آن نرمال نیست وجود دارد. برای انجام این کار فرض کنید $\{P^n\}$ در p نرمال نباشد و W یک همسایگی از p باشد. یک نقطه متناوب دافع در W تولید خواهیم کرد.

از آنجاکه $\emptyset \neq J(P)$, می‌توانیم یک نقطه متناوب دافع z بیابیم. با توجه به قضیه ۴.۵ می‌توانیم فرض کنیم که z یک نقطه ثابت برای P است. با توجه به نتایج بخش قبلی، یک همسایگی U از z موجود است به طوری که $P : U \rightarrow \mathbb{C}$ دیفیومورفیسم باشد. درنتیجه P^{-1} روی U خوش‌تعریف است و U را به درون خودش می‌نگارد. فرض کنید $(U_i = P^{-i}(U_0))$ و توجه کنید که $U_i \subset U_{i+1}$ و $\cap U_i = \{z\}$.

از آنجاکه $\{P^n\}$ در p نرمال نیست، نقطه $W \in z$ و عدد صحیح n موجود است به‌طوری که $P^n(z_1) = z$. به‌طور مشابه، از آنجاکه $\{P^n\}$ در z_2 نرمال نیست، نقطه U از z_2 و عدد صحیح m موجود است به‌طوری که $P^m(z_2) = z_1$; در اینجا از این نکته استفاده کردیم که z_1 یک نقطه استثنایی نیست. درنتیجه، $P^{m+n}(z_2) = z$. برای استفاده‌های بعدی، توجه می‌کنیم که z_2 یک نقطه هموکلینیک است.

اکنون از فرض ساده کننده $P^{m+n}'(z_2) \neq (P^m)'(z_2)$ استفاده می‌کنیم. اگر z_2 یک نقطه بحرانی برای P^{m+n} باشد، آنگاه انجام چند تغییر برای بحث بعدی لازم است. این جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم. از آنجاکه $P^{m+n}'(z_2) \neq (P^m)'(z_2)$ ، همسایگی V از z_2 موجود است که مشمول در U بوده و توسط P^{m+n} به صورت دیفیومورفیک به روی یک همسایگی از z نگاشته شود. با تنظیم کردن V , می‌توانیم فرض کنیم که $P^m(V) \subset W$ و P^m یک نگاشت دیفیومورفیسم از V به روی یک U_j است. نتیجه می‌شود که P^{m+n+j} یک دیفیومورفیسم است که V را به روی U می‌نگارد. بنابراین، این نگاشت دارای یک وارون است که U را به روی V منقبض می‌کند. یک نقطه ثابت برای P^{m+n+j} در V موجود است که طبق لم شوارتس باید دافع باشد. از آنجاکه $P^m(V) \subset W$, مدار این نقطه متناوب دافع باید وارد W شود.

این حکم مهم بلافاصله چند نتیجه به دست می‌دهد که ساختار و دینامیک مجموعه جولیا را توصیف می‌کند. برای مثال، برهان نشان می‌دهد که هر نقطه که در آن $\{P^n\}$ نرمال نیست، حد یک نقطه متناوب دافع است. بنابراین

نتیجه ۶.۵ $J(P)$ یک مجموعه کامل است.

واضح است که مجموعه نقاط متناوب دافع تحت P پایاست. اگرچه درستی این مطلب برای تصویر وارون P چندان واضح نیست. با این وجود با استفاده از قضیه ۵.۵ داریم

نتیجه ۷.۵ $J(P)$ کاملاً پایاست.

برهان. اگر $\{P^n\}$ در \mathbb{C} نرمال نباشد، آنگاه در هیچ تصویر وارون از \mathbb{C} نیز نرمال نیست. بنابراین، با توجه به قضیه ۵.۵، اگر $z \in J(P)$ ، آنگاه $z \in J(P^{-1})$. \square

یادآوری می‌کنیم که یک نقطه هموکلینیک z به یک نقطه ثابت دافع z ، نقطه‌ای است که برای آن، z^n موجود است به طوری که $z = P^n(z)$ و یک دنباله از تصاویر وارون $P^{-i}(z)$ موجود است که به z همگراست. با استفاده از برهان قضیه ۵.۵ داریم

نتیجه ۸.۵ هر نقطه متناوب دافع از P شامل نقاط هموکلینیک است. علاوه بر آن، نقاط هموکلینیک در $J(P)$ چگال هستند.

ملاحظات.

۱. نتیجه می‌شود که هر نقطه در $J(P)$ دارای همسایگی است که روی آن، تکرار به اندازه کافی بزرگی از P دارای یک مجموعه پایاست و روی آن، نگاشت با یک تغییرجا مزدوج است. بنابراین دینامیک نمادین که در بخش ۶.۱ معرفی شد، به صورت موضعی در کنار هر نقطه در مجموعه جولیا رخ می‌دهد!

۲. به راحتی می‌توان بحث بالا را طوری تنظیم کرد که نشان دهد اگر z_1 و z_2 نقاط متناوب دافع باشند، آنگاه مدارهای هتروکلینیکی موجودند که مدارهای آنها را به هم وصل می‌کنند، یعنی، نقطه‌ای مانند z موجود است که در نهایت به روی z_2 نگاشته می‌شود و برای آن یک دنباله از تکرارهای پسروی P^n همگرا به z_1 موجود است.

دیدیم که تصاویر پیش روی یک همسایگی از هر نقطه در $J(P)$ ، درنهایت نه تنها $J(P)$ ، بلکه هر نقطه غیراستثنایی در \mathbb{C} را می‌پوشاند. بنابراین خود $J(P)$ نیز چنین خاصیتی دارد. اگر این نکته را برای $J(P)$ به کار ببریم، نتیجه می‌گیریم که هر نقطه در $J(P)$ باید در J چگال باشد. یعنی

قضیه ۹.۵ فرض کنید $z \in J(P)$. در این صورت

$$J(P) = \overline{\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} P^{-k}(z) \right)}.$$

این قضیه الگوریتم خوبی برای رسم نمودار مجموعه‌های جولیا به دست می‌دهد. می‌توان به سادگی یک نقطه دافع ثابت برای F یافت و پیش‌تصویرهای آن را محاسبه نمود. حتی از این ایده می‌توان برای توصیف کامل برخی از مجموعه‌های جولیا استفاده کرد. یک نتیجه دیگر، نتیجه‌ای است که در زیر آمده است.

نتیجه ۱۰.۵ مجموعه $J(P)$ دارای درون تهی است.

برهان. اگر $J(P)$ شامل یک مجموعه باز باشد، آنگاه $J(P) \cap \mathbb{C}$ به جز نقاط استثنایی است. ولی چنین چیزی اتفاق نمی‌افتد چون پهنه جذب ∞ در مجموعه جولیا قرار نمی‌گیرد. \square

توجه کنید که این نتیجه، تنها نتیجه‌ای در این بخش است که برای نگاشتهای گویا و کامل برقرار نیست.

مثال ۱۱.۵ فرض کنید $z = z^2 - 2$. در این صورت $J(Q_2)$ بازه بسته $2 \leq x \leq -2$ است. این مطلب را می‌توان با توجه به اینکه این بازه، کاملاً پایا، بسته، شامل یک نقطه ثابت دافع در $x = 2$ و پیش‌تصویر آن در $x = -2$ است ثابت کرد. بنابراین $J(Q_2)$ مشمول در این بازه است. برای دیدن اینکه $J(Q_2)$ واقعاً همین بازه است از این نکته استفاده می‌کنیم که مرز پهنه جذب ∞ درون $J(Q_2)$ قرار می‌گیرد (تمرین ۳ را ببینید). از آنجاکه مدار \circ در این بازه قرار گرفته است از ملاحظه بعد از قضیه ۱۰.۴ نتیجه می‌گیریم که پهنه جذب ∞ همبند ساده است. بنابراین $J(Q_2)$ نمی‌تواند دو قسمت مجرماً باشد و $J(Q_2)$ یک بازه است.

به عنوان یک ملاحظه، نگاشت Q_2 مزدوج توپولوژیکی با $(z - 1)^2 \mapsto z$ است. در نتیجه این مطلب یک برهان دیگر برای اینکه این نگاشت دارای نقاط متناوب چگال در بازه یکه است به دست می‌دهد. بخش ۸.۱ را ببینید. همچنین مثالهای ۶ تا ۸ را ببینید.

همان‌گونه که در مقدمه این فصل اشاره کردیم، مجموعه جولیا، دقیقاً مجموعه‌ای است که دینامیک آشوبناک P را به دوش می‌کشد.

قضیه ۱۲.۵ نگاشت P روی $J(P)$ آشوبناک است.

برهان. از آنجاکه طبق تعریف، نقاط متناوب در $J(P)$ چگال هستند، کافیست نشان دهیم که P ترایای توپولوژیکی است و همچنین وابسته حساس به شرایط اولیه است. فرض کنید $z_1, z_2 \in J(P)$ و فرض کنید که U_i یک همسایگی از z_i باشد. می‌توانیم فرض کنیم که z_1 و z_2 نقاط متناوب دافع هستند. با توجه به ملاحظه بعد از نتیجه ۸.۵، یک مدار هتروکلینیک هست که z_1 و z_2 را به هم وصل می‌کند. بلاfacسله نتیجه می‌شود که P ترایای توپولوژیکی است. از آنجاکه این مدار هتروکلینیک در $J(P)$ قرار می‌گیرد، نتیجه می‌شود که P وابسته حساس به شرایط اولیه است. \square

ملاحظه. می‌توان بیشتر از این گفت؛ روی مجموعه جولیا، P به صورت موضعی، نهایتاً پوشاست. این بدان معنی است که اگر U یک مجموعه باز باشد که با $J(P)$ اشتراک دارد، آنگاه عدد صحیح n موجود است که برای آن $(U \cap J(P))^n = J(P)$. تمرین ۴ را ببینید.

تمرین.

۱. مجموعه جولیای $C(z) = z^3 - 3z = z^3 - 3z$ را توصیف کنید.

۲. مجموعه جولیای نگاشتهای گویا به صورت $R(z) = \frac{1}{z^n}$ را که $n \geq 2$ توصیف کنید.

۳. نشان دهید که مرز پنهان جذب ∞ برای یک چندجمله‌ای، در مجموعه جولیای آن قرار می‌گیرد.

۴. نشان دهید که یک نگاشت چندجمله‌ای به صورت موضعی نهایتاً روی مجموعه جولیای خود پوشانده شود.

۵. برهان قضیه ۲.۵ را به حالت نگاشتهای گویا به صورت $\frac{P(z)}{Q(z)}$ که P و Q هر دو دارای درجه بزرگ‌تر از یا مساوی با ۲ هستند، تعمیم دهید.

۶. فرض کنید $\log z$ شاخه اصلی نگاشت لگاریتم طبیعی باشد. یعنی،

$$\log : \mathbb{C} - \{x | x < 0\} \rightarrow \{z \notin \mathbb{C} | \operatorname{Im} z < \pi\}.$$

نشان دهید که

$$2 \cos(i \log z) = z + \frac{1}{z}.$$

۷. از نتیجه تمرین ۶ برای نشان دادن اینکه نگاشت $R(z) = z + \frac{1}{z}$ ، بیرون دایره واحد را به روی بیرون بازه $2 \leq x \leq -2$ در \mathbb{C} می‌نگارد استفاده کنید.

۸. از نتیجه تمرین ۷ برای نشان دادن اینکه R یک تزویج توپولوژیکی بین $z^2 - 2$ و $Q_{-2}(z) = z^2 - 2$ ایجاد کرده و بیرون دایره واحد را به بیرون بازه $2 \leq x \leq -2$ می‌نگارد استفاده کنید. نتیجه بگیرید که همه مدارهای Q_{-2} در بیرون این بازه به ∞ میل می‌کنند.

۶ هندسه مجموعه‌های جولیا

هدف ما در این بخش، ارائه مثالهای متنوعی از مجموعه جولیای چندجمله‌ای‌ها و نگاشتهای گویاست. تاکنون مثالهای مجموعه جولیا که با آنها مواجه شدیم (دایره واحد، بازه بسته، مجموعه کانتور) دارای هندسه نسبتاً غیرهیجان‌انگیزی بودند. در واقع، ممکن است کسی به اشتباه تصور کند که مجموعه‌های جولیا معمولاً یا خمهای هموار هستند یا مجموعه کانتور در \mathbb{C} . در واقع، لزوماً

این طور نیست. در این بخش امیدواریم بعضی از آشکال پیچیده و عجیب مجموعه جولیا را که یک چندجمله‌ای درجه دوم ممکن است به خود بگیرد نمایش دهیم.

مثال ۱.۶ ابتدا مجموعه جولیای $Q_c(z) = z^2 + c$ را برای یک c نزدیک به صفر درنظر می‌گیریم. از بخش ۲.۲ یادآوری می‌کنیم Q_c دارای یک نقطه ثابت جاذب در صفر بوده و $J(Q_c)$ دایره واحد است. بهوضوح، این دایره، مرز هر دو پهنه جذب \circ و ∞ است. برای $|c| < 1$ کوچک، پدیده مشابهی رخ می‌دهد. بهسادگی دیده می‌شود که تا هنگامی که $|c|$ کوچک است، Q_c دارای یک نقطه ثابت جاذب نزدیک \circ است. علاوه بر آن، می‌توان به عنوان یک تمرین ساده نشان داد که مرز پهنه جذب این نقطه ثابت دوباره در مجموعه جولیای Q_c قرار می‌گیرد. همانند قبل، این مرز یک خم بسته ساده است. این مرز شباهتی به یک خم هموار ندارد؛ در واقع، شامل هیچ کمان همواری هم نیست!

قضیه ۲.۶ فرض کنید $\frac{1}{c} < |c|$. در این صورت مجموعه جولیای Q_c یک خم بسته ساده است. برهان. فرض کنید Γ نماینده دایره‌ای با شعاع $\frac{1}{c}$ و مرکز \circ باشد. Γ شامل هر دوی نقطه ثابت جاذب و نقطه بحرانی Q_c در درون خود است. علاوه بر آن، برای هر z در خارج Γ داریم $1 > |Q'_c(z)|$. برای هر $S^1 \in \theta$ ، خم پیوسته

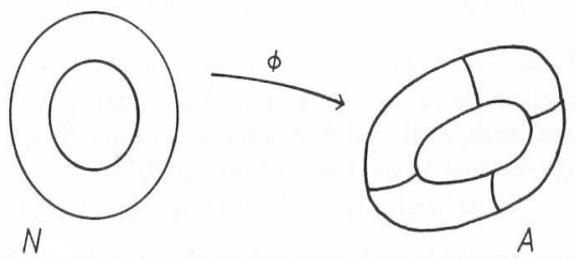
$$\gamma_\theta : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$$

با خاصیت $(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t) = z$ یک پارامتری سازی پیوسته از $J(Q_c)$ است. برای تعریف (θ, z) ، ابتدا توجه می‌کنیم که پیش‌تصویر Γ_1 از Γ تحت Q_c یک خم بسته ساده است که Γ را در درون خود دارد و به صورت دوبه‌یک به روی Γ نگاشته می‌شود. این نکته که Γ_1 یک خم بسته ساده است از این مطلب که هر دوی نقطه بحرانی و تصویر آن درون Γ هستند نتیجه می‌شود. درنتیجه Γ_1 و Γ ، یک ناحیه حلقوی A_1 را محدود می‌کنند. (A_1 را می‌توان دامنه اساسی نقطه ثابت جاذب Q_c درنظر گرفت). فرض کنید N یک حلقه استاندارد با تعریف

$$N = \{re^{i\theta} \mid 1 \leq r \leq 2\}$$

برای مقدار دلخواه θ باشد. یک دیفیومورفیسم $N \rightarrow A_1$ را انتخاب کنید که درون و بیرون مرزهای N را به مرزهای متناظر با A_1 بسازد. شکل ۱.۶ را ببینید. این به ما اجازه می‌دهد که قطعه اولیه $\gamma_\theta : [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ را به صورت

$$\gamma_\theta(r) = \phi(re^{i\theta})$$

شکل ۱.۶. دیفیومورفیسم $\phi : N \rightarrow A_1$

تعریف کیم. این یعنی، γ_θ تصویر یک شعاع در N تحت ϕ است.

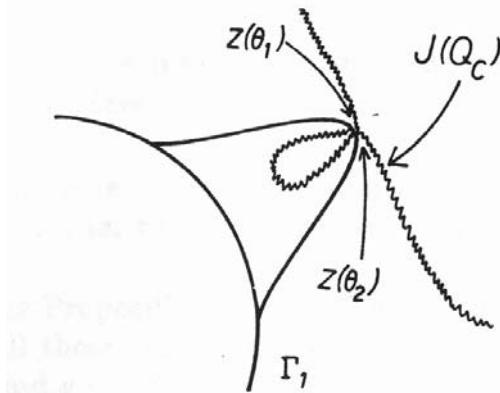
برای $r, r \geq \gamma_\theta$ را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم. Q_c هیچ نقطه بحرانی در بیرون Γ_1 ندارد. بنابراین خم بسته ساده Γ_2 موجود است که به صورت دوبه‌یک بر روی Γ_1 نگاشته می‌شود. علاوه بر آن، Q_c ناحیهٔ حلقوی A_2 بین Γ_1 و Γ_2 را باز به صورت دوبه‌یک بر روی A_1 می‌نگارد. درنتیجه، پیش‌تصویر هر γ_θ در A_1 ، یک جفت از خمها مجزا در A_2 است. یک چنین خم یکتا می‌باشد. است که مرز داخلی Γ_1 را قطع می‌کند. درنتیجه برای هر θ ، یک خم یکتا در A_2 هست که شامل نقطه (2) γ_θ است. بنابراین ما از طریقی کاملاً بدیهی این دو خم را در این نقطه به هم وصل می‌کنیم تا یک خم ساده که روی بازه $[1, 3]$ تعریف شده تولید شود. با ادامه این روند، می‌توانیم γ_θ را به کل بازه $[0, \infty]$ تعمیم دهیم.

یادآوری می‌کنیم به شرط اینکه z در خارج از Γ_1 قرار گیرد داریم $1 > k > |Q'_c(z)|$. بنابراین طولهای هر تعمیم γ_θ به صورت هندسی کاهش می‌یابد. نتیجه می‌شود که $(t) \gamma_\theta(t)$ همگرای یکنواخت بر حسب θ است و

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_\theta(t) = z(\theta)$$

یک نقطه یکتا در \mathbb{C} برای هر θ است.

ادعا می‌کنیم که $(\theta) z$ یک خم بسته ساده در \mathbb{C} را پارامتری می‌کند. بهوضوح z به دلیل همگرایی یکنواخت بر حسب θ ، پیوسته است. برای نشان دادن اینکه تصویر خم، ساده است، باید نشان دهیم که اگر $z(\theta_1) = z(\theta_2)$ ، آنگاه برای هر θ $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ داریم $z(\theta) = z(\theta_1)$. اگر این اتفاق نیافتد، آنگاه باید قسمتهایی از خمها Γ_1 ، $\gamma_\theta(t)$ و $\gamma_{\theta_1}(t)$ ، یک ناحیه همبند ساده که هر z را به درونش وصل می‌کند محدود کنند. شکل ۲.۶ را ببینید. این باعث می‌شود که یک همسایگی از



شکل ۲.۶.

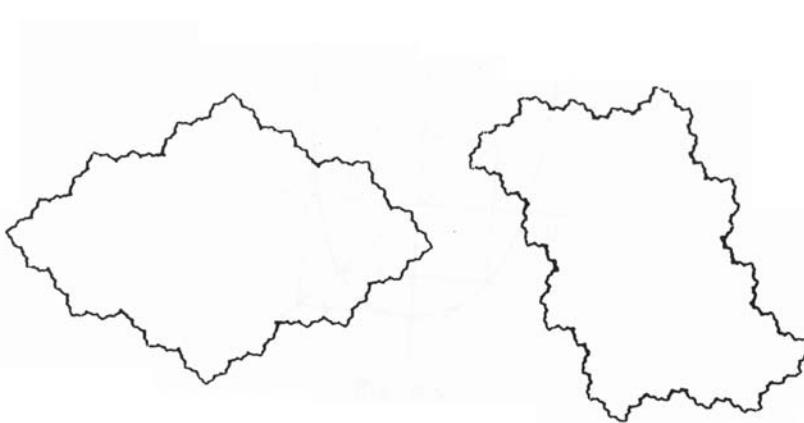
$z(\theta)$ موجود باشد به گونه‌ای که تصویر آن تحت Q_c^n کران دار باقی می‌ماند. درنتیجه $z(\theta) \notin J(Q_c)$ ولی این ناممکن است. \square

اکنون فرض کنید c یک عدد مختلط است و $\frac{1}{4} < |c|$. نگاشت Q_c دارای یک نقطه ثابت دافع در $\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} = z_0$ است. به سادگی می‌توان برسی کرد که $(z_0 Q'_c)$ یک عدد مختلط است که عدد مختلط محض نیست. نتیجه می‌شود که z_0 روی یک کمان هموار در $z(\theta)$ قرار نمی‌گیرد. چون اگر این گونه باشد، آنگاه تصویر $(z_0 Q'_c)$ نیز باید یک کمان هموار گذرنده از z_0 در $J(Q_c)$ باشد. از آنجاکه $(z_0 Q'_c)$ مختلط است، مماسهای این دو خم موازی نیستند. بنابراین، $z(\theta)$ در $J(Q_c)$ ساده نیست. از آنجاکه پیش تصویرهای z طبق قضیه ۹.۵ در $J(Q_c)$ چگال هستند، نتیجه می‌شود که $J(Q_c)$ شامل هیچ کمان همواری نیست. بنابراین نشان داده‌ایم که

قضیه ۲.۶ فرض کنید c یک عدد مختلط و $\frac{1}{4} < |c|$ باشد. در این صورت $J(Q_c)$ یک خم بسته ساده است که شامل هیچ کمان همواری نیست.

شکل ۲.۶ انواعی از مجموعه‌های جولیا را برای نگاشت $Q_c = z^2 + c$ که برای آنها $J(Q_c)$ یک خم بسته ساده است نمایش می‌دهد.

ملاحظه. شرط $\frac{1}{4} < |c|$ را در قضیه‌های ۲.۶ و ۳.۶ می‌توان ساده‌تر کرد. همه چیزی که لازم است این است که Q_c دارای یک نقطه ثابت جاذب باشد. این برای همه مقادیر c داخل یک دلوار در صفحه اتفاق می‌افتد. تمرین ۱ را ببینید. علاوه بر آن، می‌توان نشان داد که در واقع مجموعه جولیا

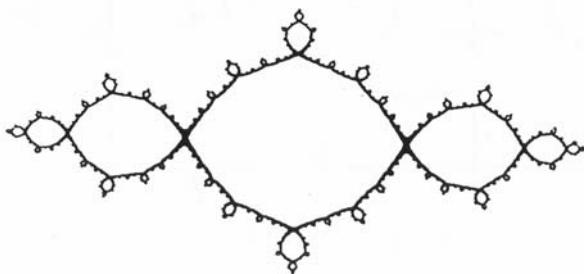


شکل ۳.۶. مجموعه‌های جولیا برای Q_c وقتی که $c = -\frac{1}{4} - \frac{1}{10}i$ (سمت چپ) و $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{10}i$ باشد.

برای این Q_c ‌ها به ازای هر نقطه روی خم بسته ساده، مشتق پذیر نیست.

مثال ۴.۶ حال به جای نقطه ثابت به حالت نقطه متناوب جاذب باز می‌گردیم. در این حالت مجموعه جولیا لزوماً خیلی پیچیده‌تر نیست. فرض کنید $z^2 = P(z)$. توجه کنید که $P(0) = 0$ و $P(-1) = -1$. از آنجاکه $P'(0) = 2$ ، نتیجه می‌شود که 0 و -1 روی یک مدار متناوب جاذب با تناوب ۲ قرار می‌گیرند.

دینامیک P روی خط حقیقی نسبتاً سرراست است. دو نقطه ثابت دافع در $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ موجود است. نقطه ثابت $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ نقطه تقسیم بین پهنه‌های جذب 0 و -1 است. با استفاده از بحث مشابهی همانند برهان قضیه ۲.۶، می‌توان نشان داد که دو خم بسته ساده γ_0 و γ_1 در $J(P)$ هست که به ترتیب 0 و -1 را احاطه کرده‌اند. خمهای γ_0 و γ_1 هم‌دیگر را در نقطه ثابت $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ قطع می‌کنند. برای $J(P)$ اتفاقات بیشتری می‌افتد. برخلاف حالت Q_c ، پهنه جذب 0 کاملاً پایا نیست. یک پیش تصویر از درون 0 بوضوح γ_1 است ولی باید خم دیگری نیز موجود باشد که پیش تصویر دیگر 0 یعنی 1 را احاطه کند. به عبارت دیگر خم بسته ساده دیگری باید در $J(P)$ موجود باشد که 1 را احاطه کند. اکنون هر دوی 1 و -1 باید دارای یک جفت پیش تصویر مجزا باشند که هر یک به وسیله یک خم بسته ساده در $J(P)$ احاطه می‌شوند. با ادامه این روند، می‌بینیم که $J(P)$ باید شامل تعداد نامتناهی خم بسته ساده متفاوت باشد. شکل ۴.۶ را ببینید.

شکل ۴.۶. مجموعه جولیای $P(z) = z^2 - c$

این نکته که بی‌نهایت مؤلفه همبند در مجموعه پایدار P موجود است، تصادفی نیست. چون داریم:

قضیه ۵.۶ فرض کنید P یک چندجمله‌ای از درجه ۲ باشد. درین صورت مجموعه پایدار P شامل یک، دو یا بی‌نهایت مؤلفه همبند است.

برهان این قضیه یک تمرین سرراست است (تمرین ۵ را ببینید). توجه کنید که همه این حالتها همان‌گونه که برای Q_c به ترتیب در حالتهای $2 \geq |c| > \frac{1}{4}$ و $|c| = 1$ نشان دادیم ممکن است اتفاق بیفتد.

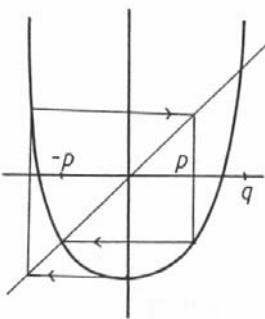
مثال ۶.۶ مثال سوم ما در این بخش، باز یک چندجمله‌ای درجه دوم است. از بخش ۱۱.۱ یادآوری می‌کنیم که یک چندجمله‌ای به فرم $Q_c(z) = z^2 + c$ موجود است که برای آن حقیقی باشد و

۱. نقطه بحرانی در ∞ که در $Q_c^3(\infty)$ صدق می‌کند، یک نقطه ثابت دافع $-p$ است. یعنی، ∞ نهایتاً متناوب است.

۲. Q_c دارای نقاط متناوب (دافع) در بازه $[-p, p]$ است.

از نظر عددی، مقدار c که این پدیده را ایجاد می‌کند تقریباً برابر با -1.543689 و $-0.83928675\dots$ است. نمودار Q_c در شکل ۵.۶ نشان داده شده است.

بنابراین بازه $[-p, p]$ مشمول در $J(Q_c)$ است. از آنجاکه Q_c به صورت پسرو نیز پایاست، همه پیش تصویرهای این بازه در J . قرار می‌گیرند. در واقع، $J(Q_c)$ بستان این مجموعه از بازه‌هاست. اکنون Q_c دارای یک نقطه ثابت دافع دومی در نقطه q است و با استفاده از تحلیل نموداری، می‌توان به راحتی دید که $(-q, q) \subset J(Q_c)$. از آنجاکه $(-q, q) \subset J(Q_c)$ ، پیش تصویرهای این بازه، از دو



شکل ۵.۶

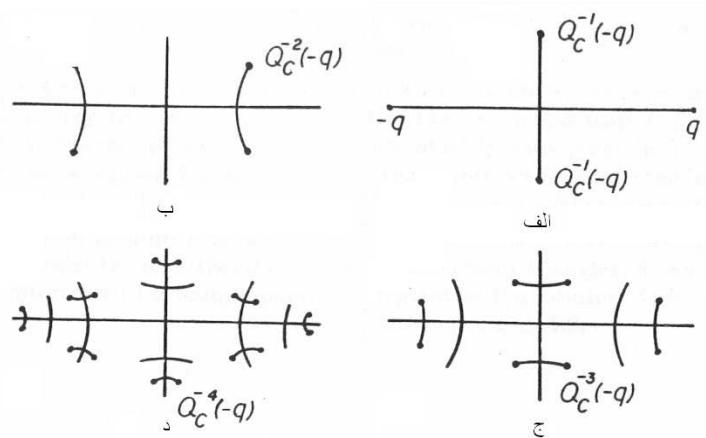
زیرباره تشکیل شده است؛ یکی خود $[q, q]$ و دیگری بازه‌ای است که به صورت متقارن نسبت به صفر روی محور موهومی واقع شده است. این باره، پیش تصویر $[c, c]$ است. اکنون پیش تصویر این جفت از بازه‌ها از چهار خم تشکیل می‌شوند که در شکل ۶ نشان داده شده است. این خمها در \mathbb{C} همدیگر را قطع می‌کنند. با ادامه این روند، می‌بینیم که $([-q, q])$ از Q_c^{-n} از 2^n قطعه خمیده مجزا تشکیل شده است. این پیش تصویرها همدیگر را در پیش تصویرهای قطع می‌کنند و نقاط انتهایی این قطعه‌ها پیش تصویرهای نقطه ثابت q است. با توجه به نتایج بخش ۵.۳، $J(Q_c)$ بستار این مجموعه از پیش تصویرهاست. توجه کنید که برخلاف مثالهای قبلی، $([-q, q])$ کران ناحیه‌ای در \mathbb{C} نیست. ساختار درخت مانند

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} Q_c^{-n} [-q, q]$$

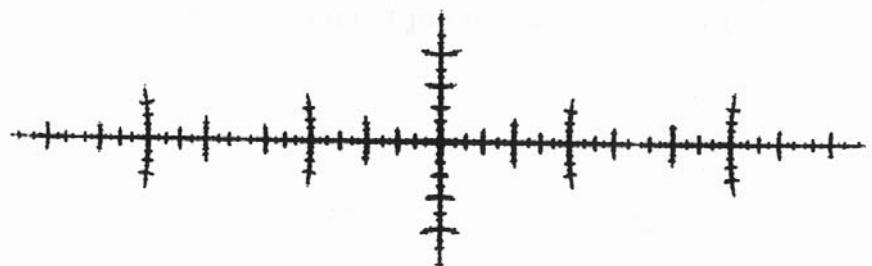
یک دندربیت نامیده می‌شود. کل مجموعه جولیا در شکل ۶ نشان داده شده است.

این سه مثال، وابستگی مجموعه جولیا را به مدار نقطه بحرانی حداقل برای نگاشتهای درجه دوم نشان می‌دهد. هنگامی که نقطه بحرانی به میل می‌کند، مجموعه جولیا همانند آنچه در بخش ۲.۳ نشان داده شد، یک مجموعه کانتور است. هنگامی که نقطه بحرانی به یک نقطه ثابت یا متناوب جاذب میل می‌کند، مجموعه جولیا، بستار یک یا تعدادی خم بسته ساده است و هنگامی که نقطه بحرانی نهایتاً متناوب بوده ولی متناوب نباشد، مجموعه جولیا همانند فوق، یک دندربیت است.

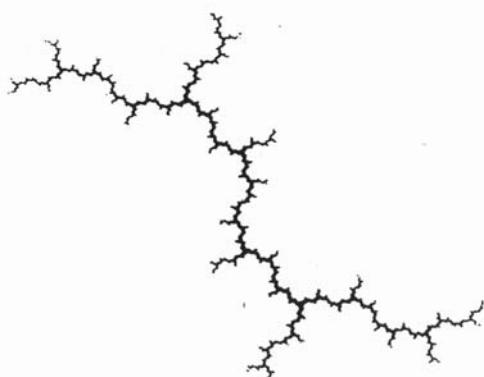
برای چند جمله‌ای $i + z^2 = z(z+i)$ ، نقاط $i+1$ و $i-1$ روی یک مدار متناوب دافع از تناوب ۲ قرار می‌گیرند. توجه کنید $i+1 = -i$ ، بنابراین دوباره نهایتاً متناوب است. درنتیجه مجموعه جولیای i دارای بسیاری از خواص مثال قبلی است. $J(Q_i)$ همانند شکل ۶ است.



شكل ٦.٦



شکل ۷.۶. مجموعه جولیایی Q_c



شکل ۷.۶. مجموعه جولیای $Q_i(z) = z^2 + i$.

ملاحظه. چندجمله‌ای‌های درجه دوم به وضوح آرایش بسیار گستردۀ‌ای از پدیده‌های متفاوت را نمایش می‌دهند. یک روش برای فهرست کردن آنها، رسم نمودار انشعاب این نگاشته‌است. از آنجاکه نگاشته‌ای درجه دوم فقط به یک پارامتر یعنی عدد مختلط c وابسته هستند، نمودار انشعاب در صفحه مختلط قرار می‌گیرد. راه طبیعی برای ترسیم نمودار انشعاب، مشخص کردن همه مقادیر پارامتر است که برای آنها، چندجمله‌ای دارای یک نقطه متناوب جاذب است. همچنین می‌توان مجموعه مقادیر پارامترها را که برای آنها مدار نقطه بحرانی کران‌دار باقی می‌ماند محاسبه کرد. این دو مجموعه تقریباً یکسان هستند. مکان هندسی حاصل، در صفحه پارامتری، مجموعه مندلبروت نامیده شده و موضوع تحقیقات اخیر است.

مثال ۷.۶ در مثال آخرمان در این بخش قصد داریم دو موضوع را نشان دهیم. ابتدا این مثال به جای اینکه یک چندجمله‌ای باشد یک نگاشت گویاست و بنابراین توصیف دینامیک این نگاشت روی کره ریمان بسیار کارآمدتر است. دوم اینکه مجموعه جولیای این نگاشت کل کره ریمان است، پدیده‌ای که طبق نتیجه ۱۰.۵ نمی‌تواند برای چندجمله‌ای‌ها اتفاق بیفتند.

برای توصیف این نگاشت، نیاز است که از برخی خواص توابع بیضوی و بهویژه از \mathbb{C} -توابع واپرشارس استفاده کنیم. این یک موضوع مقدماتی در آنالیز مختلط نیست. به جای طولانی کردن این مبحث، فقط چند خاصیت از \mathbb{C} -توابع را فهرست می‌کنیم. امیدواریم هندسه زیبای متناظر با این نگاشت، خواننده را برای مراجعه به یکی از مراجع استاندارد مانند کتاب آلفورس برای مطالعه کامل تر این مبحث ترغیب کند.

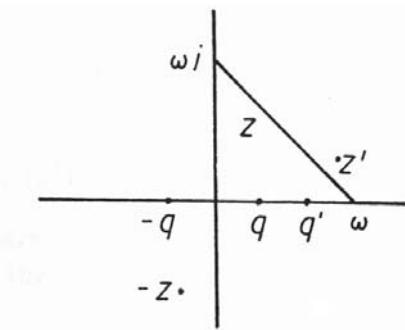
با توصیف یک نگاشت روی چنبره که بسیار شبیه به نگاشت آنسوف و یا خودریختی هذلولوی روی چنبره است و در بخش ۴.۲ توضیح داده شد شروع می‌کنیم. فرض کنید $\omega \in \mathbb{R}$. چنبره T را به عنوان یک مربع در صفحه با اضلاع به طول ω که اضلاع مقابل آن یکی شده‌اند در نظر بگیرید. به صورت معادل می‌توان T را به عنوان \mathbb{C} به پیمانه مشبکه تولید شده با ω و ωi در نظر گرفت. منظورمان این است که ما هر دو نقطه در \mathbb{C} را که به اندازه عدد مختلط $n\omega + m\omega i$ ، برای $n, m \in \mathbb{Z}$ اختلاف دارند یکی می‌کنیم. به ویژه، اضلاع افقی مربع که با $\omega i = y$ و $\omega = x$ داده می‌شوند را با هم و همچنین اضلاع عمودی آن که با $\omega = x$ داده می‌شوند را با هم یکی می‌کنیم. در ادامه ω را به عنوان یک پارامتر در نظر می‌گیریم.

به عنوان یک ملاحظه، می‌توان از هر مشبکه در صفحه برای توصیف کردن چنبره و نگاشت حاصل استفاده کرد. فرض کنید $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ و فرض کنید $\alpha + \beta \neq 0$. توجه کنید که $\alpha + \beta$ و α و β یک متوازی‌الاضلاع در \mathbb{C} مشخص می‌کنند بنابراین \mathbb{C} به پیمانه مشبکه تولید شده با α و β باز هم یک چنبره است. اگرچه برای سادگی، توجه‌مان را به مشبکه مربعی تولید شده با ω و ωi معطوف می‌کنیم. اکنون فرض کنید $z = A(z)$ روی \mathbb{C} تعریف شده باشد. از آنجاکه A نقاط مشبکه را حفظ می‌کند نتیجه می‌شود که A روی T یک نگاشت القاء می‌کند که آن را نیز با A نمایش می‌دهیم. نگاشت A یک نگاشت چهاربیک، از T به خودش است که از بسیاری جهات شبیه به خودریختی هذلولوی روی چنبره در بخش ۴.۲ است. به ویژه، نقاط متناوب دافع در T چگال هستند (تمرین ۶ را ببینید).

اکنون می‌خواهیم دینامیک A روی T را به یک نگاشت روی کره ریمان $\overline{\mathbb{C}}$ تصویر کنیم. از نظر هندسی، نگاشت تصویر $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow T : \pi$ به سادگی قابل توصیف است. کافیست هر نقطه در T را با "منفی" اش یکی کنیم که نتیجه یک کره است. برای دیدن آن، ابتدا مربع اساسی S در \mathbb{C} را با رؤوس در $0, \omega, \omega + \omega i$ و ωi در نظر می‌گیریم. سپس، قطر Δ را از ω به ωi رسم می‌کنیم. قطر Δ ، S را به دو مثلث قابل انطباق S_1 و S_2 تقسیم می‌کند. تحت یکی کردن z با $-z$ ، هر نقطه در درون S_1 با یک نقطه یکتا در درون S_2 یکی می‌شود. شکل ۶.۹ را ببینید.

یکی کردن مرزهای S_1 و S_2 کمی پیچیده‌تر است. هر نقطه روی یکی از قطعات مرز S_1 به جز نقاط انتهایی و نقطه میانی، با یک نقطه یکتا از همان قطعه یکی می‌شود. این بدان معنی است که نقاط $\frac{\omega}{3}$ ، $\frac{\omega i}{3}$ و $\frac{\omega + \omega i}{3}$ هیچ جفتی در این یکی کردن ندارند. به صورت مشابه همه رؤوس S_1 پیش از این در T یکی شده‌اند و در نتیجه نقطه 0 نیز هیچ جفتی در این یکی کردن ندارد.

بنابراین می‌توان کره را به صورت مثلث S_1 که همه سه رأس آن به هم چسبیده‌اند و هر یک از اضلاع تا شده و سپس به هم چسبیده‌اند در نظر گرفت. نتیجه این عمل، نگاشن $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow T : \phi$ است که دارای چهار نقطه بحرانی، دقیقاً در نقاط $0, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega i}{3}$ و $\frac{\omega + \omega i}{3}$ است.



شکل ۹.۶. جفت نقاط z و z' و نقاط q و q' در S یکی می‌شوند.

ضابطه نگاشت $T : \phi \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ را می‌توان به صورت دقیق نوشت چون ϕ با ψ -تابع وایرشتراس داده می‌شود.

تعریف ۸.۶ ϕ -تابع وایرشتراس $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ به صورت

$$\phi(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\nu \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\nu)^2} - \frac{1}{\nu^2} \right)$$

داده می‌شود که جمع روی همه نقاط مشبکه $w = m\nu + n\nu i$ به جز $\nu = 0$ انجام می‌شود.

توجه کنید که که این تعریف برای هر مشبکه‌ای در \mathbb{C} و نه تنها برای مشبکه مربعی تولید شده با w و wi درست است. خواص $\phi(z)$ را که به آنها نیاز داریم فهرست می‌کنیم.

۱. $\phi(z)$ یک تابع تحلیلی است که قطب‌های آن دقیقاً نقاط مشبکه در \mathbb{C} هستند.

۲. $\phi(z + wi) = \phi(z + \omega i) = \phi(z)$ ، بنابراین ϕ یک نگاشت دو-تناوبی است. چنین نگاشتهایی در آنالیز مختلط، نگاشتهای بیضوی نامیده می‌شوند. بنابراین می‌توان ϕ را به عنوان یک نگاشت روی T در نظر گرفت.

۳. $\phi(z) = \phi(-z)$ ، بنابراین ϕ حافظ یکی کردن فوق است. درنتیجه همان‌طورکه لازم است داریم $\phi : T \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

۴. اگر z یکی از چهار نقطه نیم مشبکه یعنی $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\omega i}{3}$ و $\frac{\omega + \omega i}{3}$ نباشد، آنگاه $\phi'(z) \neq 0$.

۵. قضیه جمعی. $\varphi(z), u \in \mathbb{C}$ در رابطه

$$\varphi(z+u) + \varphi(z) + \varphi(u) = \frac{1}{4} \left(\frac{\varphi'(z) - \varphi'(u)}{\varphi(z) - \varphi(u)} \right)^2$$

صدق می‌کند که

$$(\varphi'(z))^2 = 4(\varphi(z))^2 - g_2(\omega)\varphi(z).$$

در اینجا $(\varphi'(z))^2$ به معنی مربع $(\varphi'(z))^2$ است نه تکرار دوم آن. همچنین، ضریب g_2 فقط به پارامتر ω وابسته است.

۶. به عنوان یک نتیجه از قضیه جمعی، داریم

$$\varphi(2z) = \frac{(\varphi(z))^4 - \frac{1}{4}g_2(\varphi(z))^2 + \frac{1}{16}g_2^2}{4(\varphi(z))^2 - g_2\varphi(z)}.$$

بنابراین نمودار زیر را داریم

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{A} & T \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi \\ \overline{\mathbb{C}} & \xrightarrow{R} & \overline{\mathbb{C}}. \end{array}$$

به دلیل خاصیت ۶ فوق، این نمودار جایه‌جایی است. علاوه بر آن، نگاشت R به صورت

$$R(z) = \frac{z^4 + \frac{1}{4}g_2 z^2 + \frac{1}{16}g_2^2}{4z^2 - g_2 z} = \frac{(z^2 + \frac{g_2}{4})^2}{4z(z^2 - g_2)}$$

داده می‌شود. این یعنی، R یک نگاشت گویا روی $\overline{\mathbb{C}}$ است. حال نقاط متناوب A به نقاط متناوب R تصویر می‌شوند و R دارای نقاط متناوب چگال است. درنتیجه همان‌گونه که ادعا کرده بودیم، $J(R) = \overline{\mathbb{C}}$

ملاحظات.

۱. می‌توان به راحتی بررسی کرد که همه نقاط بحرانی R ، نهایتاً متناوب هستند. این حالت خاصی از یک نتیجه مهم است که بیان می‌کند اگر همه نقاط بحرانی یک نگاشت گویا (غیر چندجمله‌ای) نهایتاً متناوب بوده ولی متناوب نباشند، آنگاه $J = \overline{\mathbb{C}}$.

۲. همه نتایج برای یک مشبکه عمومی تر که با $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ تولید شده و $\text{Im}(\frac{\alpha}{\beta}) \neq 0$ برقرار است. در این حالت،

$$(\varphi'(z))^2 = 4(\varphi(z))^3 - g_2\varphi(z) - g_3$$

که g_2 و g_3 پارامترهایی هستند که فقط به α و β وابسته‌اند. نگاشت گویای حاصل به صورت

$$R(z) = \frac{z^4 + \frac{1}{4}g_2z^2 + 2g_3z + \frac{1}{16}g_2^2}{4z^3 - g_2z - g_3}$$

است.

۳. حالت $C = J$ ممکن است برای نگاشتهای تمام همانند آنچه در بخش ۸.۳ برای $\exp(z)$ نشان دادیم اتفاق بیفتد.

تمرین.

۱. فرض کنید $c = z^2 + Q_c(z)$. نشان دهید مجموعه $\{Q_c\}$ دارای یک نقطه جاذب است در یک دلوار در صفحه، کران دار می‌شود. نشان دهید $\{Q_c\}$ دارای یک نقطه متناوب جاذب با تناوب ۲ است $|c|$ است توسط یک دایره در صفحه کران دار می‌شود. این آغاز ساختن مجموعه مندلبروت یا مجموعه انشعاب برای خانواده Q_c است. درمورد این بحث در آینده در بخش ۸ به تفصیل صحبت می‌کنیم.

۲. نشان دهید که مرز پهنه جذب یک نقطه ثابت در مجموعه جولیا قرار می‌گیرد.

۳. نشان دهید که مرز کاملاً پایای پهنه جذب یک نقطه ثابت جاذب باید کل مجموعه جولیا باشد.

۴. فرض کنید C پهنه جذب بلافصل یک نقطه ثابت جاذب باشد. فرض کنید $D \neq C$ مؤلفه دیگری از مجموعه پایدار باشد که به روی C نگاشته می‌شود. نشان دهید که در این صورت باید تعداد بی‌نهایت مؤلفه در مجموعه پایدار موجود باشد.

۵. نشان دهید که اگر یک چندجمله‌ای P از درجه ۲ دارای یک مؤلفه C کاملاً پایا از مجموعه پایدار خود باشد، آنگاه C باید شامل همه نقاط بحرانی P باشد (البته، به جز "نقطه بحرانی" ∞). از این نکته برای اثبات قضیه ۵.۶ استفاده کنید.

۶. فرض کنید T چنبره تولید شده با \mathbb{C} به پیمانه مشبکه ω و $w_i \in \mathbb{R}$ باشد که ω . فرض کنید $A_n : T \rightarrow T$ نگاشت القاء شده با ضرب در یک عدد صحیح n که $2 \geq |n|$ باشد. نشان دهید نقاط متناوب دافع A_n در T چگال هستند. نشان دهید که A_n نیز روی چنبره،^۲ دویک است.
۷. یک مشبکه بسازید که چنبره T را تولید کند و یک نگاشت $T \rightarrow A$ که با ضرب در یک عدد مختلط ناصفر القاء می‌شود به طوری که روی T ، دویک باشد.
۸. نشان دهید که همه نقاط بحرانی نگاشت

$$R(z) = \frac{(z^2 + \frac{g_2}{4})^2}{4z(z^2 - g_2)}$$

نهایتاً متناوب هستند.

۷ نقاط متناوب خنثی

در این بخش، مسئله سخت‌تر رفتاریک نگاشت تحلیلی در یک همسایگی از یک نقطه متناوب خنثی را در نظر می‌گیریم. این نقاط به دو گونه متفاوت مجزا تقسیم می‌شوند. ابتدا، نقاط خنثی گویا هنگامی اتفاق می‌افتد که مشتق یک دوران گویا به صورت $e^{2\pi i(\frac{m}{n})}$ برای m و n صحیح باشند. رفتار موضعی در این حالت را به‌طور کامل شرح خواهیم داد. حالت دیگر، یعنی دورانهای گنگ بسیار پیچیده و سخت بوده و ما فقط به چند حالت خاص بسنده می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم انشاعاب اغلب هنگامی اتفاق می‌افتد که هذلولوی بودن از بین می‌رود. این حالت برای نگاشتهای تحلیلی مختلط نیز برقرار است و این انشاعابهای موضعی را در آینده در تمرینها توضیح می‌دهیم. با حالت ساده شروع می‌کنیم. فرض کنید $F(z)$ دارای یک نقطه ثابت در مبداء مختصات با مشتق برابریک باشد. درنتیجه

$$F(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_n z^n.$$

اولین ضریب ناصفر a_k نقش اساسی در تعیین دینامیک F دارد. فعلاً فرض می‌کنیم که $a_2 \neq 0$. با تزویج با $a_2 z \mapsto z$ در واقع a_2 را ۱ می‌گیریم. در حالت ساده همانند نگاشت یک بعدی $F(x) = x + x^3$ ، تحلیل نموداری نشان می‌دهد که نقاط از سمت چپ جذب ۰ و از سمت راست از ۰ دور می‌شوند. قضیه بعدی نشان می‌دهد که پدیده مشابهی در صفحه مختلط اتفاق می‌افتد.

قضیه ۲.۷ فرض کنید $P(z) = z + z^2 + a_2 z^3 + \dots + a_n z^n$ در این صورت $\mu > 0$ موجود است به طوری که

۱. همه نقاط واقع در درون دایره‌ای با شعاع μ و مرکز 0 جذب می‌شوند.

۲. همه نقاط واقع در درون دایره‌ای با شعاع μ و مرکز 0 دور می‌شوند.

برهان. ساختار موضعی نزدیک نقطه ثابت با حذف کردن کامل نقطه ثابت به وسیله فرستادن آن به بی‌نهایت، بهتر قابل درک است. به صورت معمول این کار را با مزدوج کردن P با تبدیل موبیوس $H(z) = \frac{1}{z}$ انجام می‌دهیم. نگاشت جدید

$$G(z) = \frac{z^n}{z^{n-1} + z^{n-2} + a_2 z^{n-3} + \dots + a_n}$$

حاصل می‌شود. با انجام تقسیم می‌توانیم بنویسیم

$$G(z) = z - 1 + G_0(z)$$

که

$$G_0(z) = \frac{b_1 z^{n-2} + \dots + b_n}{z^{n-1} + z^{n-2} + a_2 z^{n-3} + \dots + a_n}.$$

توجه کنید که

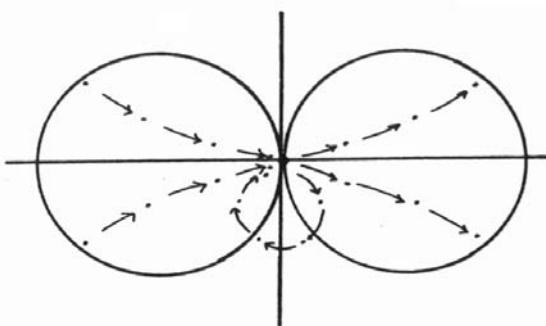
$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} G_0(z) = 0.$$

بنابراین، نزدیک ∞ ، نگاشت G در واقع برابر با یک واحد انتقال به چپ است. به ویژه، $\delta > 0$ موجود است به طوری که اگر $\delta < -\eta$ و $\eta > -\eta$ آنگاه $\operatorname{Re}(G(z)) < -\eta$. درنتیجه G هر نیم صفحه $\operatorname{Re}(z) < -\eta$ را به داخل خودش می‌نگارد.

تحت H ، نیم صفحه $\operatorname{Re}(z) < -\eta$ به درون دایره‌ای با شعاع $\frac{1}{\eta}$ و مرکز $\frac{1}{\eta}$ - نگاشته می‌شود. درنتیجه نقاط درون این دوایر تحت تکرارهای P به 0 جذب می‌شوند. پس اگر $\delta = -\mu$ ، قسمت اول برقرار می‌شود. برای قسمت ۲، بحث مشابهی برقرار است ولی این بار نیم صفحه $\operatorname{Re} z > \eta$ را درنظر می‌گیریم. \square

شکل ۱.۷ هندسه مضمون این قضیه را نشان می‌دهد.

با درنظر گرفتن نواحی مختلف نزدیک ∞ ، می‌توان دینامیک را با جزئیات بیشتری توصیف کرد. به طور مثال، اگر قسمت گوهای نزدیک ∞ را مطابق شکل ۲.۷ انتخاب کنیم، آنگاه پهن 0 ، شامل یک خانواده از خمهای مشابه با دلوار است.

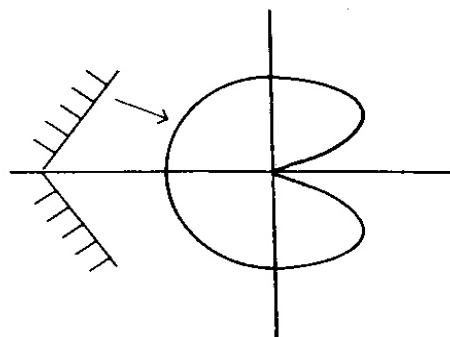


شکل ۱.۷

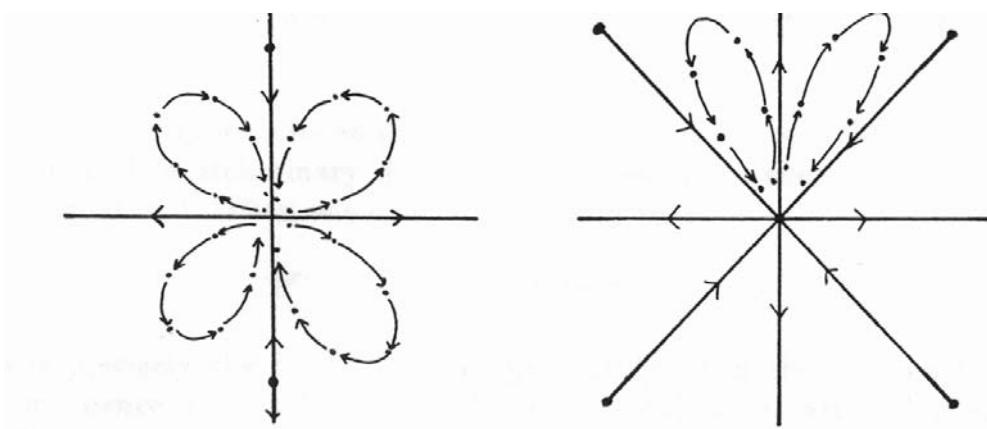
چنین ناحیه‌ای را یک گلبرگ جاذب برای P می‌نامیم. به طور دقیق‌تر، یک ناحیه همیند ساده، C یک گلبرگ جاذب برای یک نقطه ثابت خنثی ∞ است اگر ∞ مشمول در مرز C باشد و برای هر $z \in C$ داشته باشیم $P^n(z) \rightarrow \infty$. یک گلبرگ دافع به صورت مشابه تعریف می‌شود. توجه کنید که اگر نواحی دلوار مانند مرز این گلبرگها را انتخاب کنیم، گلبرگ‌های جاذب و دافع را می‌توان با هم اشتراک داد. این بدین معنی است که اکثر نقاط و البته نه همه نقاط نزدیک ∞ به سادگی یک مسیر از طرف دافع ∞ به طرف جاذب آن تشکیل می‌دهند. مثال $z^2 + z \rightarrow \infty$ نشان می‌دهد که همه نقاط، چنین مداری را تشکیل نمی‌دهند چون نقاط مثبت محور حقیقی به ∞ میل می‌کنند. در واقع، دقیقاً در "دهانه" دلوار جاذب است که مجموعه جولیا به توی یک همسایگی از ∞ می‌لغزد. این موضوع را در ادامه ثابت خواهیم کرد.

هنگامی که ضریب a_2 صفر شود، حالت پیچیده‌تری داریم. این موضوع در مثال بعدی نشان داده می‌شود.

مثال ۳.۷ فرض کنید $P(z) = z + z^3$. توجه کنید که اگر $z \in \mathbb{R}$ و $z \neq 0$ ، آنگاه $\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$. از طرف دیگر P محور موهومی را حفظ می‌کند و $P(iy) = i(y - y^3)$. تحلیل نموداری نگاشت یک بعدی $y^3 - y \mapsto y$ نشان می‌دهد که اگر $y > \sqrt[3]{2}$ ، آنگاه $P(iy) \rightarrow \pm i\sqrt{2}$ روی یک مدار متناوب دافع با تناوب ۲ قرار می‌گیرند. بنابراین حداقل دو گلبرگ جاذب و دو گلبرگ دافع برای P وجود دارد. در واقع همان‌طور که در آینده نشان می‌دهیم، دقیقاً دو گلبرگ از هر نوع موجود است. شکل ۳.۷ را ببینید.



شکل ۲.۷



شکل ۳.۷. دینامیک $P(z) = z + z^5$ و $P(z) = z + z^3$

مثال ۴.۷ به طور کلی تر، $P(z) = z + z^{n+1}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید λ یک ریشه n ام واحد باشد. در این صورت خط راست $t \mapsto t\lambda$ تو سط P حفظ می شود چون $(1+t^n)^{\lambda} = \lambda(1+t^n)$. تحلیل نموداری به ما این امکان را می دهد که دینامیک را روی هر یک از این خطوط پایا تعیین کنیم. برای مثال، اگر n زوج باشد، آنگاه برای هر $t \neq 0$ ، $P^j(\lambda t) \rightarrow \infty$. بنابراین همه این خطوط دافع هستند. در این حالت، اگر w ، امین ریشه ۱ باشد، می توان به سادگی نشان داد که خطوط wt جاذب موضعی هستند (تمرین ۷.۱ را ببینید). شکل ۷.۲ را ببینید.

در حالت کلی، فرض می کنیم که $a_k \neq 0$ ولی برای $i = 1, \dots, k-1$ ، $a_i = 0$. در این صورت ادعا می کنیم که $1 - k$ ناحیه جاذب و دافع برای P موجود است. این مطلب را می توان به این صورت دید. قرار دهید $H(z) = \frac{1}{z^{k-1}}$. نگاشت H دیگر یک تزویج نیست چون وارون H ، خوش تعریف نیست. اگرچه، روی صفحه $\operatorname{Re} z < -\eta$ که در بر همان قضیه ۱.۷ استفاده شد، می توانیم یک شاخه تحلیلی از وارون، یعنی یک ریشه $(1-k)am$ خوش تعریف از z را برگزینیم. اگر ما این نگاشت وارون را ثابت نگه داریم می توانیم ببینیم که P با نگاشت

$$G(z) = \frac{z^n}{z^{n-1} + kz^{n-2} + K(z)}$$

مزدوج است که $K(z)$ شامل جملاتی به فرم

$$a_{ij}z^i \left(z^{\frac{1}{k-1}}\right)^j$$

برای $i < n-2$ و $j < k-1$ است. تأکید می کنیم که جمله $z^{\frac{1}{k-1}}$ نشان دهنده شاخه ثابتی از ریشه $(1-k)am$ است که از ابتدا در نظر گرفته بودیم. حال ادامه برهان مشابه قبل است و از بیان آن صرف نظر می کنیم. هر انتخاب متفاوت از یک ریشه $(1-k)am$ به یک تصویر متفاوت از صفحه $\operatorname{Re} z < -\eta$ به \mathbb{C} منجر می شود. بنابراین نشان دادیم که

نتیجه ۵.۷ فرض کنید $P(z) = z + a_k z^k + \dots + a_n z^n$ که $a_k \neq 0$. در این صورت برای نگاشت P در نقطه $z = -\lambda$ گلبرگ جاذب و دافع موجود است.

بحث قبلی به ما امکان بررسی حالت نقطه ثابت گویا را به دست می دهد. فرض کنید $\lambda^m = 1$ ولی برای $m < j \leq 1$ ، $\lambda^j \neq 1$. در این صورت نگاشت

$$P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

دارای یک نقطه ثابت خنثی گویا در مبدأ مختصات است. بهوضوح، $\dots + P^m(z) = z$ که $P^m(z)$ بهصورتی است که در قبل گفته شد. درحقیقت، میتوان بهطورمستقیم ثابت کرد که $P^m(z)$ را میتوان به شکل

$$P^m(z) = z + b_{\ell m+1} z^{\ell m+1} + \dots$$

برای $0 < \ell < m$ نوشته. یعنی، برای ℓ مثبت، $(\lambda^m = 1)$ همه ضرایب z^k تا خود جمله (ℓm) ام صفر میشود (تمرین ۵.۷ را ببینید). ما روش دیگری را با بهکاربردن کارهای قبلی مان برای فرمهای نرمال بهکار میبریم.

لم ۶.۷ فرض کنید

$$P(z) = \lambda z + \sum_{k=2}^n a_k z^k$$

که $1 = \lambda^m$ ولی برای $m < j \leq n$ ، $1 \neq \lambda^j$. دراین صورت برای $0 < \ell < m$ ، یک همسایگی U از 0 و یک نگاشت تحلیلی $H : U \rightarrow \mathbb{C}$ موجود است بهطوری که $H^{-1} \circ P \circ H$ را میتوان بهصورت $\lambda z + b_{m\ell+1} z^{m\ell+1} + \dots$ درنظر گرفت.

برهان. این برهان دقیقاً مشابه کاهش به فرم نرمال است که دربخش ۹.۲ توصیف کردیم. بنابراین ما از روند کاهش شروع میکنیم و بقیه جزئیات را بهعنوان تمرین رها میکنیم.
ابتدا سعی میکنیم که جمله درجه دوم در P را حذف کنیم. فرض کنید

$$P_2(z) = \lambda z + b_3 z^3 + \dots$$

و $Az^2 = z + A(z) = z + H(z)$. هدف این است که A را طوری تعیین کنیم که $H \circ P_2 = P \circ H$. با مقایسه جملات درجه دوم در معادله بالا میتوان بهراحتی بررسی کرد که باید

$$A = \frac{a_2}{\lambda^2 - \lambda}.$$

بنابراین فقط درصورتی میتوان این جملات را حذف کرد که با $a_2 = 0$ و یا $\lambda^2 = 1$. با همین روند و با تعیین نگاشت تزویج $H(z) = z + Az^k$ که جمله بعد از z را ازین میبرد میتوان بهترتیب جملات با مرتبه های بالاتر را حذف کرد. \square

بنابراین میتوانیم از ابتدا فرض کنیم که $P(z) = \lambda z + z^{m\ell+1} + \dots$ که دراینجا تغییرات اولیه ای در متغیرها انجام دادیم که ضریب $z^{m\ell+1}$ برابر با ۱ شود. میتوان بهسادگی دید که

$$P^m(z) = z + m\lambda^{m-1} z^{m\ell+1} + \dots$$

این دقیقاً صورت نگاشتهایی است که در قسمت اول این بخش درنظر گرفتیم؛ بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که P^m دارای ml گلبرگ جاذب و ml گلبرگ دافع است. پس نشان دادیم که

قضیه ۷.۷ فرض کنید ... $P(z) = \lambda z + a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots$ که $\lambda^m = 1$ ولی برای $m < j \leq 1$ ، $\lambda^j \neq 1$. در این صورت یک $\ell > 0$ موجود است به‌طوری که P دارای ml گلبرگ جاذب و ml گلبرگ دافع در 0 باشد. هر گلبرگ توسط $(P^m)(z)$ ثابت نگه داشته می‌شود.

اکنون شکاف کوچکی را که در بحث خود درمورد مجموعه جولیا در بخش ۵.۳ رها کردیم پر می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که در تلاشمان برای اثبات ناتهی بودن مجموعه جولیا، نشان دادیم که یک نگاشت چندجمله‌ای P یا دارای یک نقطه ثابت دافع و یا یک نقطه ثابت با مشتق ۱ است. برای تکمیل اثبات $J \neq \emptyset$ ، کافیست نشان دهیم که نقاط ثابت با مشتق ۱ در واقع نقاط حدی نقاط متناوب دافع هستند (به‌ویژه تصدیق می‌کنیم که نقاط متناوب دافع برای P موجود است). برای این منظور، نظریه موضعی حول یک نقطه ثابت خنثی را با مفهوم خانواده‌های نرمال که در بخش ۳.۳ بیان شد در می‌آمیزیم تا یک نقطه هموکلینیک به 0 درنتیجه یک نقطه متناوب دافع نزدیک تولید کنیم. مطابق معمول، می‌توانیم فرض کنیم که نقطه ثابت خنثی در 0 است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم $P(z) = z + a_k z^k + \dots$ که $a_k \neq 0$. ابتدا توجه کنید که $\{P^n\}$ در هیچ همسایگی از 0 نرمال نیست. این از آنجا ناشی می‌شود که $P^n(z) = z + n a_k z^k + \dots$ و بنابراین $(P^n)(0) = n a_k k$. درنتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(P^n)(0)| \rightarrow \infty$$

و هیچ زیردباله‌ای از P^n نمی‌تواند به یک تابع تحلیلی در 0 همگرا شود. از آنجاکه 0 یک نقطه استثنایی نیست، $z \neq 0$ موجود است به‌گونه‌ای که $P(z_0) = 0$. فرض کنید U یک همسایگی از 0 باشد که شامل z نیست. می‌توانیم فرض کنیم که U مشمول دراجتماع گلبرگ‌های جاذب و دافع است. یعنی، اگر $z \in U$ ، آنگاه یا هنگام $z \rightarrow \infty$ و یا هنگام $z \rightarrow -\infty$ داریم $P^n(z) \rightarrow 0$. از آنجاکه $\{P^n\}$ در U نرمال نیست، عدد صحیح k و $U \ni z$ موجود است به‌طوری که $P^k(z_1) = z$. به‌وضوح، z_1 در یک گلبرگ جاذب قرار نمی‌گیرد. بنابراین z_1 باید در یک گلبرگ دافع باشد. این بدین معنی است که z_1 یک نقطه هموکلینیک برای P است.

با قیمانده برهان دقیقاً مشابه برهان قضیه ۵.۵ است. بنابراین جزئیات را حذف می‌کنیم. اکنون به صورت خلاصه به رفتار یک نگاشت تحلیلی که مشتق آن در یک نقطه ثابت، یک دوران گنگ است بازمی‌گردیم. معادله تابعی شرودر دارای یک جواب است مشروط براینکه دوران به اندازه کافی گنگ باشد. این نتیجه معروف سی. ال. زیگل است. عبارت دقیق آن به‌این صورت است.

قضیه ۸.۷ فرض کنید ... $F(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ که α گنگ است. فرض کنید

اعداد ثابت مثبت a و b موجودند به طوری که برای هر $\alpha - \frac{p}{q} > \frac{a}{b}$ ، $p, q \in \mathbb{Z}$. درین صورت یک همسایگی U از 0 موجود است که روی آن F به صورت تحلیلی مزدوج با دوران گنگ $z \mapsto \lambda z$ است.

برای برهان به کتاب زیگل و موذر مراجعه کنید.

ملاحظات.

۱. مفروضات روی α ایجاب می‌کند که α به سختی قابل تقریب با اعداد گویا باشد. این یک واقعیت است که "بیشتر" گنگها به این صورت هستند.

۲. ناحیه‌ای که روی آن F مزدوج با یک دوران گنگ است یک قرص زیگل نامیده می‌شود. از آنجاکه هیچ نقطه متناوب دیگری در یک قرص زیگل موجود نیست، این نواحی نیز در مجموعه پایدار F قرار می‌گیرند.

۳. همان‌گونه که مثال زیر نشان می‌دهد، این قضیه برای همه دورانهای گنگ برقرار نیست.

مثال ۹.۷ فرض کنید $e^{2\pi i\alpha} = \lambda$. فرض کنید که α گنگ باشد و برای بی‌نهایت عدد طبیعی n داشته باشیم

$$|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^n - 1}.$$

در این صورت ادعا می‌کنیم که P دارای یک نقطه متناوب در هر همسایگی از 0 است (و بنابراین نمی‌تواند با یک دوران گنگ مزدوج شود). برای دیدن این مطلب، به سادگی می‌بینیم که معادله $0 = P^n(z) - z$ به صورت

$$z^{d^n} + \dots + (\lambda^n - 1)z = 0$$

فرض می‌شود. عدد 0 یک ریشه از این معادله است. فرض کنید $\zeta_1, \dots, \zeta_{d^n-1}$ ریشه‌های باقیمانده باشند. بهوضوح،

$$|\zeta_1| \cdot \dots \cdot |\zeta_{d^n-1}| = |\lambda^n - 1|.$$

حداقل یکی از ζ_i ‌ها باید در

$$|\zeta_i| \leq |\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^n - 1}$$

صدق کند و بنابراین نقاط متناوبی به اندازه دلخواه نزدیک به 0 موجود است.

البته یک سوال طبیعی این است که آیا اعداد گنگ λ ای وجود دارند که در معادله

$$|\lambda^n - 1| \leq \left(\frac{1}{n}\right)^{d^n - 1} \quad (*)$$

برای بی‌نهایت مقدار n صدق کنند. برای نشان دادن این مطلب، از مسیرمان کمی به سمت بحث کسرهای مسلسل منحرف می‌شویم.
فرض کنید a_0, a_1, a_2, \dots دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد. یک دنباله از اعداد گویا را به وسیله

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

تعریف کنید. از تمرین ۸، در می‌یابیم که مخرجهای این اعداد گویا در رابطه

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1}$$

صدق می‌کنند. به عنوان یک نتیجه، این دنباله به یک عدد گنگ که آن را با α نشان می‌دهیم میل می‌کند (تمرین ۹ را ببینید). این اعداد بهترین تقریب‌های گویای α هستند و با توجه به تمرین ۱۰، در نامعادله

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < |\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

صدق می‌کنند. اکنون λ ای می‌سازیم که در شرایط بالا صدق کند. برای هر $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ و هر عدد صحیح m ،

$$\begin{aligned} |\lambda^n - 1| &= |e^{2\pi i n \alpha} - 1| \\ &= |e^{2\pi i n \alpha} - e^{-2\pi i n \alpha}| \\ &= 2|\sin(\pi n \alpha)| \\ &= 2|\sin \pi(n\alpha - m)|. \end{aligned}$$

برای هر n عدد صحیح m_n را طوری برمی‌گزینیم که $\frac{1}{2} |x| \leq |n\alpha - m_n| \leq \frac{1}{2} |x|$. آنگاه

$$2|x| \leq |\sin(\pi x)| \leq |\pi x| \leq |\frac{\pi x}{2}|,$$

$$4|n\alpha - m_n| \leq |\lambda^n - 1| \leq 7|n\alpha - m_n|.$$

به صورت استقرایی a_n را طوری انتخاب کید که

$$a_{n+1} > 7q_n^{(d^{q_n})-2} \quad (**)$$

و α را عدد گنگی قرار دهید که بسط کسر مسلسل آن با a_n تعیین شود. در این صورت برای هر n ,

$$\left(\frac{1}{q_n}\right)^{d^{q_n}-1} > \frac{7}{a_{n+1}q_n} > 7|\alpha q_n - p_n| > |\lambda^n - 1|.$$

بنابراین λ یک دوران گنگ است که برای بی‌نهایت عدد صحیح در (*) صدق می‌کند.

قابل ذکر است که می‌توان اولین k تا از a_n ها را به دلخواه برگزید و سپس باقی آنها را طوری انتخاب کرد که در (***) صدق کنند. این عمل، یک مجموعه از اعداد گنگ تولید می‌کند که در (*) صدق می‌کنند. بنابراین تعداد زیادی دوران گنگ موجود است که قرص زیگل تولید نمی‌کنند.

تمرین.

۱. دینامیک نگاشت $P(z) = z + z^{n+1}$ را روی خطوط راست گذرنده از مبدأ مختصات که با w داده می‌شود و w یک ریشه $(2n)$ ام واحد است توصیف کنید.

۲. نشان دهید اگر n زوج باشد، این نگاشت دارای n مدار متناوب دافع با تناوب ۲ است که هر کدام، مداری روی خط راست گذرنده از 0 و یک ریشه n ام -1 است.

۳. فرض کنید λ یک ریشه n ام واحد باشد. نگاشت $P(z) = \lambda z(1 + z^{\ell n})$ را در نظر بگیرید. دینامیک این نگاشتها را روی خطوط پایایی گذرنده از 0 و یک ریشه n ام $1 \pm i$ را توصیف کنید.

۴. نتیجه ۴.۷ را ثابت کنید.

۵. فرض کنید ... $P(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \dots$ یک ریشه n ام واحد است. به صورت مستقیم نشان دهید که $P^n(z)$ به صورت

$$z + \beta_{\ell n+1} z^{\ell n+1} + \dots$$

است.

۶. جزئیات کاهش به فرم نرمال در لم ۵.۷ را کامل کنید.

۷. فرض کنید $S(z) = \sin z$. نشان دهید که خط حقیقی دریک گلبرگ جاذب S در ۰ قرار می‌گیرد در حالی که محور موهومی دریک گلبرگ دافع قرار می‌گیرد.

۸. فرض کنید

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

بسط کسر مسلسل α باشد. فرض کنید $[\rho]$ نماینده بزرگترین قسمت صحیح ρ باشد. برای عدد گنگ داده شده α ، نشان دهید که a_i با روند زیر مشخص می‌شود.

فرض کنید $\alpha = a_0 + r_0$ به طوری که $a_0 = [\alpha]$ و $r_0 = \alpha - [\alpha]$. به صورت مشابه

$$a_1 = \left[\frac{1}{r_0} \right]$$

$$r_1 = \frac{1}{r_0} - \left[\frac{1}{r_0} \right]$$

که

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + r_1}.$$

با ادامه این روند، نشان دهید که a_n ها تعیین می‌شوند و $a_n \geq 0$.

۹. نشان دهید که α عدد گنگ است.

۱۰. فرض کنید $1 = p_0 = a_0 + q_0$. با استفاده از استقراء نشان دهید که

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

۱۱. از تمرین قبلی برای اثبات

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

برای p_n و q_n که نسبت به هم اول هستند استفاده کنید.

۱۲. نشان دهید که بسط کسر مسلسل α در رابطه

$$\frac{1}{(a_{n+1} + 2)q_n^2} < \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

صدق می‌کند.

۱۳. نشان دهید $a_i = \frac{1+\sqrt{5}}{\varphi}, i = 0, 1, 2, \dots$ هرگاه برای $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{\varphi}$

۱۴. نشان دهید $a_{2k+1} = 10 + 2\sqrt{3}\circ$ هرگاه برای $\alpha = 10 + 2\sqrt{3}\circ$ و $a_{2k} = 4, k = 0, 1, 2, \dots$

سری تعمینهای زیر برای کامل کردن بحثی که در بخش ۱۲.۱ در مورد انشعباهای یک بعدی انجام شد، طراحی شده است. هنگام گسترش فضای موردنظرمان از خط حقیقی به صفحه مختلط، انواع متفاوت زیادی از انشعباهای آشنای زینی-گرهای دوره-دو برابر ساز نیز در این حالت متفاوت هستند.

۱۵. زینی-گرهای. فرض کنید $P_c(z) = z^2 + c$ که c یک عدد حقیقی است. روی خط حقیقی، هرگاه $\frac{1}{c} < c$ ، آنگاه Q_c دارای دو نقطه ثابت در \mathbb{C} است و هرگاه $\frac{1}{c} > c$ ، آنگاه هیچ نقطه ثابت ندارد. نشان دهید هنگامی که $\frac{1}{c} > c$ ، آنگاه Q_c دارای یک جفت از نقاط ثابت دافع در \mathbb{C} است. درنتیجه، این زینی-گرهای مختلط یک جفت چشمها/چاهک نمایان می‌کند که با هم برای تشکیل نقاط ثابت دافع یکی می‌شوند.

۱۶. انشعباب دوره-دو برابر ساز. یادآوری می‌کنیم هنگامی که μ حققی باشد، نگاشت $F_\mu(z) = \mu z(1-z)$ یک انشعباب دوره-دو برابر ساز در \mathbb{C} دارد؛ برای $\mu < 1$ ، F_μ دارای یک نقطه ثابت جاذب بوده و هیچ نقطه‌ای با تنابوب ۲ ندارد ولی برای $\mu > 1$ دارای یک نقطه ثابت دافع و یک نقطه متنابوب جاذب با تنابوب ۲ است (حداقل برای μ نزدیک ۳). نشان دهید در \mathbb{C} ، F_μ دارای یک مدار متنابوب دافع با تنابوب ۲ برای $\mu < 1$ است. بنابراین، در صفحه، این انشعباب دوره-دو برابر ساز دارای یک دافع با تنابوب ۲ و یک نقطه جاذب با تنابوب ۱ است که خصوصیات کیفی خود را در انشعباب تعویض می‌کنند.

۱۷. انشعبابی را که برای خانواده λe^{az} در \mathbb{C} هنگام گذر λ از $\frac{1}{e}$ و همچنین هنگام گذر λ از e -رخ می‌دهد توصیف کنید.

۱۸. انشعبابی را که برای خانواده $S_\lambda(z) = \lambda \sin z$ در \mathbb{C} با افزایش λ و گذر از ۱ رخ می‌دهد توصیف کنید.

۱۹. فرض کنید $t > 0$ و فرض کنید λ یک ریشه $\ln m$ واحد باشد. خانواده نگاشتهای

$$P_t(z) = t\lambda z + z^{n+1} + \dots$$

را در نظر بگیرید. انشعابی را که با افزایش t و گذراز ۱ رخ می‌دهد توصیف کنید.

۸ مجموعه مندلبروت

هدف ما در این بخش معرفی برخی از کاربردهای زیبایی است که مندلبروت، دوادی و هابارد روی دینامیک نگاشتهای چندجمله‌ای به فرم $c + z^2 = Q_c(z)$ انجام داده‌اند. از آنجاکه نمی‌خواهیم همه نتایج این بخش را اثبات کنیم، کارهای قبلی مان این اجازه را می‌دهد که بسیاری از ایده‌های اساسی را که پشت مجموعه مندلبروت وجود دارد بیان کنیم. این مجموعه که مجموعه انشعاب برای خانواده نگاشتهای Q_c است به عنوان یکی از پیچیده‌ترین و زیباترین موضوعات در ریاضی شناخته شده است. در این بخش، نقشی که نقطه بحرانی \circ برای Q_c دارد بسیار با اهمیت است. تاکنون می‌دانیم که اگر Q_c دارای یک مدار متناوب جاذب باشد آنگاه \circ باید به این مدار جذب شود. همچنین دیدیم که در برخی موارد خاص که $(Q_c)J$ یک مجموعه کانتور است، \circ باید جذب ∞ شود. در این بخش روی این دوگانگی تأکید بیشتری می‌کنیم و سپس از آن برای تعریف مجموعه مندلبروت استفاده می‌کنیم. مجموعه نقاطی که مدار آنها تحت تکرار Q_c به ∞ نمی‌رود، از اهمیت خاصی برخوردارند.

تعریف ۱.۸ مجموعه جولیایی پر شده یعنی مجموعه K_c از Q_c مجموعه نقاطی است که مدار آنها به ∞ میل نمی‌کند. یعنی،

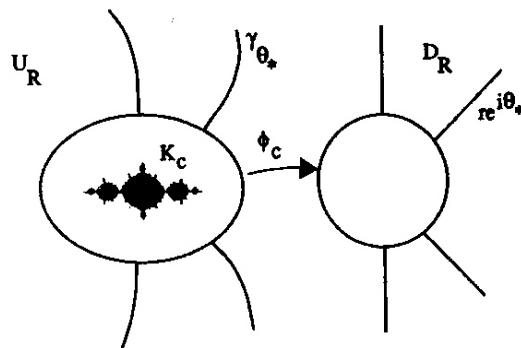
$$K_c = \{z \mid Q_c^n(z) \not\rightarrow \infty\}.$$

توجه کنید K_c برای مدارهایی در $(Q_c)J$ که هرگز به ∞ میل نمی‌کنند، همیشه در بردارنده مجموعه جولیایی Q_c است. مجموعه جولیایی پر شده همچنین شامل مدارهای متناوب جاذب به همراه پهنه جذب آنها در صورت وجود چنین مدارهایی است. بهوضوح، هر دوی K_c و مکمل آن کاملاً تحت Q_c پایا هستند. علاوه بر آن، از تمرینهای ۱ و ۲ دیده می‌شود که مجموعه نقاطی که مدار آنها به ∞ میل می‌کند باز بوده و $J(Q_c)$ مرز K_c است. بنابراین

قضیه ۲.۸ مجموعه K_c بسته و کاملاً پایاست. همچنین $J(Q_c)$ مرز K_c است.

از مثال ۱۳.۱ یادآوری می‌کنیم که Q_c دارای یک نقطه ثابت در ∞ و در کره ریمان است که در آن $\circ = Q'_c(\infty)$. می‌توان به راحتی دید که $\circ \neq Q''_c(\infty)$ (تمرین ۳ را ببینید). از ملاحظه ۴ بعد از لم ۴.۴ نتیجه می‌شود که $\circ > R$ و یک همسایگی U_R از ∞ موجودند به طوری که روی این همسایگی، یک همسان‌ریختی تحلیلی

$$\phi_c : U_R \rightarrow D_R = \{z \mid |z| > R\}$$



شکل ۱.۸. مختصات قطبی روی U_R .

هست که Q_c را با z^2 مزدوج می‌کند. یعنی برای $z \in U_R$,

$$\phi_c(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^2.$$

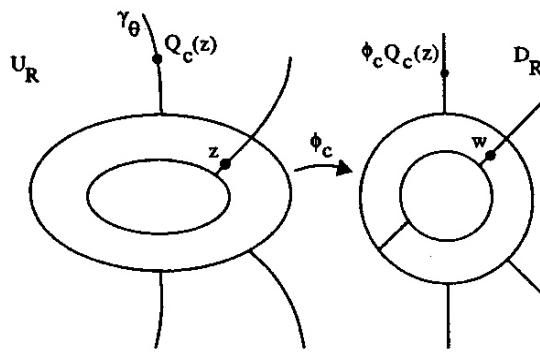
از طریق نگاشت ϕ_c دوباره می‌توانیم به مجموعه باز U_R ، مختصات "قطبی" نسبت دهیم. برای یک زاویه ثابت θ_* ، یک شعاع به فرم $r > R \arg z = \theta_*$ درنظر می‌گیریم. پیش تصویر $(re^{i\theta_*})^{-1}$ را با ϕ_c^{-1} نمایش می‌دهیم. خم γ_{θ_*} یک شعاع خارجی نامیده می‌شود. برای $r_* > R$ قرار دهید

$$\rho_{r_*} = \phi_c^{-1}(|z| = r_*).$$

بنابراین r_* و θ_* روی U_R مختصات قطبی ایجاد می‌کنند. شکل ۱.۸ را ببینید.

با استفاده از بعضی بحثهای دامنه اساسی که در قبل انجام شد، دامنه تعریف این مختصات‌های قطبی را گسترش می‌دهیم. به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $z \in \mathbb{C} - U_R$ صدق می‌کند. در این صورت $\arg \phi_c(Q_c(z)) > R$. فرض می‌کنیم که $\arg \phi_c(Q_c(z)) = \theta$ و $|z| = r$. دونقطه به صورت $\omega \pm i\phi_c(Q_c(z))$ هستند که مربع آنها برابر $\phi_c(Q_c(z))$ است. فرض کنید ω عددی باشد که $\arg \omega = \frac{\theta}{2}$ و $\arg(-\omega) = \frac{\theta}{2} + \pi$. بنابراین $\arg(-\omega) = \arg(\omega)$. برای تعیین ϕ_c باید $\phi_c(z)$ را یکی از ω یا $-\omega$ تعریف کنیم.

برای انجام این انتخاب، ابتدا فرض می‌کنیم که $\gamma_\theta \neq c$. در این صورت $(\gamma_\theta)^{-1} Q_c$ از دو خم مجزا که یکی شامل $\gamma_{\frac{\theta}{2}}$ و دیگری شامل $\gamma_{\pi+\frac{\theta}{2}}$ است تشکیل شده است. توجه کنید که z به یکی از این دو خم تعلق دارد. بنابراین قرار دهید $\omega = \phi_c(z)$ هرگاه $z \in \gamma_{\frac{\theta}{2}}$ و یا $\omega = -\phi_c(z)$ هرگاه $z \in \gamma_{\pi+\frac{\theta}{2}}$. شکل ۲.۸ را ببینید.

شکل ۲.۸. تعمیم تزویج ϕ_c .

زمانی این روند متوقف می‌شود که $\gamma_\theta \in c$ ، چون در این صورت پیش‌تصویرهای $(\gamma_\theta)^{-1} Q_c^{-1}$ هم‌دیگر را در \circ قطع می‌کنند. درنتیجه، اگر مدار \circ به ∞ میل نکند، به این مشکل برخورد نمی‌کنیم و این روند را می‌توانیم تا بی‌نهایت بار تکرار کنیم. به عنوان یک نتیجه، داریم

قضیه ۳.۸ فرض کنید $\infty \neq (\circ) Q_c^n(z) \rightarrow \infty$. فرض کنید $\{z | Q_c^n(z) \rightarrow \infty\} = U_1$. در این صورت یک همسان‌ریختی تحلیلی

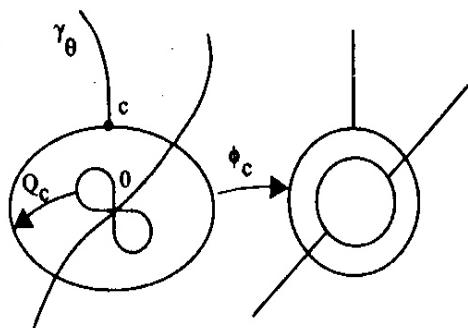
$$\phi_c : U_1 \rightarrow \{z | |z| > 1\}$$

موجود است به طوری که $\phi_c(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^2$. علاوه‌بر آن، $J(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^2$ مرز U_1 است.

برهان. با استفاده از ملاحظات بالا، تنها موردی که نیاز به اثبات دارد این نکته است که هر مدار گریزنده در U_1 قرار می‌گیرد. اگر $\infty \rightarrow Q_c^n(z)$ ، آنگاه یک کوچک‌ترین عدد N موجود است که برای آن $Q_c^N(z) \in U_R$. در این صورت برای تعریف کردن $(\phi_c(z))^2$ می‌توانیم ساختن فوق را N بار در طول مدار z انجام دهیم. از آنجاکه $J(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^2$ مرز مشترک K_c و مجموعه مدار گریزنده است، نتیجه حاصل می‌شود. \square

نتیجه ۴.۸ اگر $\infty \neq (\circ) Q_c^n(z)$ ، آنگاه K_c همبند است.

برهان. مکمل ناحیه همبند ساده U_1 لزوماً همبند است. \square



شکل ۳.۸.

ملاحظات.

۱. نگاشت ϕ_c از U_1 به خارج از دایره در کره ریمان، نگاشت پکنواخت کننده نامیده می‌شود. این نگاشتی است که وجود آن (در حد نرمال کردن) به وسیله قضیه نگاشت ریمان تضمین می‌شود.

۲. با تعمیم ϕ_c ، تعریف شعاعهای خارجی γ_θ را نیز تعمیم می‌دهیم. طبیعی است که بپرسیم چه موقع این شعاعها با افزایش r به 1 ، به نقطه‌ای در $J(Q_c)$ همگرا می‌شوند. در حالت کلی، این سوال ظرفی است که پاسخ آن کاملاً شناخته شده نیست.

در حالتی که $\infty \rightarrow Q_c^n(0)$ ، روند بالا را تابی نهایت ادامه نمی‌دهیم؛ توقف درست زمانی انجام می‌شود که متعلق به پیش تصویر یکی از شعاعهای γ_θ شود. در این حالت، فرض می‌کنیم که $c \in \gamma_{\theta_*}$ و $|J(\phi_c(C))| = r_*$. عدد r_* سرعت فرار مقدار بحرانی نامیده می‌شود. روند فوق برای تعریف ϕ_c روی مجموعه $\{z | |\phi_c(z)| > \sqrt{r_*}\} = U_{\sqrt{r_*}}$ کار می‌کند. این مجموعه در شکل ۳.۸ نمایش داده شده است. توجه کنید که دو پیش تصویر γ_{θ_*} در ∞ برخورد می‌کنند.

اکنون با استفاده از این نکته می‌توانیم از روش‌هایی که بخش ۲ برای نشان دادن اینکه $J(Q_c)$ از بی‌نهایت قطعه مجزا تشکیل شده است استفاده کنیم. فرض کنید V_0 و V_1 نمایش دهنده دو مجموعه باز در بردارنده مکمل $\overline{U_{\sqrt{r_*}}}$ باشند. توجه کنید که هر کدام از V_0 و V_1 به صورت همسان ریخت به روی مکمل $\overline{U_{\sqrt{r_*}}}$ نگاشته می‌شوند. بنابراین $V_0 \cup V_1 \subset J(Q_c)$ و علاوه بر آن، یک مجموعه جولیا در هر یک از V_0 و V_1 موجود است. مانند همیشه، با پیش تصویر گرفتن‌های بی‌دریی از V_0 و V_1 متوجه می‌شویم که $J(Q_c)$ به بی‌نهایت قطعه مجزا تجزیه می‌شود. جزئیات را به خواننده واگذار می‌کنیم. بنابراین

قضیه ۵.۸ فرض کنید $\infty \rightarrow Q_c^n(0)$. در این صورت $J(Q_c)$ از بی‌نهایت مؤلفه مجزا تشکیل شده

است.

ملاحظه. همان‌گونه که بارها در گذشته مشاهده کرده‌ایم، در حقیقت $J(Q_c)$ کلّاً ناهمبند است و $|Q_c|_{J(Q_c)}$ با نگاشت تغییرجا مزدوج است. معمولاً ارائه فرمول واقعی برای تزویج‌هایی مانند ϕ_c ناممکن است. با این وجود، در این حالت می‌توانیم ϕ_c را به صورت دقیق مشخص کنیم.

قضیه ۶.۸ فرض کنید $|z|$ به اندازه کافی بزرگ باشد. در این صورت

$$\phi_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_c^n(z))^{\frac{1}{r^n}}.$$

برهان. تنها کار مشکل در اینجا مشخص کردن این است که کدام ریشه 12^n باید انتخاب شود. برای این کار، می‌نویسیم

$$(Q_c^n(z))^{\frac{1}{r^n}} = z \cdot \frac{(Q_c(z))^{\frac{1}{r}}}{z} \cdot \frac{(Q_c^2(z))^{\frac{1}{r^2}}}{(Q_c(z))^{\frac{1}{r}}} \cdot \dots \cdot \frac{(Q_c^n(z))^{\frac{1}{r^n}}}{(Q_c^{n-1}(z))^{\frac{1}{r^{n-1}}}}. \quad (*)$$

در این عبارت برای هر $n \leq k$ ، جانشانی

$$\frac{(Q_c^k(z))^{\frac{1}{r^k}}}{(Q_c^{k-1}(z))^{\frac{1}{r^{k-1}}}} = \left(1 + \frac{c}{(Q_c^{k-1}(z))^2} \right)^{\frac{1}{r^k}}$$

را انجام می‌دهیم. سپس می‌توانیم شاخه اصلی این ریشه را طوری انتخاب کیم که هر یک از $z, Q_c(z), \dots$ و $(Q_c^k(z))^{\frac{1}{r^k}}$ به اندازه کافی بزرگ باشند. توجه کنید که با استفاده از $(*)$ ، بهوضوح،

$$\phi_c(Q_c(z)) = (\phi_c(z))^{\frac{1}{r}}.$$

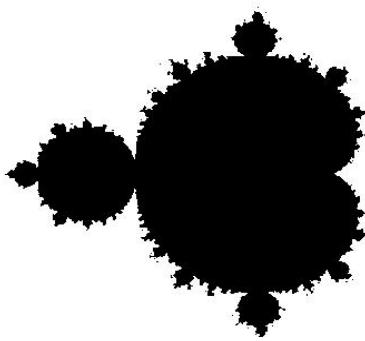
□

اکنون می‌توانیم مجموعه مندلبروت \mathcal{M} را تعریف کنیم.

تعریف ۷.۸ مجموعه مندلبروت زیرمجموعه‌ای از \mathbb{C} -صفحه است که با

$$\mathcal{M} = \{c \mid Q_c^n(\circ) \not\rightarrow \infty\}$$

مشخص می‌شود.



شکل ۴.۸. مجموعه مندلبروت.

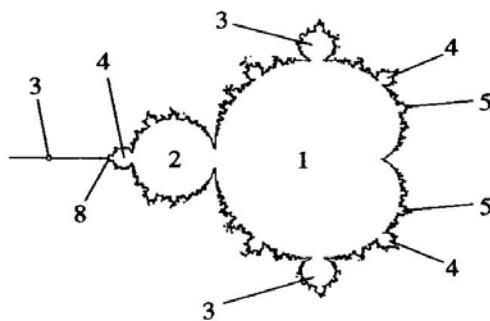
به طور معادل، با استفاده از قضیه ۵.۸ و نتیجه ۴.۸، $\{c \in K_c \mid \text{همبند باشد}\}$

برای نمایش M ، ابتدا توجه می‌کنیم که M درون قرص با شاعع ۲ در c -صفحه قرار گرفته است. این موضوع بالا فاصله از قضیه ۸.۲ نتیجه می‌شود. با استفاده از این نتیجه معلوم می‌شود که اگر $|c| > 2$ ، آنگاه $\infty \rightarrow Q_c^n(c) \notin M$ و بنابراین M همچنین اگر برای یک c ، $k \geq 2$ ، $|Q_c^k(c)| > 2$ باز نتیجه می‌شود که $Q_c^n(c) \rightarrow \infty$.

این، الگوریتمی برای محاسبه M به دست می‌دهد؛ برای $c \in \mathbb{C}$ داده شده به سادگی فقط N نقطه اول از مدار c تحت Q_c را محاسبه می‌کنیم. اگر برای تکراری چون $< N$ داشته باشیم $|Q_c^k(c)| > 2$ ، آنگاه تکرار را متوقف می‌کنیم چون $c \notin M$. اگر برای همه $i \leq N$ ، $|Q_c^i(c)| \leq 2$ آنگاه می‌توانیم فرض کنیم $c \in M$. در شکل ۴.۸، مجموعه نقاط در M که با این الگوریتم مشخص شده‌اند با رنگ سیاه نشان داده شده است.

برخلاف ظاهر آن، مجموعه مندلبروت یک مجموعه همبند است. این نتیجه مهمی است که توسط دوادی و هابارد به دست آمده است. با وجود اینکه نمی‌توانیم برهان را در اینجا رائیه دهیم، ایده‌های اساسی برهان را بیان می‌کنیم. همان‌گونه که در بالا نشان دادیم، اگر $\infty \rightarrow Q_c^n(c)$ ، آنگاه با استفاده از تزویج ϕ_c ، مختصات "قطبی" را به نقطه (c) نسبت می‌دهیم. دوادی و هابارد نشان دادند که نگاشت $c \rightarrow \phi_c(c)$ یک همسان‌ریختی تحلیلی است که $M - \mathbb{C}$ را به روی $\{z \mid |z| > 1\}$ می‌نگارد. یعنی، این نگاشت یک یکنواخت‌سازی از خارج M بوده و بنابراین M یک مجموعه همبند است. تأکید می‌کنیم که $\phi_c(c) \mapsto c$ نگاشتی است که روی c -صفحه تعریف شده نه روی z -صفحه دینامیکی.

مجموعه مندلبروت موضوع شگفت‌انگیز برای اکتشاف به وسیله یک کامپیوتر است. هر "قسمت"

شکل ۵.۸. تناوبهای برآمدگی‌ها در M .

روی مجموعه مندلبروت با بقیه متفاوت است و این را می‌توان با محاسبه مجدد و بزرگ‌نمایی قسمتهای مختلف M انجام داد. در سطوح ۱ تا ۳، مجموعه‌های متفاوتی را در درون و اطراف مجموعه مندلبروت بررسی کرده‌ایم. در این صفحات رنگها نماینده سرعت فرار به ∞ هستند. نواحی قرمز و نارنجی بیانگر مقادیر c هستند که مدار آنها دایره با شعاع ۲ را بعد از چند تکرار ترک می‌کند درحالی که نواحی آبی و بنفش نماینده مقدارهایی هستند که مدار آنها بعد از تکرارهای زیاد فرار می‌کند.

هریک از برآمدگی‌های آذین‌ها در مجموعه مندلبروت دارای یک مفهوم دینامیکی خاص است. برای مثال، ناحیه درون دلوار اصلی در مجموعه مندلبروت، شامل همه مقدارهایی است که برای آنها Q_c دارای یک نقطه ثابت جاذب است. تمرین ۱.۶ را بینید. به صورت مشابه، ناحیه دایره‌ای که بلافاصله در سمت چپ دلوار قرار دارد شامل مقدارهایی است که برای آنها Q_c دارای یک مدار جاذب با تناوب ۲ است. این نیز در تمرین ۱.۶ اثبات شده است. در حالت کلی این موضوع برقرار است: هر برآمدگی در مجموعه مندلبروت، شامل مقدارهایی است که برای آنها Q_c شامل یک مدار متناوب جاذب با یک تناوب چون N است. شکل ۵.۸ نمایانگر تعداد کمی از این نواحی با تناوب N برای مقادیر کوچک N است.

می‌توان این حقایق را با استفاده از نمودار مدارها که در بخش ۱۷.۱ معرفی شده به صورت تجربی به دست آورد. یادآوری می‌کنیم که نمودار مدار یک نگاشت خط حقیقی، ترسیم مدار نقطه بحرانی در برابر مقادیر پارامتر بود. در بخش ۱۷.۱، نمودار مدار برای نگاشت $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$ را محاسبه کردیم. می‌توانیم نمودار مدار Q_c را نیز با استفاده از نقطه بحرانی، به خوبی محاسبه کنیم. در شکل ۶.۸، نمودار مدار Q_c و مجموعه مندلبروت را کنار هم قرار داده‌ایم. آن مقدارهایی که حقیقی هستند، متناظر با "چرخش" افقی M هستند. درست زیر آن، مدار بحرانی متناظر Q_c را رسم کرده‌ایم.

توجه کنید که چگونه ناحیه نقطه ثابت جاذب، دوره-دو برابر ساز، و "پنجره" تناوب سه به صورت دقیق متناظر شده‌اند.

تمرین.

۱. فرض کنید $c + z^n \rightarrow \infty$. نشان دهید که $\{z \mid Q_c^n(z) = z\}$ ، یک مجموعه باز است.

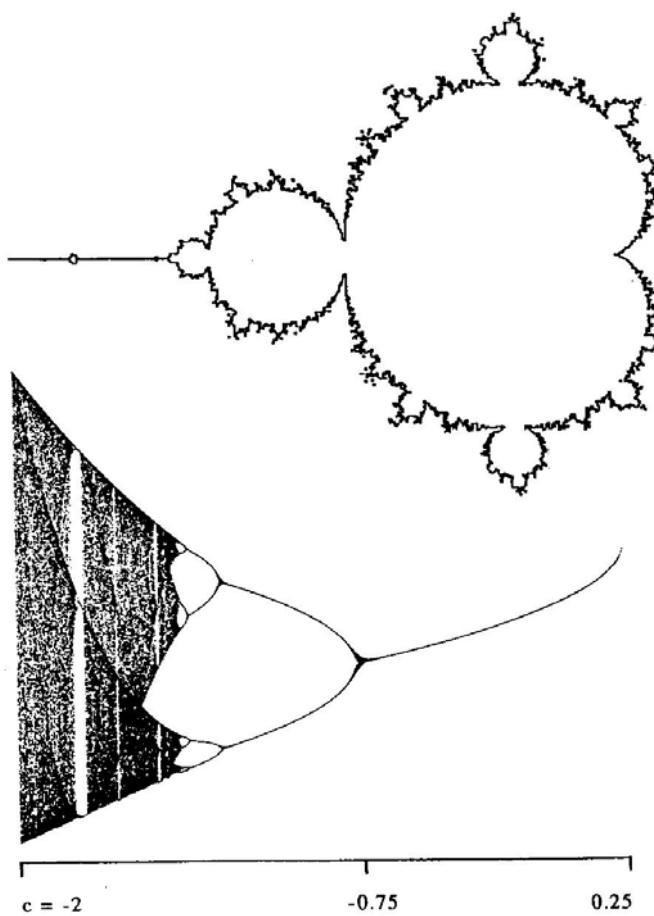
۲. نشان دهید که مرز K_c ، $J(Q_c)$ است.

۳. نشان دهید $Q_c''(\infty) \neq 0$.

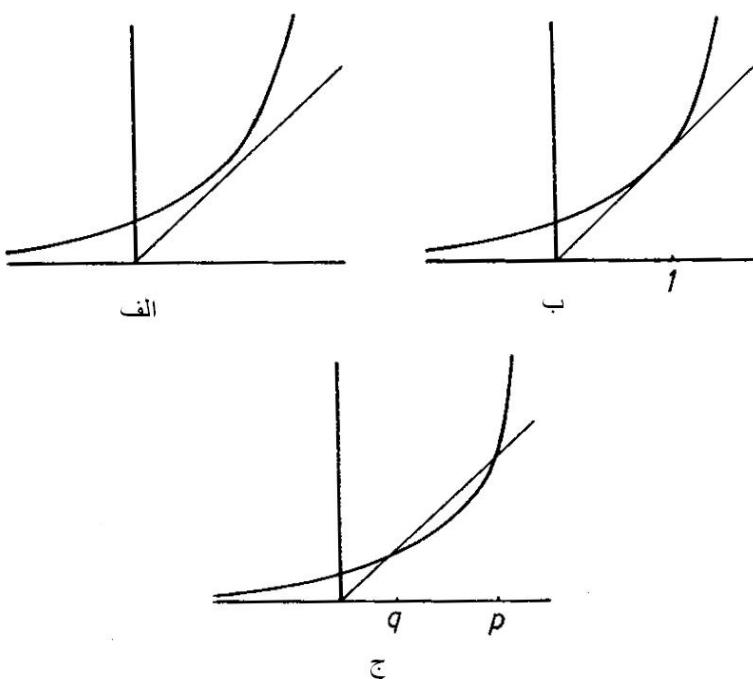
۹ یک مثال: توابع متعالی

توابع متعالی تام از بسیاری از جهات مشابه چندجمله‌ای‌ها هستند. اگرچه چندین تفاوت بزرگ وجود دارد. شاید مهم‌ترین تفاوت، این نکته باشد که ∞ دیگر نقطه ثابت جاذب نیست. برخلاف چندجمله‌ای‌ها، توابع تام حتی به صورت پیوسته قابل تعیین به ∞ نیستند تا نگاشتی روی کره ریمان به دست دهنند. در واقع، ∞ همان چیزی است که به عنوان تکین ذاتی برای تابع شناخته می‌شود و قضیه مهم پیکاره تضمین می‌کند که نگاشت، همه مقادیر به جز یکی را بی‌نهایت بار در هر همسایگی از یک تکین ذاتی به خود می‌گیرد. بنابراین دینامیک یک نگاشت تام نزدیک ∞ بی‌اندازه پیچیده است. این نکته را در این بخش با درنظر گرفتن یک خانواده ساده ولی مهم از نگاشتها، یعنی نگاشتها نمایی مختلط λe^z مشخص می‌کنیم. با وجود اینکه این نگاشتها نسبتاً ساده هستند، ولی تعدادی از پدیده‌های مشترک بین بسیاری از توابع تام را نشان می‌دهند. به طور مثال، در ادامه نشان می‌دهیم که با تغییر کردن پارامتر λ ممکن است نگاشت جولیای این نگاشتها از یک مجموعه هیچ‌جا چگال از \mathbb{C} ، به کل صفحه منفجر شود!

خانواده نگاشتها $E_\lambda(z) = \exp(\lambda z)$ را با λ نمایش می‌دهیم. در اینجا λ یک پارامتر حقیقی است. دینامیک E_λ روی خط حقیقی به راحتی قابل درک است. از بخش ۱۲.۱ یادآوری می‌کنیم که نمودار E_λ بسته به اینکه $\lambda > \frac{1}{e}$ ، $\lambda = \frac{1}{e}$ و یا $\lambda < \frac{1}{e}$ ، سه شکل متفاوت می‌پذیرد. شکل ۱.۹ را ببینید. نتیجه می‌شود که اگر $\lambda > \frac{1}{e}$ آنگاه برای همه $x \in \mathbb{R}$ ، $E_\lambda^n(x) \rightarrow \infty$ در حالی که اگر $\lambda < \frac{1}{e}$ ، دو نقطه ثابت، یکی جاذب و دیگری دافع در \mathbb{R} موجود است.



شکل ۶.۸. نمودار مدار Q_c و M_c .



شکل ۱.۹. نمودارهای $E_\lambda(x) = \lambda \exp(x)$ برای الف $\lambda < \frac{1}{e}$ ، ب $\lambda = \frac{1}{e}$ و ج $\lambda > \frac{1}{e}$

البته، این مثالی از یک انشعاب زینی-گرهای است. در ادامه نشان می‌دهیم که در واقع اگر به صورت سرتاسری نگاه کنیم، این انشعاب بسیار پیچیده‌تر است؛ انجام مجموعه جولیای E_λ هنگام عبور λ از $\frac{1}{e}$ اتفاق می‌افتد.

ابتدا برخی از خواص مقدماتی تابع نمایی را یادآوری می‌کنیم. برای سادگی، از $E(z)$ برای تابع نمایی معمولی e^z استفاده می‌کنیم. داریم $E(x+iy) = e^x e^{iy} = e^x \cos y + i e^x \sin y$. درنتیجه، خطوط عمودی $x = c$ را به دوایری با مرکز c و شعاع e^c می‌نگارند و خطوط افقی $y = k\pi$ را به شعاعهای $c = \theta$ می‌برند. به ویژه، خطوط افقی $y = k\pi$ که $k \in \mathbb{Z}$ به محور حقیقی منفی و خطوط به صورت $y = 2k\pi$ به محور حقیقی مثبت نگاشته می‌شوند. شکل ۲.۹ را ببینید. درنهایت، E دارای تناوب $2\pi i$ بوده و هیچ نقطه بحرانی ندارد ولی 0° یک "مقدار" بحرانی است به این معنی که یک مقدار حذف شده است. خواننده می‌تواند به راحتی بررسی کند که هر همسایگی از ∞ توسط بی‌نهایت بار به روی $\{0^\circ - \mathbb{C}\}$ نگاشته می‌شود. تمرین ۱ را ببینید.

حال به توصیف مجموعه جولیای $E(z)$ می‌پردازیم. یادآوری می‌کنیم که همه خواص مجموعه

جولیای یک چندجمله‌ای، به جز یک استثناء، به نگاشت نمایی تعمیم پیدا می‌کند؛ مجموعه جولیا ممکن است دارای درون شود (نتیجه ۱۰.۵ را ببینید). در حقیقت در سال ۱۹۸۱، میسیورویج با نشان دادن اینکه $\mathbb{C} = J(E)$ ، به سوال شصت ساله فتوپاسخ داد. برهان وی در خصوص این نکته را در ادامه می‌آوریم.

قضیه بعدی یکی از تفاوت‌های بین $E(z)$ و چندجمله‌ای‌ها را نشان می‌دهد: نقاطی که تحت تکرارهای E به ∞ می‌کنند لزومی ندارد که در مجموعه پایدار باشند.

قضیه ۱.۹ خط حقیقی مشمول در $J(E)$ است.

برهان. فرض کنید S نماینده نوار $\frac{\pi}{\ell}$ باشد. اگر $z = x + iy \in S$ ، آنگاه از آنجاکه $|Im(z)| \leq \frac{\pi}{\ell}$ نتیجه می‌شود که $E(z)$ در سمت راست z قرار می‌گیرد. از آنجاکه $\frac{1}{e^x} > \frac{\ell^x}{\pi} > x$ آخرین نامساوی از شکل ۱.۹ نتیجه می‌شود. به ویژه اگر برای هر i ، $E^i(z) \in S$ ، آنگاه $Re E^i(z) \rightarrow \infty$ اگر $z \in S$ و $Re(z) > 1$ ، $Im(z) \neq 0$.

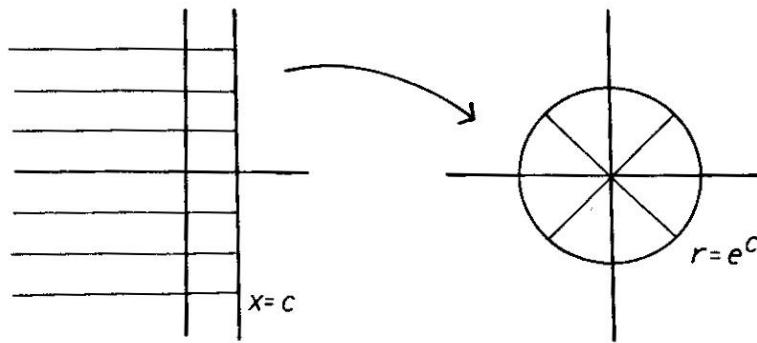
$$|e^x \sin y| > e^x \left(\frac{2}{\pi} |y| \right) > |y|.$$

در نتیجه اگر $z \in S$ ولی $z \notin \mathbb{R}$ و اگر $Re z > 1$ ، آنگاه $|Im(E^i(z))|$ باید با افزایش i رشد کند. در نتیجه $z > j$ موجود است که برای آن $E^j(z) \notin S$. بنابراین همه نقاط در S که در \mathbb{R} قرار نمی‌گیرند باید در نهایت S را ترک کنند.

اکنون فرض کنید U یک همسایگی از $x \in \mathbb{R}$ باشد. یادآوری می‌کنیم که $\lim_{x \rightarrow \infty} E^j(x) = \infty$. با توجه به ملاحظه فوق، $N > 0$ موجود است که برای هر $j > N$ ، $E^j(U)$ هر دوی \mathbb{R} و خط $y = \frac{\pi}{\ell}$ را در نقاطی با قسمت حقیقی بزرگ‌تر از ۱ قطع می‌کند. در نتیجه، از آنجاکه $y = \frac{\pi}{\ell}$ به شعاع $\theta = \frac{\pi}{\ell}$ نگاشته می‌شود، $E^{j+1}(U)$ هر دوی \mathbb{R} و π را قطع می‌کند. بنابراین، $E^{j+2}(U)$ محور حقیقی منفی را قطع می‌کند و قسمتی از U توسط E^{j+3} به درون قرص واحد نگاشته می‌شود. در نتیجه، برای z به اندازه کافی بزرگ، نقاط z_1 و z_2 در U موجودند که برای آنها $E^j(z_1)$ در قرص واحد قرار می‌گیرد و $|E^j(z_2)|$ به دلخواه بزرگ است. بنابراین $\{E^n\}$ یک خانواده نرمال در U است و $x \in J(E)$

حال برای نشان دادن اینکه $J(E) = \mathbb{C}$ ، کافیست نشان دهیم که تصویر وارون خط حقیقی در \mathbb{C} چگال است. برای این منظور، به چند لم نیاز داریم.

$$\text{لم ۲.۹ } |Im(E^n(z))| \leq |(E^n)'(z)|$$



شکل ۲.۹. نگاشت $E(z) = \exp(z)$

برهان. اگر $z = x + iy$, آنگاه

$$\begin{aligned} |Im(E(z))| &= e^x |\sin y| \\ &\leq e^x |y| \\ &= |E'(z)| |Im(z)| \end{aligned}$$

که اگر $z \notin \mathbb{R}$

$$\frac{|Im(E(z))|}{|Im(z)|} \leq |E'(z)|.$$

به طور کلی، اگر $E^n(z) \notin \mathbb{R}$, با چند بار استفاده از این نامساوی داریم

$$\begin{aligned} \frac{|Im(E^n(z))|}{|Im(E(z))|} &= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{|Im(E^i(z))|}{|Im(E^i(z))|} \\ &\leq \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^i(z))|. \end{aligned}$$

از آنجاکه $|Im(E(z))| \leq |E(z)| = |E'(z)|$ نوشته

$$\begin{aligned} |Im(E^n(z))| &\leq \prod_{i=1}^{n-1} |E'(E^i(z))| \\ &= |(E^n)'(z)|. \end{aligned}$$

□

برهان قضیه ۱.۹ نشان می‌دهد که اکثر نقاط باید تحت تکرار، نوار S را ترک کنند. لم بعدی نشان می‌دهد که آن اکثر نقاط باید درنهایت به نوار باز گردند.

لم ۴.۹ فرض کنید U یک مجموعه باز همبند باشد. دراین صورت فقط تعداد متناهی از $E^n(U)$ ها می‌تواند مجرزا از S باشند.

برهان. بگذارید فرض کنیم که تعداد نامتناهی از تصاویر U مجرزا از S هستند. اگر n ای موجود باشد که برای آن E^n یک همسان‌ریختی که U را به روی تصویرش می‌نگارد نباشد، آنگاه $z_1, z_2 \in U$ و $z_2 \neq z_1$ موجود است که برای آن $E^n(z_1) = E^n(z_2)$. درنتیجه، زایی موجود است که برای k ای در $\mathbb{Z} - \{0\}$ داریم $E^j(z_1) = E^j(z_2) + 2k\pi i$. ولی دراین صورت $E^j(U)$ باید برای m ای در \mathbb{Z} ، یک خط حقیقی به شکل $y = 2m\pi$ را قطع کند و درنتیجه $(E^{j+1}(U), E^{j+1})$ را قطع می‌کند. پس $(E^{j+\alpha}(U), E^{j+\alpha})$ را قطع می‌کند و فقط تعداد متناهی از تصاویر U می‌توانند مجرزا از S باشند. پس نتیجه می‌گیریم که هر یک از E^n ها باید روی U یک همسان‌ریختی باشند.

اکنون فرض می‌کنیم یک دنباله n_j موجود است به‌طوری که برای هر j , $E^{n_j}(U) \cap S = \emptyset$. با توجه به لم قبل، برای هر z و برای هر $z \in U$, $|(E^{n_j})'(z)| \geq (\frac{\pi}{3})^{n_j}$. نتیجه می‌شود که اگر U شامل یک قرص با شعاع $\delta > 0$ باشد آنگاه $E^{n_j}(U)$ شامل یک قرص با شعاع $(\frac{\pi}{3})^{\delta}$ است. تمرین ۲ را ببینید. بنابراین برای زهای به اندازه کافی بزرگ، $E^{n_j}(U)$ باید با خطی به شکل $y = 2\pi$ برخورد کند و نتیجه حاصل می‌شود. \square

لم ۴.۹ فرض کنید V یک مجموعه باز همبند که تعداد بی‌نهایت تصویر از آن مشمول در نیم صفحه $\{z | \operatorname{Re}(z) > 4\} = H$ است باشد. دراین صورت $0 > n$ ای موجود است که برای آن $E^n(V) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$

برهان. فرض کنید W نماینده مجموعه $\{z | |\operatorname{Im}(z)| \leq 2\pi\}$ باشد. اگر یک مجموعه همبند $A \cap W = \emptyset$ در $A \cap S = \emptyset$ صدق کند آنگاه یا $A \cap S$ و یا $E(A) \cap S$ تهی است. درنتیجه، با توجه به لم قبلی، فقط تعداد متناهی تصویر از V در H می‌توانند مجرزا از W باشند. بنابراین تقریباً همه تصاویر V مشمول در W هستند.

اکنون مرز $\frac{\pi}{3} = |y|$ از S در H را درنظر بگیرید. اگر z روی این مرز قرار بگیرد، آنگاه

$$|\operatorname{Im}(E(z))| \geq e^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 2\pi.$$

بنابراین مرز S در H در W قرار نمی‌گیرد. درنتیجه هر مجموعه همبند در $W \cap H$ یا مشمول در S است یا متفاوت از S است. اکنون تصویر $H \cap S$ مشمول در H است. از آنجاکه بی‌نهایت تصویر از V مشمول در $W \cap H$ است و همچنین برای هر $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ موجود است $n \geq 0$ می‌شود که $E^n(z) \notin S$ (برهان قضیه ۱.۹ را ببینید)، نتیجه می‌شود که بی‌نهایت تا از آنها باید مجرزا از S باشند. این با لم ۴.۹ در تناقض است. \square

اکنون می‌توانیم ثابت کنیم

قضیه ۵.۹. $J(E) = \mathbb{C}$

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۹، کافیست نشان دهیم که هر مجموعه باز در \mathbb{C} شامل قسمتی از پیش تصویر \mathbb{R} است. برای انجام این کار، فرض کنید U باز و همبند باشد و برای هر n ، $E^n(U) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. با توجه به قضیه مانتل، $\{E^n\}$ یک خانواده نرمال روی U است. فرض کنید D نمایانگر یک قرص با شعاع e^k حول 0 باشد. توجه کنید که $E(H)$ مکمل D است. بنابراین با استفاده از لم ۴.۹، نتیجه می‌شود که بی‌نهایت تصویر از U ، D را قطع می‌کنند. اکنون فرض کنید F نماینده نگاشت حدی زیردنباله‌ای در E^n باشد. با توجه به مطالب فوق، $F(U) \cap D \neq \emptyset$. نقطه $z_0 \in F(U) \cap D$ را انتخاب کنید. اگر $z_0 \in \mathbb{R}$ ، آنگاه $k > 0$ موجود است به‌طوری که $E^k(U) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$ و نتیجه به‌دست می‌آید. بنابراین فرض می‌کنیم که $z_0 \notin \mathbb{R}$. همان‌گونه که در قضیه ۱.۹ مشاهده کردیم، $k > 0$ موجود است که برای آن $S \not\subset E^k(z_0)$. بنابراین U و زیردنباله دیگری از E^n موجود است که به یک نگاشت F_1 همگراست و در $S \not\subset F_1(w)$ صدق می‌کند. ولی در این صورت یک همسایگی باز V از w و بی‌نهایت تصویر (V) موجود است که S را قطع نمی‌کنند. این با لم ۳.۹ در تناقض است و قضیه ثابت می‌شود. \square

ملاحظات.

۱. در واقع نشان داده‌ایم که خانواده $\{E^n\}$ در هیچ نقطه از \mathbb{C} نرمال نیست. برای نشان دادن اینکه نقاط متناوب دافع نیز چگال هستند، به‌این صورت بحث می‌کنیم. می‌توان به‌سادگی بررسی کرد که E دارای یک نقطه ثابت دافع است؛ در واقع دارای بی‌نهایت تا از چنین نقاطی است (تمرین ۳ را ببینید). سپس با استفاده از بحث بخش ۵.۳ می‌توان یک نقطه متناوب دافع نزدیک هر نقطه از \mathbb{C} تولید کرد.

۲. برای $\frac{1}{e} > \lambda$ نیز $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$. برای اثبات آن فقط کافیست مجموعه‌های S و H را تغییر دهید. جزئیات را واگذار می‌کنیم.

اکنون به انشعاب $\frac{1}{e} = \lambda$ باز می‌گردیم. با استفاده از ملاحظات فوق، برای هر $\frac{1}{e} > \lambda$ ، $J(E_\lambda) = \mathbb{C}$. برای $\frac{1}{e} < \lambda$ ، E_λ دو نقطه ثابت در \mathbb{R} است: یک نقطه ثابت جاذب در q و یک نقطه ثابت دافع در p . شکل ۱.۹ را ببینید. توجه کنید که $p < q < 1 < e$. خطوط عمودی $x = 1$ را در نظر بگیرید. این خط را به دایره‌ای با شعاع $1 < \lambda e < 1$ حول 0 می‌نگارد. به‌ویژه، کل نیم‌صفحه چپ $1 < z < \text{Re}(z)$ به درون این دایره نگاشته می‌شود. از آنجاکه $1 < \text{Re}(z) < 1$ همبند ساده است و q یک نقطه ثابت این مجموعه است، از لم شوارتس نتیجه می‌شود که (نتیجه ۱۱.۱ را ببینید) همه نقاط در $1 < z < \text{Re}(z)$ تحت تکرار E_λ به q میل می‌کند. بنابراین هیچ نقطه متناوب دافعی در $x = 1$ موجود نیست و نتیجه می‌شود که مجموعه جولیایی E_λ کاملاً در سمت راست خط $x = 1$

قرار می‌گیرد. پس با افزایش و گذار λ از $\frac{1}{e}$ ، مجموعه جولیا منفجر می‌شود تا کل صفحه را بپوشاند. بهوضوح، این انشعاب زینی-گرهای دارای نقاط انشعابی سرتاسری است. این همچنین نشان می‌دهد که مجموعه جولیای نگاشت مختلط تحلیلی لزومنی ندارد که به صورت پیوسته تغییر کند.

یک سوال طبیعی که پیش می‌آید طبیعت $J(E_\lambda)$ برای $\lambda < \frac{1}{e} < 0$ است. با استفاده از نتایج فوق، $J(E_\lambda)$ مشمول در نیم صفحه $\text{Re}(z) \geq 1$ است. برای توصیف این مجموعه، دوباره از دینامیک نمادین استفاده می‌کنیم. برای هر عدد صحیح N ، ابتدا یک دنباله از $2N+1$ مستطیل R_j با انداشتهای $N, \dots, -N = j$ می‌سازیم. هریک از این مستطیلها دارای اضلاع موازی با محورهای x و y هستند. مرز چپ آنها روی خط $x = 1$ و مرزهای افقی آنها روی خطوط $y = (2j+1)\pi$ و $y = (2j-1)\pi$ قرار می‌گیرد. مرزهای راست روی خط عمودی $x = c$ قرار می‌گیرد که c وابسته به N است و طوری انتخاب می‌شود که $\sqrt{2}c > \lambda e^c$. این شرط تضمین می‌کند که E_λ هریک از R_j را به روی ناحیه حلقه‌ای $|z| < \lambda e^c < |z| < \lambda e^{-c}$ نگارد که هریک از R_k را می‌پوشاند. شکل ۳.۹ را بینید. این یک وضعیت آشناست. قرار دهد.

$$R^N = \bigcup_{j=-N}^N R_j$$

و تعریف کنید $\Lambda_N = \{z \in \mathbb{R}^N \mid E_\lambda^i(z) \in \mathbb{R}^N, \forall i\}$. قضیه بعدی دقیقاً مشابه بخش قبل ثابت می‌شود و بنابراین آن را به عنوان یک تمرین واگذار می‌کیم.

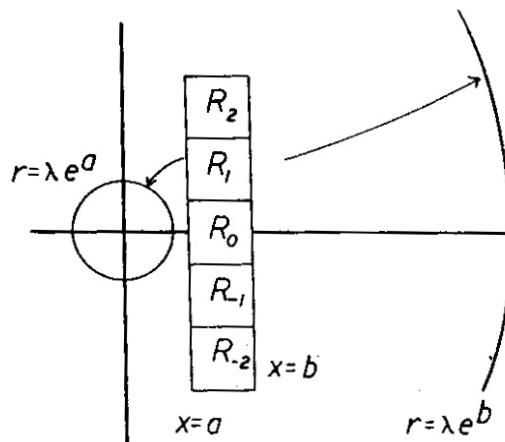
قضیه ۶.۹ مجموعه Λ_N یک مجموعه کانتور پایاست که روی آن، E_λ مزدوج توپولوژیکی با تغییر جاروی $1 + 2N$ نماد است. علاوه بر آن، هرگاه $z \in \Lambda_N$ ، آنگاه $1 > |E'_\lambda(z)|$.

در واقع مجموعه جولیای E_λ پیچیده‌تر از آن چیزی است که در بالا ممکن است به نظر برسد. نقطه ثابت p بهوضوح در $J(E_\lambda)$ است و علاوه بر آن، با استفاده از قضیه ۱.۹، کل بازه $[p, \infty)$ نیز در J است. بازه باز (p, ∞) از نقاطی تشکیل شده است که تحت تکرارهای E_λ به ∞ میل می‌کند و درنتیجه با استفاده از برهان قضیه ۱.۹، این نقاط نیز در $J(E_\lambda)$ قرار می‌گیرند. ولی هیچ یک از این نقاط با توجه به نوع ساختن Λ_N به دست نمی‌آیند. این خم را دم متناظر به p می‌نامیم. نتیجه می‌شود که هر نقطه در Λ_N دارای یک دُم ضمیمه مشابه است. به صورت دقیق‌تر،

قضیه ۷.۹ فرض کنید $w \in \Lambda_N$. یک خم پیوسته $\psi_w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ موجود است که

۱. ψ_w یک بهیک است.

۲. $\psi_w(0) = w$.



شکل ۳.۹.

$$E_\lambda^n(\psi_w(t)) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty, t \neq 0.$$

$$\psi_w(t) \in J(E_\lambda).$$

ساختن ψ_w را به صورت ساده و بدون بیان بسیاری از جزئیات ترسیم می‌کنیم. از آنجاکه $w \in \Lambda_N$ یک دنباله s_0, s_1, s_2, \dots از اعداد صحیح که راهنامه w در R_j را مشخص کند موجود است. فرض کنید S_j نمایانگر نوار نیمه نامتناهی $\{z | \operatorname{Re}(z) \geq 1, (2j+1)\pi \leq \operatorname{Im}(z) \leq (2j+1)\pi\}$ باشد. سپس ψ_w به صورت $E_\lambda^n(z) \in S_{s_n}, \forall n$ تعریف می‌شود، یعنی، ψ_w شامل همه نقاطی است که دارای راهنامه مشابه w در S_j هستند. می‌توان بررسی کرد که هرگاه مرز سمت راست R_j روی $x = c$ قرار بگیرد و اگر c به اندازه کافی بزرگ باشد، آنگاه یک نقطه یکتا در این بازه موجود است که در ψ_w قرار می‌گیرد. تمرین ۶ را ببینید.

در حقیقت می‌توان نشان داد که مجموعه نقاطی که مدار آنها در کل زمان در نوارهای فوق قرار می‌گیرد، با ضرب دکارتی $\Lambda_N \times [0, \infty)$ همسان‌ریخت است. یعنی، دمها نسبت به نقاط در Λ_N به صورت پیوسته تغییر می‌کنند. چنین مجموعه‌ای دسته گل کانتور نامیده می‌شود. تمرین ۷ را ببینید.

تمرین.

۱. نشان دهید $E_\lambda(z) = \lambda \exp(z)$ همه مقادیر هر همسایگی از ∞ را به جزء بی‌نهایت بار

می‌پذیرد.

۲. فرض کنید B یک قرص با شعاع δ و F یک همسان‌ریختی تحلیلی باشد که برای $z \in B$, $|F'(z)| > \mu$. نشان دهید (B) شامل یک قرص با شعاع $\mu\delta$ است.

۳. فرض کنید R_k نمایانگر نوار باز $(2k - 1)\pi < \text{Im}(z) < (2k + 1)\pi$ باشد. نشان دهید اگر E_λ دارای یک نقطه متناوب دافع در R_k است.

۴. نشان دهید هنگامی که $\lambda = \frac{1}{e}$, هیچ نقطه متناوب دافعی در نیم‌صفحه $\text{Re}(z) < 1$ وجود ندارد.

۵. قضیه ۶.۹ را ثابت کنید.

۶. فرض کنید $\lambda < \frac{1}{e} < 0$. فرض کنید w یک نقطه در مجموعه کانتور $J(E_\lambda) \subset \Lambda_n$ همان‌گونه که در قضیه ۶.۹ بیان شده باشد. نشان دهید w دارای یک دم ضمیمه به صورتی است که در قضیه ۷.۹ بیان شده است.

۷. فرض کنید $\{\Gamma_n\}_{n=0}^\infty$ یک دسته گل کانتور است، یعنی همسان‌ریخت با $\Lambda_n \times [0, \infty)$ است.

سه مثال زیر نشان می‌دهد که توابع تام و چند جمله‌ای‌ها ممکن است از جنبه‌های دیگر متفاوت باشند.

۸. فرض کنید $F(z) = z + e^z$. نشان دهید F دارای هیچ نقطه ثابتی نیست.

۹. فرض کنید $F(z) = z - (\sin z)e^{iz}$. نشان دهید F دارای بینهایت نقطه ثابت جاذب است.

۱۰. فرض کنید $F(z) = z + 1 + e^{-z}$. نشان دهید که اگر $\text{Re}(z) > 0$, آنگاه $F^n(z) \rightarrow \infty$ بنابراین نگاشتهای تام ممکن است دارای پنهانه‌های جذب جزئی در ∞ باشند. $J(F)$ را توصیف کنید.

چهار تمرین زیر مربوط به ساختار مجموعه جولیایی نگاشتهای تام $S_\lambda(z) = \lambda \sin(z)$ است.

۱۱. نشان دهید که محور موهومی تحت S_λ پایا باقی می‌ماند و اگر $|\lambda| \geq 1$, نشان دهید که مشمول در $J(S_\lambda)$ است.

۱۲. انشعابی را که برای خانواده S_λ در λ اتفاق می‌افتد توصیف کنید.

۱۳. فرض کنید $1 < |\lambda|$. برای $-N \leq j \leq N$ و ϵ کوچک، فرض کنید W_j نمایانگر نوارهای داده شده با $\epsilon > \text{Im}(z) \geq (2j+1)\pi \leq \text{Re}(z) \leq (2j-1)\pi$ باشد. نشان دهید $J(S_\lambda)$ شامل یک مجموعه کانتور پایا در W_j است که روی آن S_λ با تغییرجا روی $1 + 2N$ نماد مزدوج است.

۱۴. نشان دهید $(z) S_\lambda$ در هر همسایگی از ∞ ، هر مقدار c را بی‌نهایت بار می‌پذیرد.

۱۵. مجموعه جولیای $\lambda \exp(z^n)$ را برای λ کوچک توصیف کنید.

برای مطالعه بیشتر:

تعداد کمی کتاب برای مطالب زیادی که در این فصل ارائه دادیم در دسترس است؛ بسیاری از مطالب در کتابهای تحقیقاتی کلاسیک یافته می‌شوند. یک کتاب برای مطالعه مجمل با مراجع خوب، کتاب زیر است:

- Blanchard, P. *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*. Bull A.M.S. **11** (1984), 85-141.

در کتاب زیر به جزئیات مربوط به همگرایی نزدیک یک نقطه متناوب خنثی پرداخته شده است:

- Siegel, C.L. and Moser, J. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1971.

مجموعه‌های جولیا مثالهایی از فرکتالها هستند و کارهای گرافیکی کامپیوتری مندلبروت کمک بسیاری به ساده‌تر کردن مفاهیم دینامیک مختلط کرده است. بعضی از این کارها در کتاب زیر گنجانده شده است:

- Mandelbrot, B. *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, San Francisco, 1982.

تصاویر گرافیکی کامپیوتری مجموعه‌های جولیا و مجموعه مندلبروت بسیار زیبا هستند. برای دیدن الگوریتم‌هایی که برای تولید این تصاویر لازم است کتابهای زیر را بینید.

- Peitgen, H.-O. and Richter, P. *The Beauty of Fractals*. Springer-Verlag, New York, 1986.

- Peitgen, H.-O. and Saupe, D. eds. *The Science of Fractal Images*. Springer-Verlag, New York, 1988.

تعدادی کتاب بسیار خوب برای داشتن پیش‌زمینه‌ای در آنالیز مختلط موجود است که برخی از آنها عبارتند از:

- Ahlfors, L.V. *Complex Analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1979.
- Conway, J.B. *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, New York, 1978.

درنهایت، خوب است که به کتابهای اساتید اولیه این نظریه یعنی فتو و جولیا برگردیم و ببینیم که آنها با چه تلاشی و بدون دسترسی به کامپیوتر، نظریه دینامیک تحلیلی مختلط را پیش برند!

- Julia, G. *Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles*. J. Math. **8** (1918), 47-245.
- Fatou, P. *Sur l'itération des fonctions transcendantes entières*. Acta Math. **47** (1926), 337-370.

واژه‌نامه فارسی و نمایه^۱

الف

chaos.....	آشوب ۲۸۸، ۵۰
Markov partition.....	افراز مارکوف ۲۰۸
expansive.....	انبساطی ۵۲
bifurcation.....	انشعاب ۸۴، ۲۹
period-doubling.....	دوره-دوبابر ساز ۳۴۲، ۹۴، ۸۶
saddle node.....	زینی-گرهای ۳۵۲، ۹۲، ۸۴
tangent.....	مماسی ۸۴
Hopf.....	هاف ۲۵۹، ۲۵۶
homoclinic.....	هموکلینیک ۲۷۵، ۱۳۲

ب

chain recurrence.....	بازگشتی زنجیری ۲۴۸
wandering interval.....	بازه سرگردان ۱۱۵، ۸۳
renormalization.....	بازه‌نهجاش ۱۵۵، ۱۳۹
lift.....	بالابرده ۱۰۸
foliation.....	برگ‌بندی ۲۰۶
involution.....	برگشت ۲۷۳، ۲۰۱

^۱ به دلیل یکسان بودن کلمات واژه‌نامه فارسی و نمایه، این دو قسمت در هم ادغام شده‌اند.

پ

structural stability.....	۵۵	پایداری ساختاری
backward asymptotic	۱۹۷، ۱۹	پسرو مجانبی
Devil's staircase.....	۱۱۶	پلکان شیطان
basin of attraction.....	۳۱۹	پهنه جذب
forward asymptotic	۱۹۷، ۱۸	پیشرو مجانبی

ت

transformation.....		تبديل
elliptic	۲۸۷	یضوی
parabolic	۲۸۷	سهموی
Möbius	۲۸۷	موبیوس
graphical analysis.....	۲۳، ۲۰	تحلیل نموداری
topological transitive	۵۱، ۴۳	ترایای توپولوژیکی
Sarkovskii order.....	۲۷۴، ۶۵	ترتیب شارکوفسکی
topological conjugacy	۴۵	تزوج توبولوژیکی
subshift of finite type	۲۱۱، ۱۰۰	تعییرجا از نوع متناهی
transition	۱۶۲	تعییر وضعیت
iteration	۲	تکرار

چ

sink	۲۲۹، ۲۵	چاهک
source	۲۲۹، ۲۶	چشمه
torus	۲۰۲، ۱۸۲	چنبه
Tchebycheff polynomial	۵۳	چندجمله‌ای چبیشف

ح

orientation preserving.....	۱۰۹	حافظ جهت
inverse limit	۲۲۰	حد وارون

خ

full family	خانواده تمام ۱۶۲
horizontal curve	خم افقی ۲۳۹
manifold	خمنه
local stable	پایدار موضعی ۲۲۱
branched	شاخه‌ای ۲۲۲
local unstable	نایپایدار موضعی ۲۳۱
hyperbolic toral automorphism	خودریختی هذلولوی روی چنبره ۲۰۱

د

Cantor bouquet	دسته گل کانتور ۳۵۸
kneading sequence	دباله آمیخته ۱۴۹
admissible sequence	دباله مجاز ۱۵۳
dendrite	دندریت ۳۲۴
irrational rotation	دوران گنگ ۲۱
rational rotation	دوران گویا ۲۱
symbolic dynamics	دینامیک نمادین ۴۴، ۴۱

ر

itinerary	راه‌نامه ۴۵
attractor	رباینده / جاذب ۲۱۴، ۲۵
Plykin	پلایکین ۲۲۲
strange	غريب ۲۲۵
Lozi	لوزی ۲۲۸
Hénon	هنون ۲۲۷، ۲۲۵

س

escape rate	سرعت فرار ۳۴۶
dynamical system	سیستم دینامیکی ۲

continuous	پیوسته ۳
discrete	گسته ۲
solenoid	سیم‌لوله ۲۱۴

ش

gradient like	شبه‌گرادیان ۲۴۶
genealogy	شجره‌نامه ۱۶۵

غ

non-wandering	غیرسرگردان ۴۹
---------------------	---------------

ف

fractal	فرکتال ۳۸
---------------	-----------

ق

Theorem	قضیه
Sarkovskii	شارکوفسکی ۱۰۴، ۶۳
Kupka-Smale	کوپکا- اسمیل ۱۲۴
Montel	ماتتل ۳۰۳
Contraction Mapping	نگاشت انقباض ۱۸۲
Hartman	هارتمن ۶۱

ک

completely invariant	کاملاً پایا ۲۸۸
continued fraction	کسر مسلسل ۲۳۹
sector bundle	کلاف قطاع ۲۲۸
totally disconnected	کلاً ناهمبند ۳۷

گ

petal ۳۲۳ کلبرگ

ل

Closing Lemma	لم تنگاتنگی ۱۲۲
Schwarz Lemma	لم شوارتس ۲۸۳

م

transition matrix.....	ماتریس تغییر وضعیت ۹۹
adding machine.....	ماشین جمع کننده ۱۴۵
set	مجموعه
Julia	جولیا ۲۸۸
filled in Julia set	جولیای پرشده ۲۴۳
perfect	کامل ۳۷
Cantor	کانتور ۲۹۹، ۱۹۹، ۳۷
cone	مخروط ۲۵۳
orbit	مدار
recurrent	بازگشتی ۲۴۸، ۱۲۲، ۴۹
backward	پسرو ۱۷
forward	پیشرو ۱۷
heteroclinic	هتروکلینیک ۲۰۰
homoclinic	هموکلینیک ۲۰۰، ۱۲۹
non-degenerate homoclinic	هموکلینیک ناتبهگون ۱۲۱
Schwarzian derivative	مشتق شوارتسی ۲۸۷، ۸۲، ۷۲
Schröder functional equation	معادله تابعی شرودر ۳۰۵
cone field	میدان مخروط ۲۵۳

ن

- ناحیه تله ۲۱۶
 نظریه آمیختگی ۱۴۸
 نقطه
 exceptional ۳۰۳، ۳۰۱
 recurrent ۲۴۷، ۱۲۲، ۴۹
 weakly attracting ۲۸
 indifferent ۲۳۱، ۳۰۵
 weakly repelling ۲۸
 saddle ۲۲۹
 eventually periodic ۱۸
 heteroclinic ۲۴۸، ۲۰۰، ۱۲۹
 homoclinic ۲۴۸، ۲۰۶، ۲۰۰، ۱۲۸
 transverse homoclinic ۲۰۶
 نگاشت
 map / function
 Anosov map ۲۰۱
 first return map ۷۹
 bump function ۱۷، ۸
 Weierstrass ϕ function ۳۲۶
 area preserving map ۲۷۲
 حافظ مساحت ۲۷۲
 tent map ۵۴، ۳۹
 Denjoy map ۱۱۸، ۱۱۳
 Liapounov function ۱۸۷
 Morse-Smale map ۲۵۱، ۱۲۰، ۶۳
 Baker map ۵۴، ۴۰
 Smale horseshoe map ۱۹۲
 Hénon map ۲۶۸، ۱۸۱
 uniformizing map ۳۴۶
 نمای فاز ۱۹

orbit diagram	نمودار مدار	۱۴۲
semi-conjugate	نیم‌مزویج	۵۳

و

sensitive dependence	وابستگی حساس	۵۱
----------------------------	--------------------	----

ه

hyperbolic	هذلولوی	۲۲۸، ۲۸، ۲۴
------------------	---------------	-------------

University of Guilan Press

An Introduction to

Chaotic

Dynamical

Systems

Second Edition

Edited by:

Robert L. Devaney

Translated by:

Dr. S. Lamei

An Introduction to Dynamical Antropy Systems

Robert L. Devaney
Sanaz Lamei

University of Guilan Press

درباره کتاب

مطالعه سیستم‌های دینامیکی غیرخطی در ۵۰ سال اخیر به صورت گستره‌های مورد توجه قرار گرفته است. رایرت دوئنی، این تحقیقات پیشرفتنه گستره را برای دانشجویان دوره کارشناسی و کارشناسی ارشد ریاضی و سایر رشته‌ها در دسترس قرار داده است. دوئنی، در چاپ دوم این کتاب که برونو شترین کتاب وی است، موارد جدیدی در مورد نسودار مدار نگاشت بازه‌ها و مجموعه مندلبروت به همراه تصاویر رنگی جذابی از مجموعه جولیا و مندلبروت گنجانده است.

برای مطالعه این کتاب، نیازی به آشنایی قبلی با مباحث پیشرفته ریاضی مانند نظریه اندازه، توبولوژی یا هندسه دیفرانسیل نیست. تنها با فرض آشنایی با حسابان، دونی بسیاری از مفاهیم پایه‌ای سیستم‌های دینامیکی را معرفی می‌کند و خواننده را به مرکز تحقیقات در زمینه‌های مختلف هدایت می‌کند دو فصل اول، شامل طیف وسیعی از مباحث بنیادی سیستم‌های دینامیکی از جمله هذلولوی بودن، دینامیک نمادین، پایداری ساختاری، خمینه‌های پایدار و ناپایدار و نظریه انشعاب است. در این کتاب، آشنایی با جرخطی و آنالیز مختلط، فرد را به مرز تحقیقات معاصر راهنمایی می‌کند علاوه بر آن، دونی برای فرد مسلط به حسابان، مطالب جامعی برای آشنایی با دیدگاه ریاضی آشوب فراهم می‌کند.

"این کتاب، معرفی فوق العاده‌ای در مورد سیستم‌های دینامیکی است ... و من آن را قویاً برای ریاضی دانان (محض و کاربردی) و همه علاقه‌مندان لب به یادگیری سیستم‌های دینامیکی توصیه می‌کنم" فلیپ هولمز، از دانشگاه کورنل

درباره نویسنده

رایرت ال. دونی رئیس سابق دانشکده ریاضی دانشگاه بوستون است. مدرک کارشناسی را از کالج هالی کراس و مدرک دکتری را از دانشگاه کالیفرنیا در برکلی در سال ۱۹۷۳ اخذ کرده است. پروفسور دونی در دانشگاه‌های نیووسترن، تافتس و مریلند تدریس کرده است. مباحث مورد علاقه وی، عمدها سیستم‌های دینامیک مختلط، سیستم‌های همبیلتونی و دینامیک تجربی است.

